

FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA  
PHYSIKALISCH-ASTRONOMISCHE-FAKULTÄT



**FRIEDRICH-SCHILLER-  
UNIVERSITÄT  
JENA**

PROF. JENS LIMPERT

---

# **Grundlagen der Laserphysik**

---

Übungsserien

Wintersemester 2020/2021

**Name:** MARTIN BEYER

## Inhaltsverzeichnis

1 Erste Übungsserie	3
2 Zweite Übungsserie	9
3 Dritte Übungsserie	14
4 Vierte Übungsserie	20
5 Fünfte Übungsserie	27
6 Sechste Übungsserie	33
7 Siebte Übungsserie	43
8 Achte Übungsserie	48
9 Neunte Übungsserie	55
10 Zehnte Übungsserie	62

# 1 Erste Übungsserie

**Aufgabe 1:** Ein Laserpuls breitet sich entlang der  $z$ -Achse aus. Seine Leistung  $P(t)$  kann beschrieben werden durch

$$P(t) = P_P \exp \left[ -4 \ln 2 \left( \frac{t}{\tau} \right)^2 \right] \quad (1.1)$$

mit der Spitzenleistung  $P_P$ . Seine ebenso gaußförmige Intensitätsverteilung ist

$$I(x, y, z, t) = \frac{2}{\pi w^2} P(t) \exp \left( -2 \frac{x^2 + y^2}{w^2} \right). \quad (1.2)$$

- Welchen Durchmesser muss eine kreisförmige Apertur besitzen, damit 99 % der Gesamtleistung des Laserstrahls transmittiert werden?
- Für ein Lasersystem mit einer Spitzenleistung von  $P_P = 1 \text{ PW}$  und einer Pulsdauer von  $\tau = 25 \text{ fs}$  wird der Strahl auf einen Strahldurchmesser von  $2w = 10 \mu\text{m}$  fokussiert. Berechnen Sie die Spitzenintensität  $I_P$ , die zugehörige Feldstärke und vergleichen Sie den Wert mit der Feldstärke, die ein Elektron im Abstand von  $1 \text{ \AA}$  von einem Proton erfährt.
- Der Laser aus b.) emittiert die Pulse mit einer Pulswiederholrate von  $1 \text{ Hz}$ . Wie groß sind die Pulsenergie und die Durchschnittsleistung?
- Wie kann man bei einem Laser experimentell die Durchschnittsleistung und die Pulsspitzenleistung bestimmen?

**a.) Lösung:** Die Gesamtleistung des Pulses ergibt sich aus dem Flächenintegral der Intensität über die gesamte  $x$ - $y$ -Ebene. Somit lässt sich die Gesamtleistung des Laser ausdrücken als

$$P_{\text{ges}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi w^2} P_t \exp \left( -2 \frac{x^2 + y^2}{w^2} \right) dx dy, \quad (1.3)$$

wobei  $P_t$  die gesamte zeitliche Leistung des Pulses beschreibt. Durch Einführung von Polarkoordinaten  $dx dy = r dr d\varphi$  lässt sich das Integral vereinfachen zu

$$\begin{aligned} P_{\text{ges}} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{2}{\pi w^2} P_t \exp \left( -2 \frac{r^2}{w^2} \right) r dr d\varphi = \frac{4P_t}{w^2} \int_0^{\infty} \exp \left( -2 \frac{r^2}{w^2} \right) r dr \\ &= -P_t \exp \left( -2 \frac{r^2}{w^2} \right) \Big|_0^{\infty} = P_t. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Es wird nun nach einem  $R$  gesucht, für den das obige Integral 99 % der Gesamtintensität  $P_t$  entspricht. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} -P_t \exp \left( -2 \frac{r^2}{w^2} \right) \Big|_0^R &\stackrel{!}{=} 0.99 P_t \Rightarrow P_t \left( 1 - \exp \left( -2 \frac{R^2}{w^2} \right) \right) = 0.99 P_t \\ \exp \left( -2 \frac{R^2}{w^2} \right) &= 0.01. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Diese Gleichung kann nun nach  $R$  aufgelöst werden und es ergibt sich

$$R = w\sqrt{\ln(10)} \Rightarrow d = 2R = 2w\sqrt{\ln(10)}. \quad (1.6)$$

**b.) Lösung:** Für die Spitzenintensität wird der Zeitpunkt betrachtet, an dem die Leistung des Pulses maximal ist ( $t = 0$ ). Dann ist die Intensität maximal, wenn die Exponentialfunktion den Wert eins annimmt ( $x = 0, y = 0$ )

$$I(x, y, z, t) = \frac{2}{\pi w^2} P_P \underbrace{\exp\left(-2 \frac{x^2 + y^2}{w^2}\right)}_{\stackrel{!}{=} 1} = \frac{2}{\pi w^2} P_P. \quad (1.7)$$

Durch Einsetzen der Werte ergibt sich

$$I_P = \frac{2}{\pi(5\mu\text{m})^2} 1 \text{ PW} = 2,546 \cdot 10^{25} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}. \quad (1.8)$$

Die Intensität ist proportional zum Betragsquadrat des elektrischen Feldes. Insbesondere ergibt sich für einen linear polarisierten Puls folgender Zusammenhang zur Feldamplitude:

$$I = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 \Rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{2I}{c \epsilon_0}}. \quad (1.9)$$

Durch Einsetzen der Werte für die Lichtgeschwindigkeit  $c$  und die Permeabilität des Vakuums ergibt sich  $E_0 = 1,39 \cdot 10^{14} \frac{\text{V}}{\text{m}}$ . Das elektrische Feld eines Protons im Abstand von einem Angström ergibt sich nach dem COULOMB-Gesetz zu

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r^2} \stackrel{r=1\text{\AA}}{=} 1,44 \cdot 10^{11} \frac{\text{V}}{\text{m}}. \quad (1.10)$$

Es zeigt sich, dass das maximale elektrische Feld des Laserpulses drei Größenordnungen oberhalb des Feldes eines Protons im Abstand 1 Å liegt.

**c.) Lösung:** Die Pulsenergie lässt sich durch das Integral über die zeitliche Verteilung des Pulses berechnen

$$E_{\text{ges}} = P_P \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-4 \ln 2 \left(\frac{t}{\tau}\right)^2\right) dt. \quad (1.11)$$

Zur Lösung des Integrals wird die allgemeine Beziehung für GAUSS-Integrale benutzt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \quad (1.12)$$

Damit ergibt sich die Pulsenergie zu

$$E_{\text{ges}} = P_P \cdot \tau \underbrace{\sqrt{\frac{\pi}{4 \ln 2}}}_{\approx 1.06} = 26,61 \text{ J}. \quad (1.13)$$

Die Pulsenergie lässt sich also gut durch das Produkt aus Spitzenleistung und Pulslänge approximieren. Die Durchschnittsleistung ergibt durch die übertragene Energie pro Zeitintervall. Für eine Pulsfrequenz von  $f_{\text{Puls}} = 1 \text{ Hz}$  ergibt sich

$$\bar{P} = \frac{\Delta E}{\Delta t} = E_{\text{ges}} \cdot f_{\text{Puls}} = 1.06 P_P \cdot \tau \cdot 1 \text{ Hz} = 26,6 \text{ W}. \quad (1.14)$$

**d.) Lösung:** Die Pulsenergie des Lasers kann einfach gemessen werden. Dafür wird ein kalibrierter Energiedetektor verwendet, welcher sich aufheizt, wenn eine bestimmte Menge an Energie auf den Detektor trifft und ein (bekannter) Anteil davon absorbiert wird. Durch die induzierte Temperaturdifferenz zwischen Detektorfläche und der Hülle wird eine Thermospannung erzeugt, welche über eine bestimmte Menge an Energie übersetzt werden kann. Mithilfe der Pulswiederholrate kann nun die Durchschnittsleistung des Lasers bestimmt werden.

Zur Ermittlung der Spitzenleistung kann zusätzlich zur Pulsenergie noch die Pulsdauer gemessen werden. Da Femtosekundenpulse nicht durch optische Dioden oder andere elektronische Detektoren aufgelöst werden können, kann stattdessen eine Autokorrelationsmessung durchgeführt werden. Dabei wird der Puls in zwei identische Pulse durch einen Strahlteiler aufgeteilt und in einem nichtlinearen Kristall zusammengeführt, wodurch die zweite Harmonische des Laserpulses generiert wird. Die zeitliche Information des Pulses wird in ein räumlich variierendes Signal umgewandelt. Mithilfe einer CCD-Kamera kann dies aufgezeichnet werden, woraus dann die Pulslänge bestimmt werden kann. Dann lässt sich die Spitzenintensität, unter Voraussetzung, dass die Pulsform bekannt ist, über die Relation (1.13) gewinnen.

**Aufgabe 2:** Im Folgenden soll die Beziehung zwischen den einzelnen Einsteinkoeffizienten berechnet werden. Das zu betrachtende System besteht aus Atomen mit zwei Niveaus, welche entartet sein können.

- a) Berechnen Sie die zeitliche Veränderung der Besetzung des oberen Energieniveaus ( $\frac{dN_2}{dt}$ ) als Funktion der Einsteinkoeffizienten. Betrachten Sie dafür Absorption sowie induzierte und spontane Emission.
- b) Das System soll sich im thermischen Gleichgewicht befinden. Weiterhin sind die Atome in einer leitenden Kammer eingeschlossen. Zeigen Sie, dass die Lösung der Gleichung aus a) sich für ein 2-Niveau-System im Allgemeinen wie folgt ergibt:

$$A_{21} \cdot N_2 = N_2 \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \left[ \exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1 \right]^{-1} \cdot \left( B_{12} \frac{g_1}{g_2} \exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - B_{21} \right) \quad (1.15)$$

. *Hinweis:* Im thermischen Gleichgewicht ist die Boltzmann-Verteilung für ein System mit entarteten Energieniveaus wie folgt:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right) \quad (1.16)$$

mit  $g_1$  und  $g_2$  als Entartungsfaktoren.

- c) Zeigen Sie unter Ausnutzung der Gleichung aus b), dass der allgemeine Zusammenhang zwischen den Einsteinkoeffizienten sich ergibt zu:

$$B_{21} = \frac{g_1}{g_2} B_{12} \quad A_{21} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} B_{21}. \quad (1.17)$$

- d) Diskutieren Sie die physikalische Bedeutung und Auswirkung der Zusammenhänge zwischen den Einsteinkoeffizienten aus Aufgabenteil c). Erklären Sie im Besonderen, warum im Falle eines 2-Niveaus-Systems mit  $g_2 = 2$  und  $g_1 = 1$  thermisch induzierte Inversion (d. h. Inversion wenn  $T \rightarrow \infty$ ) möglich ist, aber Verstärkung nicht.
- e) Berechnen Sie das Verhältnis  $A_{21}/B_{21}$  für eine Mikrowellenquelle mit  $\nu = 10^{10}$  Hz, für eine Lichtquelle mit  $\lambda = 1 \mu\text{m}$  und für eine Röntgenquelle mit  $\nu = 10^{18}$  Hz.
- f) Welche Schlussfolgerungen können Sie aus den Resultaten von e.) ziehen?

a.) **Lösung:** Die zeitliche Änderung des oberen Energieniveaus wird bestimmt durch die Prozesse der Absorption, sowie der stimulierten und spontanen Emission. Es zeigt sich, dass für Absorption und stimulierte Emission die Rate proportional zur der Anzahl von Teilchen im jeweiligen Energieniveau und der Energiedichte des einfallenden Strahlungsfeldes ist. Die spontane Emission ist jedoch nur proportional zur Teilchenzahl  $N_2$  im oberen Energieniveau. Es ergibt sich somit folgende Ratengleichung:

$$\frac{dN_2}{dt} = -A_{21} \cdot N_2 - B_{21} \cdot N_2 \rho(\nu) + N_1 \cdot B_{12} \rho(\nu). \quad (1.18)$$

Die Vorzeichen ergeben sich durch die Überlegung, dass durch Emissionsprozesse die Teilchenzahl abnimmt, während die Absorption von Strahlung zur Anreicherung von Teilchen im Niveau 2 führt.

b.) **Lösung:** Die Rategleichung lässt sich durch Einsetzen der BOLTZMANN-Verteilung (Gleichung (1.16)) vereinfachen. Weiterhin wird gefordert, dass sich im thermischen Gleichgewicht die Besetzungszahl nicht mehr ändert ( $\frac{dN_2}{dt} = 0$ ). Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} -A_{21} \cdot N_2 - B_{21} \cdot N_2 \rho(\nu) + N_2 \frac{g_1}{g_2} \exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) \cdot B_{12} \rho(\nu) \\ \Rightarrow A_{21} \cdot N_2 &= N_2 \rho(\nu) \left[ B_{12} \frac{g_1}{g_2} \exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - B_{21} \right]. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Die Energiedichte  $\rho(\nu)$  des Strahlungsfeldes lässt sich durch die von MAX PLANCK als Folge der Energiequantisierung aufgestellten Formel aus der HEISENBERG'schen Unschärferelation und der BOSE-EINSTEIN-Verteilung für Photonen herleiten. Sie ergibt sich zu<sup>1</sup>

$$\rho(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} d\nu. \quad (1.20)$$

Wird nun (1.20) in (1.19) eingesetzt, folgt die zu zeigende Beziehung:

$$A_{12} \cdot N_2 = N_2 \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} \left[ B_{12} \frac{g_1}{g_2} \exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - B_{21} \right]. \quad (1.21)$$

c.) **Lösung:** Die Beziehung zwischen den Einsteinkoeffizienten kann hergeleitet werden, indem (1.21) nach der Energiedichte des Strahlungsfeldes aufgelöst wird:

$$\begin{aligned} \rho(\nu) &= \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{1 \cdot \exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} = \frac{A_{21}}{B_{12} \frac{g_1}{g_2} \exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - B_{21}} \\ &= \frac{A_{21}}{B_{21} \frac{g_1 B_{12}}{g_2 B_{21}} \exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Mithilfe eines Koeffizientenvergleichs für den konstanten Vorfaktor und den Vorfaktor der Exponentialfunktion ergibt sich

$$\frac{g_1 B_{12}}{g_2 B_{21}} \stackrel{!}{=} 1 \quad \frac{A_{21}}{B_{21}} \stackrel{!}{=} \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}, \quad (1.23)$$

woraus direkt die gesuchten Zusammenhänge folgen.

d.) **Lösung:** Die hergeleiteten Zusammenhänge zeigen, dass Raten der spontanen Emission und Absorption miteinander in Beziehung stehen. Für einen höheren Entartungsgrad im oberen Energieniveau tritt die Absorption häufiger auf als die stimulierte Emission. Für eine gleiche Entartung befinden sich beide Prozesse im Gleichgewicht.

<sup>1</sup>Wolfgang Demtröder. Experimentalphysik 3: Atome, Moleküle und Festkörper. Springer-Verlag, 2016. Seite 75

Nach Gleichung (1.16) ist die Besetzungszahl im unteren Niveau fast immer größer als im oberen Niveau. Für ein System mit  $g_2 = 2$  und  $g_1 = 1$  tritt für hohe Temperaturen  $T \rightarrow \infty$  trotzdem eine thermisch induzierte Besetzungsinversion auf

$$\stackrel{(1.16)}{\Rightarrow} N_2 = 2 \cdot N_1 \underbrace{\exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right)}_{T \rightarrow \infty 0} = 2 \cdot N_1. \quad (1.24)$$

Trotzdem lässt sich damit keine Verstärkung erzeugen, da sich in diesem Fall die Übergangsraten (unter Vernachlässigung spontaner Emission<sup>2</sup>) gegenseitig ausgleichen

$$\frac{dN_2}{dt} = (B_{12}N_1 - B_{21}N_2)\rho = (2B_{21}N_1 - B_{21}2N_1)\rho(\nu) = 0. \quad (1.25)$$

Somit werden alle stimuliert emittierten Photonen wieder absorbiert, wodurch sich kein Licht aus dem Resonator auskoppeln lässt.

Weiterhin lässt sich an den Beziehungen erkennen, dass die Konkurrenzprozesse der stimulierten und spontanen Emission abhängig von der Frequenz des Strahlungsfeldes sind. Für hohe Frequenzen dominiert die (für den Laser nicht nutzbare) spontane Emission. Das ist der Grund, warum die Konstruktion von UV-Lasern eine große Herausforderung darstellt, da hier ein Großteil der angeregten Elektronen durch spontane Emission in den Grundzustand übergeht.

**e.) Lösung:** Um die Verhältnisse der spontanen und stimulierten Emission zu berechnen, wird der Zusammenhang (1.17) genutzt. Die Lichtquelle mit  $\lambda = 1 \mu\text{m}$  hat eine Frequenz von  $\nu = c/\lambda = 3 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$ . Für die Verhältnisse ergibt sich:

**Tabelle 1:** Verhältnisse  $A_{21}/B_{21}$  für verschiedene Lichtquellen.

Quelle	Mikrowelle	Infrarot	Röntgen
Frequenz [Hz]	$10^{10}$	$3 \cdot 10^{14}$	$10^{18}$
$A_{21}/B_{21} \left[\frac{\text{kg}}{\text{m s}}\right]$	$6.2 \cdot 10^{-28}$	$1.7 \cdot 10^{-14}$	$6.2 \cdot 10^{-4}$

**f.) Lösung:** Die Ergebnisse aus Aufgabe e.) verdeutlichen nochmal, dass das Verhältnis von spontaner Emission zu stimulierter Emission sehr klein ist, jedoch für steigende Frequenzen aufgrund der  $\nu^3$ -Abhängigkeit stark wächst. Wie das Akronym LASER (light amplification by *stimulated* emission of radiation) deutlich macht, kann zur Verstärkung des Lichtes nur die stimulierte Emission verwendet werden. Die Ergebnisse verdeutlichen ebenfalls warum der Maser (Mikrowellen Laser) vor dem Laser entwickelt wurde und warum die Konstruktion von UV-Lasern kompliziert zu bewerkstelligen ist.

<sup>2</sup>Spontane Emission wirkt der Verstärkung noch zusätzlich entgegen.

## 2 Zweite Übungsserie

**Aufgabe 1:** Berechnen Sie die in der Vorlesung gegebene Linienform bei natürlicher Verbreiterung durch Fourier-Transformation. Hierbei sei das elektrische Feld eines zerfallenden Atoms gegeben durch

$$E(t) = E_0 \exp\left(-\frac{t}{2\tau_S}\right) \cos(\omega_0 t) \quad \text{für } t \geq 0 \text{ und } E(t < 0) = 0. \quad (2.1)$$

**Lösung:** Die Fouriertransformierte des elektrischen Feldes ergibt sich zu

$$\begin{aligned} E(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} E_0 \exp\left(-\frac{t}{2\tau_S}\right) \cos(\omega_0 t) \exp(-i\omega t) dt \\ &= \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t}{2\tau_S}\right) \frac{1}{2} (\exp(i\omega_0 t) + \exp(-i\omega_0 t)) \exp(-i\omega t) dt \\ &= \frac{E_0}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{1}{2\tau_S} + i(\omega - \omega_0)\right)t\right] + \exp\left[-\left(\frac{1}{2\tau_S} + i(\omega + \omega_0)\right)t\right] dt \\ &= \frac{E_0}{2\sqrt{2\pi}} \left( -\frac{1}{\frac{1}{2\tau_S} + i(\omega - \omega_0)} \exp[\dots] - \frac{1}{\frac{1}{2\tau_S} + i(\omega + \omega_0)} \exp[\dots] \right)_0^{\infty} \\ &= \frac{E_0}{2\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{\frac{1}{2\tau_S} + i(\omega - \omega_0)} + \frac{1}{\frac{1}{2\tau_S} + i(\omega + \omega_0)} \right). \end{aligned} \quad (2.2)$$

In der Nähe der Resonanzfrequenz  $\omega$  gilt  $(\omega - \omega_0) \ll \omega_0$ , sodass der zweite Summand von (2.2) vernachlässigbar klein ist. Für das abgestrahlte Leistungsspektrum gilt dann  $P(\omega) \propto |E(\omega)|^2$ :

$$P(\omega) \propto \frac{E_0^2}{8\pi} \frac{1}{\left(\frac{1}{2\tau_S}\right)^2 + (\omega - \omega_0)^2}. \quad (2.3)$$

Wird das Leistungsspektrum noch über den gesamten Frequenzbereich normiert

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_0^2}{8\pi} \frac{\text{const.}}{\left(\frac{1}{2\tau_S}\right)^2 + (\omega - \omega_0)^2} d\omega \stackrel{!}{=} P_0 \quad \Rightarrow \quad \text{const.} = \frac{4}{\tau E_0^2} P_0. \quad (2.4)$$

Wird jetzt noch die mittlere Lebensdauer  $\tau_S$  des Zustandes mit der Linienbreite  $\Delta\omega = 1/\tau_S$  identifiziert ergibt sich das Leistungsspektrum zu

$$P(\omega) = \frac{P_0}{2\pi} \frac{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2}{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + (\omega - \omega_0)^2}. \quad (2.5)$$

**Aufgabe 2:** Betrachten Sie ein Ensemble metastabiler Heliumatome ( $2^1S_0$ ) in einer Gasentladungszelle. Licht kann zwischen  $2^1S_0$  ( $166272 \frac{1}{\text{cm}}$ ) und  $3^1P_1$  ( $186204 \frac{1}{\text{cm}}$ ) absorbiert werden. Die Lebenszeiten der Niveaus sind  $\tau(3^1P_1) = 1,4 \text{ ns}$  und  $\tau(2^1S_0) = 1 \text{ ms}$ .

- Welche Wellenlänge entspricht diesem Übergang und wie groß ist die natürliche Linienbreite?
- Berechnen Sie die Absorption einer monochromatischen Welle im Verhältnis zur Spitzenabsorption  $\alpha_0$  für den Fall, dass die emittierte Wellenlänge  $0,07 \text{ nm}$  kleiner ist und dies der einzige Verbreiterungsmechanismus ist.
- Berechnen Sie die Dopplerlinienbreite bei  $800 \text{ K}$  und wiederholen Sie b) unter der Annahme, dass Dopplerverbreiterung der einzige Verbreiterungsmechanismus ist.
- Ein kollimierter Strahl solcher Atome (der Düsendurchmesser sei  $50 \mu\text{m}$ , der Abstand Düse-Kollimationsblende  $d = 10 \text{ cm}$ , die Breite der Blende  $b = 1 \text{ mm}$ ) wird hinter der Blende senkrecht mit einem monochromatischen, durchstimmbaren Laser bestrahlt. Wie groß ist die restliche Dopplerbreite der Absorptionslinie?

a.) Lösung: Die Energie des Übergangs ist proportional zur Differenz der Wellenzahlen

$$\bar{\nu} = \bar{\nu}_1 - \bar{\nu}_2 = 186204 \frac{1}{\text{cm}} - 166272 \frac{1}{\text{cm}} = 19932 \frac{1}{\text{cm}}. \quad (2.6)$$

Diese Wellenzahl entspricht einer Wellenlänge  $\lambda = 1/\bar{\nu} = 501,7 \text{ nm}$ . Die natürliche Linienbreite des Übergangs ergibt sich mit der mittleren Lebensdauer der oberen Zustände zu

$$\Delta E = \frac{\hbar}{\tau(3^1P_1)} = 4,7 \cdot 10^{-7} \text{ eV}. \quad (2.7)$$

b.) Lösung: Das gemessene Spektrum einer Absorptionslinie repräsentiert quantitativ die Anzahl an gezählten Photonen der Frequenz  $\omega$  pro Fläche und Zeitintervall. Somit bildet das Verhältnis der Intensitäten bei  $\omega_0$  und dem verschobenen Photon das gesuchte Absorptionsverhältnis.

Für  $\lambda' = 501,63 \text{ nm}$  lässt sich die Frequenz  $\omega' = 3,755 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$  bestimmen. Mit  $\omega_0 = 3,75454 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$  und  $1/\tau = \Delta\omega = 7,143 \cdot 10^8 \text{ Hz}$  ergibt sich für das Verhältnis

$$\frac{P(\omega')}{P(\omega_0)} \stackrel{(3.5)}{=} \frac{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2}{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + (\omega' - \omega_0)^2} = 4,1 \cdot 10^{-7}. \quad (2.8)$$

Dieses Ergebnis ist auch zu erwarten, da die Frequenzverschiebung zwei Größenordnungen über der natürlichen Linienbreite liegt.

c.) Lösung: Die Dopplerlinienbreite ist nach der Vorlesung gegeben als

$$\Delta\nu_D = \frac{2\nu_{12}}{c} \sqrt{\frac{2k_B T \ln 2}{m}}, \quad (2.9)$$

wobei für  $\Delta\omega_D$  die Übergangsfrequenz  $\nu_{12}$  durch die Kreisfrequenz  $\omega_0$  ersetzt wird. Es ergibt sich dann

$$\Delta\omega_D = \frac{2\omega_0}{c} \sqrt{\frac{2k_B 800 \text{ K} \ln 2}{4u}} = 3,803 \cdot 10^{10} \text{ Hz}. \quad (2.10)$$

Für die Dopplerverbreiterung ist das Leistungsspektrum nach der Vorlesung gegeben als

$$P(\omega) \propto \exp \left[ -4 \ln 2 \left( \frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega_D} \right)^2 \right]. \quad (2.11)$$

Somit ergibt sich das Absorptionsverhältnis zu

$$\frac{P(\omega')}{P(\omega_0)} = \frac{\exp \left[ -4 \ln 2 \left( \frac{\omega' - \omega_0}{\Delta\omega_D} \right)^2 \right]}{\exp \left[ -4 \ln 2 \left( \frac{\omega_0 - \omega_0}{\Delta\omega_D} \right)^2 \right]} = \exp \left[ -4 \ln 2 \left( \frac{\omega' - \omega_0}{\Delta\omega_D} \right)^2 \right] = 5 \cdot 10^{-263}. \quad (2.12)$$

Dieser Wert gilt nur für die Annahme, dass die Dopplerverbreiterung der einzige Mechanismus der Verbreiterung ist. Da die Gaußverteilung extrem schnell abfallende Flügel hat, sinkt die Absorptionsrate für größere Abweichungen von der Übergangsfrequenz deutlich schneller ab, als bei dem Lorentz-Profil der natürlichen Linienbreite. Somit ergibt sich eine viel geringere Absorptionsrate, obwohl die Linienbreite fast zwei Größenordnungen größer ist.

d.) Lösung: Für einen kollimierten Strahl mit Öffnungswinkel  $\varphi$  ergibt sich eine reduzierte Dopplerbreite, die um den Tangens des Öffnungswinkels reduziert ist<sup>3</sup>. Der Öffnungswinkel des durch die Kollimationsblende austretenden Strahls lässt sich mithilfe der nebenstehenden Abbildung geometrisch berechnen.

Dabei wird angenommen, dass nur die Atome die Blende passieren, für die die vertikale Geschwindigkeitskomponente die Bedingung

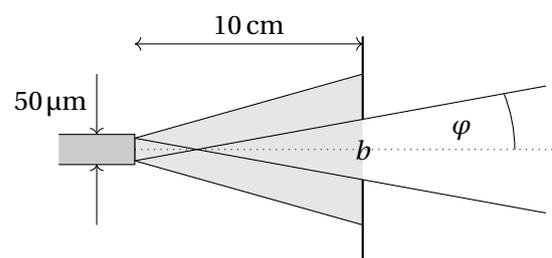
$$v_{\perp} < v_{\parallel} \cdot \tan \varphi \quad (2.13)$$

erfüllt. Die Größe  $\tan \varphi$  lässt sich durch das Verhältnis

$$\tan \varphi = \frac{D_{\text{Düse}} + b}{2d} = 0,00525 \quad (2.14)$$

angeben. Damit ergibt sich die reduzierte Dopplerbreite zu

$$\Delta\omega' = \tan \varphi \Delta\omega = 0,00525 \cdot 6,05 \cdot 10^9 \text{ Hz} = 3,42 \cdot 10^7 \text{ Hz}. \quad (2.15)$$



<sup>3</sup>Wolfgang Demtröder. Experimentalphysik 3: Atome, Moleküle und Festkörper. Springer-Verlag, 2016. Seite 343

**Aufgabe 3:** Wir betrachten Gasatome der Masse  $m$ , welche sich bei einer Temperatur  $T$  im thermodynamischen Gleichgewicht befinden. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Geschwindigkeitskomponenten  $v$  entlang einer bestimmten Richtung kann durch die Gauss-Verteilung beschrieben werden:

$$p(v) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right). \quad (2.16)$$

Aufgrund des Doppler-Effekts wird nun die Spektrallinie  $F(v)$  jedes Atoms in Abhängigkeit von  $v$  verschoben. Die entsprechende neue Spektrallinie ergibt sich zu  $F[v - v_0(1 + \frac{v}{c})]$ . Durch Integration über alle Geschwindigkeiten und Wichtung mit der Geschwindigkeitsverteilung ist es möglich, eine gemittelte, verbreiterte Linienfunktion zu definieren:

$$\bar{F}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} F\left[v - v_0\left(1 + \frac{v}{c}\right)\right] p(v) dv. \quad (2.17)$$

- a) Berechnen Sie  $\delta F(v)$  für den Fall, dass die natürliche Linienbreite jedes Atoms viel schmäler als die Standardabweichung der Doppler-Verschiebung ist. In diesem Fall kann  $F(v)$  jedes Atoms durch eine Delta-Funktion genähert werden.
- b) Berechnen Sie die FWHM-Breite der Doppler-verbreiterten Linienfunktion.

a.) **Lösung:** Für das Integral einer Delta-Funktion gilt im Allgemeinen der Zusammenhang

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f(x)) g(x) dx = \sum_{\alpha} \frac{1}{|f'(x_{\alpha})|} g(x_{\alpha}), \quad (2.18)$$

wobei  $x_{\alpha}$  die einfachen Nullstellen der Funktion  $f(x)$  sind. In der Aufgabe lässt sich  $f(v)$  identifizieren als

$$f(v) = v - v_0\left(1 + \frac{v}{c}\right), \quad v_0 = c\left(\frac{v}{v_0} - 1\right). \\ \frac{df}{dv} = -\frac{v_0}{c}. \quad (2.19)$$

Mit diesen beiden Resultaten lässt sich das Integral (2.17) direkt lösen

$$\bar{F}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left[v - v_0\left(1 + \frac{v}{c}\right)\right] p(v) dv = \frac{1}{|f'(v)|} p(v_0) \\ = \frac{c}{v_0} \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \exp\left(-\frac{mc^2}{2k_B T} \left(\frac{v}{v_0} - 1\right)^2\right). \quad (2.20)$$

b.) Lösung: Zur Bestimmung der Halbwertsbreite von  $\bar{F}(\nu)$  wird die Frequenz gesucht, bei der die Funktion auf die Hälfte des Maximalwertes abgefallen ist, der bei  $\nu = \nu_0$  liegt

$$\frac{\bar{F}(\nu)}{\bar{F}(\nu_0)} = \exp\left(-\frac{mc^2}{2k_B T} \left(\frac{\nu}{\nu_0} - 1\right)^2\right) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}. \quad (2.21)$$

Diese Gleichung lässt sich nach  $\nu - \nu_0 = \Delta\nu$  auflösen

$$\begin{aligned} -\frac{mc^2}{2k_B T} \left(\frac{\nu}{\nu_0} - 1\right)^2 &= -\ln 2 \\ \Rightarrow \left(\frac{\Delta\nu}{\nu_0}\right)^2 &= \ln 2 \frac{2k_B T}{mc^2} \\ \Rightarrow \text{FWHM} = 2\Delta\nu &= 2\nu_0 \sqrt{\frac{2k_B T \ln 2}{mc^2}}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

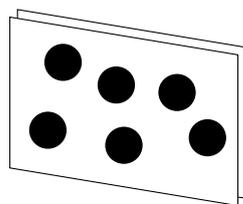
wobei die Halbwertsbreite sich als das Doppelte des Frequenzabstandes  $\Delta\nu$  ergibt.

### 3 Dritte Übungsserie

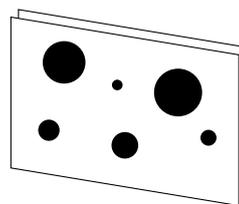
**Aufgabe 1:** In der Vorlesung haben wir die Interaktion zwischen Photonen und den Laser-aktiven Ionen in einem aktiven Medium mit der Hilfe einer wohldefinierten Fläche für jedes dieser Ionen betrachtet: dem Wirkungsquerschnitt.

- Zeichnen Sie schematisch die Absorptionswirkungsquerschnitte für mehrere Laser-aktive Ionen innerhalb eines Flächenelementes  $dA$  bei einer festen Wellenlänge für zwei unterschiedliche Fälle: ein homogen und ein inhomogen verbreitetes Medium.
- Erklären Sie qualitativ wie sich die individuellen Wirkungsquerschnitte mit der Wellenlänge in einem homogen und einem inhomogen verbreiteten Medium ändern.
- Stellen Sie sich ein homogen verbreitetes Medium mit  $1 \text{ cm}^2$  Fläche und  $1 \mu\text{m}$  Dicke vor. Wenn der Absorptionswirkungsquerschnitt der Atome  $2 \cdot 10^{21} \text{ m}^2$  bei  $633 \text{ nm}$  und die Konzentration der Laser-aktiven Ionen  $1,5 \cdot 10^{26} \frac{1}{\text{m}^3}$  ist, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit eines Photons absorbiert zu werden, wenn es dieses aktive Medium trifft?
- Ohne Betrachtung der spontanen Emission und unter der Annahme, dass die Laser-aktiven Ionen gleichmäßig im Medium verteilt sind, was ist die maximale Anzahl von Photonen, die bei gleichmäßiger Beleuchtung mit einer Lichtquelle mit  $1 \mu\text{W}$  bei  $633 \text{ nm}$  innerhalb einer Sekunde absorbiert werden kann. Wie ändert sich diese, wenn unsere Lichtquelle  $100 \text{ W}$  statt  $1 \mu\text{W}$  liefert? Erklären Sie Ihre Ergebnisse.

a.) **Lösung** Die beiden folgenden Abbildungen stellen den Absorptionswirkungsquerschnitt mehrerer Ionen für einen homogenen (links) und inhomogenen (rechts) Verbreiterungsmechanismus dar:



homogene Verbreiterung



inhomogene Verbreiterung

b.) **Lösung** Für einen homogen verbreitetes Medium ist der Absorptionswirkungsquerschnitt für alle Ionen für eine bestimmte Wellenlänge gleich. Das heißt, dass bei der Zentralfrequenz alle Ionen den maximalen Wirkungsquerschnitt aufweisen. Wird also die Resonanz durchgefahren, dann vergrößert sich für alle Ionen kontinuierlich der Absorptionswirkungsquerschnitt, erreicht beim Maximum der Resonanz ebenfalls sein Maximum und nimmt dann gleichmäßig wieder ab.

Bei einem inhomogen verbreiteten Material wächst der Absorptionswirkungsquerschnitt nicht gleichmäßig für alle Atome an. Wird die Absorptionslinie durchgefahren, dann werden

zunächst einige wenige Atome einen hohen Wirkungsquerschnitt aufweisen. Bei der Übergangsfrequenz ist dann die Summe der Wirkungsquerschnitte aller Ionen maximal, allerdings gilt dies nicht für die individuellen Atome.

c.) **Lösung** In diesem Aufgabenteil soll angenommen werden, dass die Fläche der Absorptionswirkungsquerschnitte in einem dreidimensionalen Medium auf eine Fläche projiziert werden soll. Die Abschwächung des Photonenflusses lässt sich allgemein beschreiben durch

$$d\Phi_v = -\alpha_v \Phi_v dx \quad \text{mit } \alpha_v = N\sigma_v. \quad (3.1)$$

Die Dichte der Laseraktiven Ionen  $N = 1,5 \cdot 10^{26} \frac{1}{\text{m}^3}$  lässt sich schreiben als Ionenzahl  $n$  pro Fläche und Dicke der Probe. Damit ergibt sich

$$d\Phi_v = -\frac{n}{dA dx} \sigma_v d\Phi_v dx = -\frac{n}{dA} \sigma_v d\Phi_v. \quad (3.2)$$

Damit lässt sich das Verhältnis des absorbierten Photonenflusses  $d\Phi_v$  zum einfallenden Photonenfluss  $\Phi_v$  mit der Ionenzahl  $n$

$$n = N dV = 1,5 \cdot 10^{26} \frac{1}{\text{m}^3} \cdot 1 \text{ cm}^2 \cdot 1 \mu\text{m} = 1,5 \cdot 10^{16}$$

schreiben als

$$\frac{d\Phi_v}{\Phi_v} = -\frac{n}{dA} \sigma_v = -\frac{1,5 \cdot 10^{16}}{10^{-4} \text{ m}^2} 2 \cdot 10^{-21} \text{ m}^2 = -0,3. \quad (3.3)$$

Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Photon absorbiert wird 30 %.

Die hier benutzte Näherung, dass für die infinitesimalen Größen endliche Werte eingesetzt werden können, führt zu einem kleinen Fehler. Wird die Abschwächung des Lichtes nach dem Lambert-Beerschen Gesetz berechnet, ergibt sich für das Verhältnis der transmittierten Photonenflusses  $\Phi(x)$  zum einfallenden Photonenfluss  $\Phi(0)$

$$\frac{\Phi(x)}{\Phi(0)} = \exp(-\alpha x) = \exp(-\sigma N x) = \exp(-0,3) \approx 0,74. \quad (3.4)$$

Somit ergibt sich für das Gegenereignis, dass ein Photon absorbiert wird  $P_{\text{Absorption}} = 1 - 0,74 = 0,26$  eine Wahrscheinlichkeit von 26 %.

d.) **Lösung** Die vom Material absorbierte Leistung pro Volumenelement ergibt sich durch das Produkt der Änderungsrate der Ionendichte mit der absorbierten Photonenenergie:

$$\frac{dP}{dV} = -\frac{dN}{dt} h\nu. \quad (3.5)$$

Nach der Vorlesung ist ebenfalls bekannt, dass sich die im Volumenelement  $dV$  absorbierte Leistung angeben lässt als

$$\frac{dP}{dV} = N \cdot \sigma_v I_v = N \cdot \sigma_v \frac{P_v}{A}, \quad (3.6)$$

wobei  $A$  die vom Photonenstrahl beleuchtete Fläche ist. Durch Gleichsetzen von (3.5) und (3.6) ergibt sich eine Differentialgleichung für die Ionendichte im Medium

$$N \cdot \sigma_v \frac{P_v}{A} = -\frac{dN}{dt} h\nu \Rightarrow \underbrace{n dV}_{=N} = \underbrace{n_0 dV}_{=N_0} \exp\left(-\frac{\sigma_v P}{Ah\nu} t\right). \quad (3.7)$$

In diesem Modell wird davon ausgegangen, dass alle Ionen, die ein Photon absorbiert haben, für weitere Prozesse nicht zur Verfügung stehen, da Emissionsprozesse vernachlässigt werden. Wird nun für  $n_0 = 1.5 \cdot 10^{16}$  eingesetzt, ergibt sich für die Zahl angeregter Ionen, bzw. die Zahl absorbierter Photonen

$$n_{\text{photon}} = n_0 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\sigma_v P \lambda}{Ahc} t\right) \right] = 1.5 \cdot 10^{16} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{2 \cdot 10^{-21} \text{ m}^2 P \cdot 633 \text{ nm}}{1 \text{ cm}^2 hc} t\right) \right]. \quad (3.8)$$

Werden nun die verschiedenen Leistungen der Lichtquelle eingesetzt, ergibt sich:

$$\begin{aligned} n_{\text{photon}}(1 \mu\text{W}) &= 9.56 \cdot 10^{11} \\ n_{\text{photon}}(100 \text{ W}) &= 1.5 \cdot 10^{16}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Es zeigt sich also, dass für die hohe Pumpleistung von 100 W bereits alle Ionen im Medium vollständig angeregt sind und das Material gesättigt ist, während bei 1  $\mu\text{W}$  nur ein geringer Anteil der Ionen angeregt wurde.

Wird nun hingegen angenommen, dass alle Ionen instantan relaxieren, dann lässt sich die Photonenzahl einfach durch die absorbierte Energie in einer Sekunde geteilt durch die Photonenenergie bestimmen

$$n_{\text{photon}} = \frac{P \cdot 1 \text{ s} \cdot \lambda}{hc}. \quad (3.10)$$

Hier ergeben sich folgende Werte

$$\begin{aligned} n_{\text{photon}}(1 \mu\text{W}) &= 9.56 \cdot 10^{11} \\ n_{\text{photon}}(100 \text{ W}) &= 8.28 \cdot 10^{19}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Es zeigt sich, dass für die hohe Pumpleistung theoretisch mehr als tausend Mal so viele Ionen angeregt werden könnten, während sich der berechnete Wert für die niedrige Pumpleistung nicht vom berechneten Wert unterscheidet.

**Aufgabe 2:** Ein Glasstab mit 1 cm Länge und 1 cm Durchmesser ist Ytterbium-dotiert mit einer Konzentration von  $10^{19} \frac{1}{\text{cm}^3}$ . Der Absorptionswirkungsquerschnitt hat eine parabolische Form

$$\sigma_\nu = 2.3 \cdot 10^{-24} \left[ 1 - \left( \frac{\nu - \nu_0}{\frac{1}{2}\Delta\nu} \right)^2 \right] \text{m}^2, \quad (3.12)$$

mit dem Maximum bei 976 nm und einer Basisbreite von 10 nm (das ist die Bandbreite, in der  $\sigma_\nu \geq 0$ . Betrachten Sie  $\sigma_\nu = 0$  außerhalb dieser Region). Zwei unterschiedliche Lichtquellen sind zum Pumpen verfügbar.

- eine Laserdiode mit vernachlässigbarer Bandbreite bei 976 nm.
- eine gewöhnliche LED mit einem rechteckigen Spektrum zentriert bei 976 nm und einer Bandbreite von 50 nm.

Der Glasstab werde von einer seiner runden Endflächen gepumpt:

- Berechnen Sie den Absorptionskoeffizienten.
- Berechnen Sie, welcher Anteil des Lichtes beim Pumpen mit der Laserdiode absorbiert wird.
- Berechnen Sie, welcher Anteil des Lichtes beim Pumpen mit der LED absorbiert wird.
- Welche Vorteile ergeben sich durch Pumpen mit schmalbandigen Laserdioden im Vergleich zu breitbandigen Lichtquellen (z. B. Blitzlampen, LEDs,...)?
- Angenommen beide Pumpquellen liefern 1 mW Durchschnittsleistung und jedes absorbierte Photon führt zur Emission eines Signalphotons der Wellenlänge 1030 nm, berechnen Sie die Signalleistung für beide Pumpquellen unter Vernachlässigung von Sättigungseffekten.

**a.) Lösung** Der Absorptionskoeffizient ist proportional zur Dichte der absorbierenden Teilchen im Medium. Die Proportionalitätskonstante bildet genau der Wirkungsquerschnitt. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \alpha_\nu &= N \cdot \sigma_\nu = 10^{19} \frac{1}{\text{cm}^3} \cdot 2.3 \cdot 10^{-24} \left[ 1 - \left( \frac{\nu - \nu_0}{\frac{1}{2}\Delta\nu} \right)^2 \right] \text{m}^2 \\ &= 23 \left[ 1 - \left( \frac{\nu - \nu_0}{\frac{1}{2}\Delta\nu} \right)^2 \right] \frac{1}{\text{m}}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

**b.) Lösung** Um den Anteil des von der Laserdiode absorbierten Lichtes zu berechnen, wird das Lambert-Beersche Absorptionsgesetz genutzt. Dafür wird angenommen, dass sich der Anteil der absorbierten Strahlung ergibt zu

$$\frac{I_{\text{Abs.}}}{I_\nu(0)} = 1 - \frac{I_\nu(x)}{I_\nu(0)}. \quad (3.14)$$

Da die Laserdiode eine vernachlässigbare Bandbreite besitzt, kann für den Absorptionskoeffizienten einfach der Wert von  $\alpha$  bei der Zentralwellenlänge genutzt werden

$$\frac{I_v(x)}{I_v(0)} = \exp(-\alpha_v(\nu_0)x). \quad (3.15)$$

Damit ergibt sich der absorbierte Anteil zu

$$\frac{I_{\text{Abs.}}}{I_v(0)} = 1 - \exp\left(-23 \frac{1}{\text{m}} \cdot 0,1 \text{ m}\right) = 0.9. \quad (3.16)$$

Es wird also 90 % des einfallenden Lichtes absorbiert.

**c.) Lösung** Für die Absorption der LED, muss bei der Berechnung der Intensitäten über alle Wellenlängen integriert werden. Da unter der Annahme, dass die LED ein rechteckiges Spektrum mit  $\delta\lambda = 50 \text{ nm}$  aufweist, aufgrund des schmalen Wirkungsquerschnitts des dotierten Glasstabs nur 20 % des einfallenden Lichtes überhaupt absorbierbar ist, wird von diesem Anteil noch der Restanteil gesucht, welcher tatsächlich absorbiert wird. Es werden einige Größen eingeführt:

$$\begin{aligned} \nu_- &= \frac{c}{\lambda_0 + 5 \text{ nm}} = 305,599 \text{ THz} \\ \nu_+ &= \frac{c}{\lambda_0 - 5 \text{ nm}} = 308,746 \text{ THz} \\ \Delta\nu &= c\left(\frac{1}{971 \text{ nm}} - \frac{1}{981 \text{ nm}}\right) = 3,147 \text{ THz}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Die gesamte transmittierte Intensität lässt sich nun durch Integration berechnen:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_{\nu_-}^{\nu_+} I_v(x) d\nu = \int_{\nu_-}^{\nu_+} \frac{I_0}{\Delta\nu} \exp\left(-2.3 \left[1 - \left(\frac{\nu - \nu_0}{\frac{1}{2}\Delta\nu}\right)^2\right]\right) d\nu \\ &= \int_{305,599 \text{ THz}}^{308,746 \text{ THz}} \frac{I_0}{4,147 \text{ THz}} \exp\left(-2.3 \left[1 - \left(\frac{\nu - 307,164 \text{ THz}}{0.5 \cdot 4,147 \text{ THz}}\right)^2\right]\right) d\nu \\ &= 0.279 \cdot I_0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Damit ergibt sich der insgesamt absorbierte Anteil zu

$$\frac{I_{\text{Abs.}}}{I_v(0)} = 0.2 \cdot \left(1 - \frac{I(x)}{I_0}\right) = 0.144. \quad (3.19)$$

Aus dem Bereich, in dem das Medium einen Absorptionswirkungsquerschnitt  $\sigma_\nu > 0$  aufweist, wird 78 % absorbiert, betrachten wir jedoch den gesamten Strahlungsbereich der LED, dann sind es nur 14,4 %.

**d.) Lösung** Die Rechnung in Teilaufgabe c.) hat gezeigt, dass beim Pumpen mit schmalbandigen Laserdioden der gesamte Spektralbereich der Emission genutzt werden kann. Liegt dieser Bereich ebenfalls in einem Frequenzintervall mit einem hohen Absorptionswirkungsquerschnitt, dann lässt sich im laseraktiven Medium eine Absorptionsrate von 90 % erreichen. Bei breitbandigen Lichtquellen, lässt sich nur ein geringer Teil der emittierten Strahlung überhaupt für den Pumpprozess nutzen.

e.) **Lösung** Können Sättigungseffekte vernachlässigt werden, dann kann die absorbierte Leistung direkt über den Anteil des absorbierten Lichts und der Photonenenergie berechnet werden. Die Anzahl absorbiertes Photonen pro Zeitintervall ergibt sich zu

$$\frac{dn}{dt} = \frac{P_{\text{abs.}}}{h\nu_{\text{laser}}}. \quad (3.20)$$

Wird nun von jedem angeregten Teilchen ein neues Photon erzeugt, dann ergibt sich die emittierte Leistung zu

$$P_{\text{emmit.}} = \frac{dn}{dt} h\nu_{\text{neu}} = P_{\text{abs.}} \frac{h\nu_{\text{neu}}}{h\nu_{\text{laser}}} = P_{\text{abs.}} \frac{\lambda_{\text{laser}}}{\lambda_{\text{neu}}}. \quad (3.21)$$

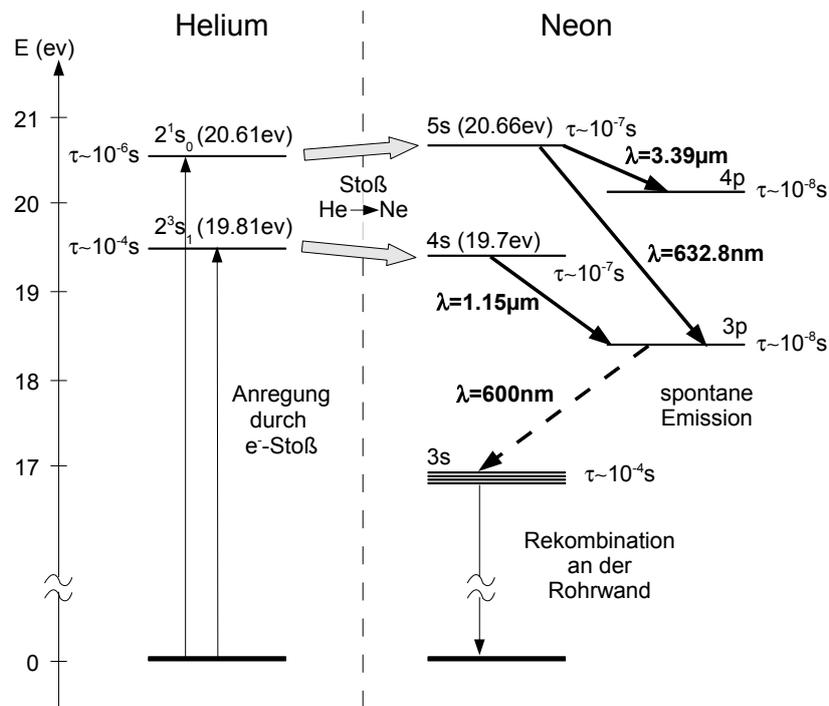
Damit ergibt sich die emittierte Leistung für die beiden Pumpsysteme zu

$$\text{Diode: } P_{\text{emitt}} = 0.9 \cdot 1 \text{ mW} \frac{976 \text{ nm}}{1030 \text{ nm}} = 853 \mu\text{W} \quad (3.22)$$

$$\text{LED: } P_{\text{emitt}} = 0.144 \cdot 1 \text{ mW} \frac{976 \text{ nm}}{1030 \text{ nm}} = 136,5 \mu\text{W}. \quad (3.23)$$

## 4 Vierte Übungsserie

**Aufgabe 1:** Ein He-Ne Laser ist aus einer langen und schmalen Entladungsröhre aufgebaut, welche mit Helium- und Neonatomen gefüllt ist (meistens in einem Verhältnis von 10:1). Der Gasdruck ist typischerweise im Bereich von 1 mbar. Das Energieniveauschema des He-Ne Lasers ist: Typischerweise wird dieser Lasertyp durch elektrische Entladung bei einer Span-



nung von 1,5 kV gepumpt. Es sind nur die Neonatome an der Laseremission beteiligt.

- Erklären Sie mit Hilfe des gezeigten Energieniveauschemas, warum ein direktes Pumpen der Neonatome ineffizient wäre.
- Was ist die Aufgabe der Heliumatome? Wie lösen die Heliumatome das Problem des ineffizienten Pumpens der Neonatome?
- Warum wird ein Gasgemisch mit mehr Helium- als Neonatomen benutzt?
- Im Neonatom ist das 5s Niveau energetisch höher als das  $2^1s_0$  Niveau im Heliumatom. Wo kommt die zusätzliche Energie her, welche den Energietransfer zwischen diesen beiden Niveaus ermöglicht? Ebenfalls ist das  $2^3s_1$  Niveau im Helium energetisch höher als das 4s Niveau im Neon. Wohin geht die überschüssige Energie bei einem Energietransfer zwischen den beiden Niveaus?
- Warum erhöht sich die Verstärkung, wenn der Durchmesser der Entladungsröhre verringert wird?
- Was ist der dominierende Verbreiterungsmechanismus in diesem Lasertyp und warum?

a.) **Lösung:** Ein direktes Pumpen der Neonatome ist recht ineffizient, da sich hierbei ein Drei-Niveau-System ergäbe, wo das oberste Laserniveau direkt das Niveau ist, von dem der Übergang stattfindet. Für ein Drei-Niveau System müssen mehr als 50 % der Atome in einem angeregten Zustand sein, damit Besetzungsinversion auftreten kann. Das Problem ist nun jedoch, dass deshalb die Übergangswahrscheinlichkeit vom Grundzustand zum metastabilen Niveau (5s oder 4s) durch Elektronenstoß im Neon größer sein muss, als die Emissionsrate in den Grundzustand. Da sich Neon nicht so leicht durch Elektronenstöße anregen lässt, ist die Situation nicht gegeben und es kann keine Besetzungsinversion aufgebaut werden.

b.) **Lösung:** Durch Anlegen der Hochspannung entstehen durch Gasentladung freie Elektronen. Bei dem He-Ne-Laser werden nun durch Elektronenstoß Heliumatome in metastabile Zustände angeregt. Dies ist deshalb notwendig, da der Absorptionswirkungsquerschnitt für die Stoßanregung durch Elektronen im Neon recht klein ist. Durch Stöße zweiter Art zwischen Helium und Neon kommt es zum Energieübergang auf das Neon. Es lässt sich also feststellen dass der Einsatz der Heliumatome zu einer größeren Absorptionswahrscheinlichkeit führt und aufgrund des metastabilen Zustandes die Energie in diesem Niveau lange halten kann.

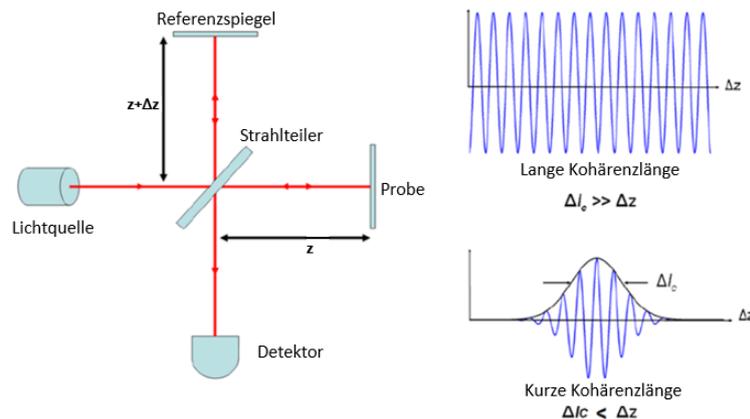
c.) **Lösung:** Damit eine genügend hohe Besetzungsinversion im Neon erreicht wird, muss genügend Helium vorhanden sein, damit ein Neonatom im Grundzustand schnellstmöglich angeregt wird. Deshalb wird bei der Herstellung des Gasgemischs ein größerer Anteil an Helium benutzt. Das Mischungsverhältnis bestimmt weiterhin die gewünschte Laserlinie. Für die rote Laserlinie wird meist ein Verhältnis 5:1 benutzt, während für die infraroten Linien ein Verhältnis von 10:1 verwendet wird.

d.) **Lösung:** Die Energieniveaus der durch Elektronenstoß angeregten Heliumatome liegen sehr nah an denen des Neons. Trifft nun ein angeregtes Helium auf ein im Grundzustand befindliches Neonatom, so kann es seine gesamte Anregungsenergie auf das Neonatom übertragen. Die kleine Energiedifferenz wird durch die kinetische Energie des Heliumatoms ausgeglichen. Das ist deshalb möglich, da die Energiedifferenz der in der gleichen Größenordnung liegt wie die thermischen Energie der Gasatome  $k_B T \approx 26 \text{ meV}$ . Für das energetisch höhere Helium im  $2^3s_1$  Niveau wird die zusätzliche Energie in Form von kinetischer Energie des Heliums umgesetzt.

e.) **Lösung:** Zur Entvölkerung des 3s Niveaus ist ein Alternativprozess zur spontanen Emission nötig, da die Lebensdauer des 3s Niveaus mit  $\tau \sim 10^{-4} \text{ s}$  recht groß ist. Dafür wird die Rekombination an der Rohrwand genutzt. Damit ein kontinuierlicher Laserbetrieb möglich ist, muss das untere Laserniveau schneller geleert werden als obere Laserniveau des Neons.

f.) **Lösung:** Die Spektrallinie des Neons wird durch Stoßverbreiterung und Dopplerverbreiterung verbreitert. Hierbei dominiert jedoch die inhomogene Dopplerverbreiterung, da der Druck in der Gasentladungsröhre des Lasers gering ist und somit die Druckverbreiterung nur einen geringen Einfluss hat.

**Aufgabe 2:** Mittels Optischer Kohärenztomografie (OCT) kann ein tiefenaufgelöstes Bild einer Probe (z. B. der menschlichen Netzhaut) erzeugt werden. Das Prinzip der OCT ist unten schematisch dargestellt. Dabei wird Licht einer Quelle in einem Michelson-Interferometer in zwei Strahlengänge aufgeteilt. Der erste Strahl (im Messarm) wird an der Probe reflektiert und der zweite Strahl am Referenzspiegel. Anschließend werden beide Strahlen wieder überlagert und treffen auf eine Photodiode. Dort kommt es nur zu einer kontrastreichen Interferenz, wenn die Weglängen in Mess- und Referenzarm gleich sind. Durch axiales Verfahren des Referenzspiegels wird eine Information aus unterschiedlichen Tiefen der Probe gewonnen. Gege-



ben seien folgende drei Lichtquellen:

1. Eine Superlumineszenzdiode (SLD) mit einer Zentralwellenlänge von 950 nm und einer spektralen Bandbreite (FWHM) von 40 nm.
2. Ein gepulster Ti:Sa-Laser (Ti<sup>3+</sup>:Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-Laser) mit einer Zentralwellenlänge von 835 nm, einer Bandbreite von 90 nm und einer Pulslänge von 45 fs.
3. Ein Neodym-dotierter Yttrium-Aluminium-Granat Laser (Nd:YAG) mit einer Zentralwellenlänge von 1064 nm und einer spektralen Bandbreite von 40 kHz.

Lösen Sie folgende Aufgaben:

- a) Berechnen Sie die Kohärenzlänge der drei Lichtquellen. Welche Quelle würde die beste longitudinale Auflösung in einem OCT Experiment generieren? Begründen Sie Ihre Antwort.
- b) Das Licht der Quellen wird mit einer Linse der Brennweite  $f$  und einer freien Apertur von 25 mm auf eine Probe fokussiert. In der Linsenebene besitzen die SLD, der Ti:Sa-Laser und der Nd:YAG-Laser folgende transversale Kohärenzlängen: 12 mm, 18 mm und 100 mm. Welche der Quellen würde die beste laterale Auflösung bieten?
- c) Das Epithelgewebe, welches die Lungenbläschen der menschlichen Lunge umgibt hat eine Dicke zwischen 100  $\mu\text{m}$  und 80  $\mu\text{m}$ . Mithilfe der OCT kann ein nicht invasiver Querschnitt des Gewebes erzeugt werden, welcher zur Früherkennung von Krebs genutzt wird. Welche der gegebenen Lichtquellen wäre für diese Anwendung am besten geeignet? Welche weiteren praktischen Überlegungen würden Sie anstellen, um eine geeignete Laserquelle auszuwählen.

a.) **Lösung:** Nach der Vorlesung ist die zeitliche Kohärenzlänge gegeben als

$$l_c = \tau_c \cdot c = \frac{c}{\Delta\nu}, \quad (4.1)$$

wobei  $\Delta\nu$  die Frequenzbreite angibt. Für eine gegebene spektrale Bandbreite  $\Delta\lambda$  für eine Zentralwellenlänge  $\lambda_0$  lässt sich die Frequenzbreite berechnen zu

$$\Delta\nu = c \left( \frac{1}{\lambda - \Delta\lambda/2} - \frac{1}{\lambda + \Delta\lambda/2} \right), \quad (4.2)$$

womit dann für die Kohärenzlänge gilt

$$l_c = \frac{c}{\Delta\nu} = \left( \frac{1}{\lambda - \Delta\lambda/2} - \frac{1}{\lambda + \Delta\lambda/2} \right)^{-1} = \frac{\lambda^2 - (\Delta\lambda)^2/4}{\Delta\lambda}. \quad (4.3)$$

Wir können die Formel nun nutzen, um die Kohärenzlängen für die ersten beiden Lichtquellen zu berechnen:

$$l_c(1) = \frac{950 \text{ nm} - (40 \text{ nm})/4}{40 \text{ nm}} = 22,55 \mu\text{m} \quad (4.4)$$

$$l_c(2) = \frac{835 \text{ nm} - (45 \text{ nm})/4}{45 \text{ nm}} = 7,72 \mu\text{m}. \quad (4.5)$$

Für die dritte Lichtquelle können wir die Kohärenzlänge direkt über (4.1) bestimmen

$$l_c(3) = \frac{c}{40 \text{ kHz}} = 7495 \text{ m}. \quad (4.6)$$

Es zeigt sich, dass der Yttrium-Aluminium-Granat Laser mit Abstand die größte Kohärenzlänge aufweist. Für die Tiefenauflösung im Gewebe ist die Kohärenzlänge wesentlich entscheidend. Für hohe Kohärenzlängen ändert sich die Auflösung sehr gering, da sich die Interferenz für verschiedene Schichttiefen nicht ändert. Daher eignet sich eine kleine Kohärenzlänge besser, weshalb hier die zweite Quelle (gepulster Ti:Sa-Laser) verwendet werden sollte.

b.) **Lösung:** Für einen Lichtstrahl dessen Kohärenzlänge kleiner ist als der Linsendurchmesser, wird die entstehende Spotgröße aufgrund der begrenzten räumlichen Kohärenz um den Faktor  $D/l_c$  vergrößert. Somit lässt sich die beste laterale Auflösung mit der dritten Lichtquelle erreichen, da hier die transversale Kohärenzlänge größer ist, als der durch die Apertur (= 25 mm) begrenzte Strahldurchmesser. Für kleinere Aperturen  $D < l_c$  ergibt sich kein Unterschied in der lateralen Auflösung.

c.) **Lösung** Für eine nichtinvasive Gewebsuntersuchung sollte eine Laserquelle verwendet werden, die nicht zu viel Energie auf das Gewebe überträgt, was sonst zur Schädigung führen könnte. Dafür bietet sich die Superlumineszenzdiode an, da hier noch kein Laserbetrieb mit hoher Intensität stattfindet. Zudem ist die zeitliche Kohärenzlänge klein genug um das dünne Gewebe zu untersuchen. Zur Wahl einer geeigneten Laserquelle muss also beachtet werden, dass bei Früherkennungsuntersuchungen das lebende Gewebe nicht zerstört wird, weshalb sich hierbei ebenfalls auch ein gepulster Laser mit hoher Intensität aber geringer mittlerer Energie eignen würde (Ti:Sa-Laser). Weiterhin ist eine geringe zeitliche Kohärenz und eine große laterale (räumliche) Kohärenz erstrebenswert.

**Aufgabe 3:** Die frequenzabhängige Verstärkung in einem Medium der Dicke  $d$  ist gegeben durch:  $G(\nu) = \exp[g(\nu)d]$

- a) Nehmen Sie an, dass eine Gaußförmige Verbreiterung des Verstärkungskoeffizienten  $g(\nu) = \sigma(\nu)n$  vorliegt. Zeigen Sie, dass sich die Verstärkungsbandbreite  $\Delta\nu_G$  auf

$$\Delta\nu_G = \Delta\nu_g \frac{1}{\sqrt{\ln G(\nu_0)}} \quad (4.7)$$

reduziert, wobei  $n$  der Inversionsdichte und  $\Delta\nu_g$  der Bandbreite der Verstärkungskoeffizienten entspricht. Hinweis:  $\ln(1-x) \approx -x$ .

- b) Nun sei eine parabolische Spektralverteilung des Wirkungsquerschnitts  $\sigma(\nu)$  gegeben:

$$\sigma(\nu) = a - \sigma_0 \left[ \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu} \right]^2 \quad (4.8)$$

(gültig für  $|\nu| < \nu_0 + \Delta\nu \cdot \sqrt{\frac{a}{\sigma_0}}$ ). Vernachlässigen Sie Sättigungseffekte und berechnen Sie den Verstärkungsfaktor  $G(\nu)$  und die FWHM-Bandbreite  $\Delta\nu_G$  für einen einzelnen Durchgang durch das Verstärkermedium.

- c) Berechnen Sie die spektrale Bandbreite des Ausgangssignals  $\Delta\nu_{\text{out}}$  nach einem Durchgang durch das Verstärkermedium aus Aufgabenteil b.). Nehmen Sie hierfür ein Gaußförmiges Eingangsspektrum

$$I_\nu(0) = I_0 \exp \left[ -4 \ln 2 \left( \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_{\text{in}}} \right)^2 \right] \quad (4.9)$$

mit der FWHM-Bandbreite  $\Delta\nu_{\text{in}}$  an. Zur Vereinfachung können sie zusätzlich annehmen, dass die Verstärkungsbandbreite für einen Durchgang  $\Delta\nu_G$  doppelt so breit ist wie die Eingangsbandbreite  $\Delta\nu_{\text{in}}$ .

- d) Wie verändert sich die spektrale Ausgangsbandbreite  $\Delta\nu_{\text{out},m}$  nach dem Durchlaufen von  $m$  identischen Verstärkermedien?

a.) **Lösung:** Wird eine gaußförmige Verteilung des Verstärkungskoeffizienten angenommen, dann gilt

$$g(\nu) = \sigma(\nu)n = n\sigma_0 \exp \left[ -4 \ln 2 \left( \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_g} \right)^2 \right]. \quad (4.10)$$

Wir können nun die Verstärkung  $G(\nu)$  schreiben als

$$G(\nu) = \exp(\sigma(\nu)n \cdot d) = \exp \left\{ n \cdot d \cdot \sigma_0 \exp \left[ -4 \ln 2 \left( \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_g} \right)^2 \right] \right\}. \quad (4.11)$$

Wir führen die Verstärkung nun auf eine Gaußförmige Verteilung zurück und bestimmen die Halbwertbreite  $\Delta\nu_G$ . Dafür nähern wir die Exponentialfunktion für kleine Argumente

$$\exp(-x) \approx 1 - x$$

$$\begin{aligned} G(\nu) &= \exp \left[ n \cdot d \cdot \sigma_0 \left( 1 - 4 \ln 2 \left( \frac{\nu - \nu_0}{\Delta \nu_g} \right)^2 \right) \right] \\ &= \exp(n d \sigma_0) \exp \left[ -4 n d \sigma_0 \ln 2 \left( \frac{\nu - \nu_0}{\Delta \nu_g} \right)^2 \right] \\ &= \exp(n d \sigma_0) \exp \left[ -4 \ln 2 \left( \frac{\nu - \nu_0}{\frac{\Delta \nu_g}{\sqrt{n d \sigma_0}}} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Wir sehen nun durch Vergleichen mit einer Gaußverteilung der Halbwertsbreite  $\Delta \nu_G$ , dass folgendes gelten muss:

$$\Delta \nu_G = \frac{\Delta \nu_g}{\sqrt{n d \sigma_0}}. \quad (4.13)$$

Um nun die gesuchte Relation zu verifizieren betrachten wir

$$G(\nu_0) = \exp(n d \sigma_0) \Rightarrow \ln G(\nu_0) = n d \sigma_0, \quad (4.14)$$

woraus direkt durch Einsetzen in (4.13) folgt

$$\Delta \nu_G = \frac{\Delta \nu_g}{\sqrt{\ln G(\nu_0)}}. \quad (4.15)$$

**b.) Lösung:** Für die parabolische Spektralverteilung ergibt sich die Verstärkung  $G(\nu)$  in einem Medium der Dicke  $d$  direkt zu

$$\begin{aligned} G(\nu) &= \exp(\sigma(\nu) n d) = \exp \left[ n d \left( a - \sigma_0 \left( \frac{\nu - \nu_0}{\Delta \nu} \right)^2 \right) \right] \\ &= \underbrace{\exp(n d a)}_{G(\nu_0)} \exp \left[ -n d \sigma_0 \left( \frac{\nu - \nu_0}{\Delta \nu} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Für eine allgemeine Gaußverteilung der FWHM-Halbwertsbreite  $\Delta x$  gilt

$$f(x) = \exp \left( -4 \ln 2 \left( \frac{x - x_0}{\Delta x} \right)^2 \right), \quad \text{weil } f(x_0 + \Delta x/2) = \exp \left( -4 \ln 2 \left( \frac{1}{2} \right)^2 \right) = \frac{1}{2}. \quad (4.17)$$

Es muss daher folgende Beziehung für (4.16) gelten:

$$\begin{aligned} n d \sigma_0 \frac{1}{(\Delta \nu)^2} &= \frac{4 \ln 2}{(\Delta \nu_G)^2} \\ (\Delta \nu_G)^2 &= (\Delta \nu)^2 \frac{4 \ln 2}{n d \sigma_0} \Rightarrow \Delta \nu_G = 2 \Delta \nu \sqrt{\frac{\ln 2}{n d \sigma_0}}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

c.) **Lösung:** Für die Intensität nach einmaligem Durchgang durch das Verstärkermedium ergibt sich

$$I_\nu(d) = G(\nu) I_\nu(0) \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{\exp(n d a)}_{G(\nu_0)} I_0 \exp \left[ -4 \ln 2 \left( \frac{\nu - \nu_0}{\Delta \nu_{\text{in}}} \right)^2 \right] \exp \left[ -4 \ln 2 \left( \frac{\nu - \nu_0}{\Delta \nu_G} \right)^2 \right] \\ &= G(\nu_0) I_0 \exp \left[ -4 \ln 2 (\nu - \nu_0)^2 \left( \frac{1}{(\Delta \nu_{\text{in}})^2} + \frac{1}{(\Delta \nu_G)^2} \right) \right] \\ &= G(\nu_0) I_0 \exp \left[ -4 \ln 2 (\nu - \nu_0)^2 \left( \frac{1}{(\Delta \nu_{\text{in}})^2} + \frac{1}{(2\Delta \nu_{\text{in}})^2} \right) \right] \\ &= G(\nu_0) I_0 \exp \left[ -4 \ln 2 (\nu - \nu_0)^2 \underbrace{\left( \frac{5}{4(\Delta \nu_{\text{in}})^2} \right)}_{1/(\Delta \nu_{\text{out}})^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Damit ergibt sich die Bandbreite des Ausgangssignals zu

$$(\Delta \nu_{\text{out}})^2 = \frac{4}{5} (\Delta \nu_{\text{in}})^2 \Rightarrow \Delta \nu_{\text{out}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Delta \nu_{\text{in}}. \quad (4.21)$$

d.) **Lösung:** Für  $m$  Durchgänge ändert sich (??) entsprechend zu  $G(\nu)^m$

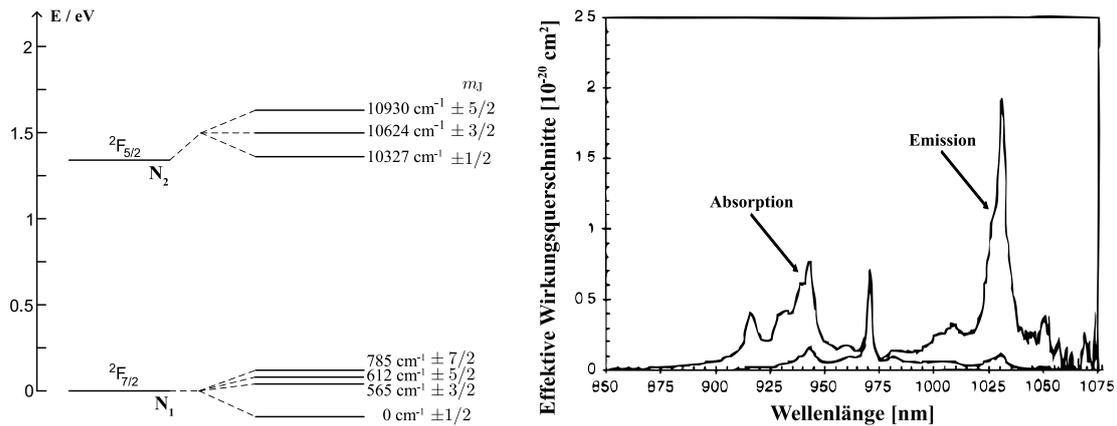
$$\begin{aligned} I_\nu(d \cdot m) &= G(\nu_0)^m I_0 \exp \left[ -4 \ln 2 \left( \frac{\nu - \nu_0}{\Delta \nu_{\text{in}}} \right)^2 \right] \exp \left[ -4 \ln 2 \left( \frac{\nu - \nu_0}{2\Delta \nu_{\text{in}}} \right)^2 \right]^m \\ &= G(\nu_0)^m I_0 \exp \left[ -4 \ln 2 (\nu - \nu_0)^2 \left( \frac{1}{(\Delta \nu_{\text{in}})^2} + \frac{m}{(2\Delta \nu_{\text{in}})^2} \right) \right] \\ &= G(\nu_0)^m I_0 \exp \left[ -4 \ln 2 (\nu - \nu_0)^2 \underbrace{\left( \frac{4+m}{4(\Delta \nu_{\text{in}})^2} \right)}_{1/(\Delta \nu_{\text{out},m})^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Damit folgt für die Bandbreite nach  $m$  Durchgängen

$$\Delta \nu_{\text{out},m} = \frac{2}{\sqrt{4+m}} \Delta \nu_{\text{in}}. \quad (4.23)$$

## 5 Fünfte Übungsserie

**Aufgabe 1:** Dargestellt sind das Termschema sowie die effektiven Emissions- und Absorptionswirkungsquerschnitte von Yb:YAG (bei Raumtemperatur). Im unangepumpten Zustand befinden sich alle Teilchen im unteren Multiplett bestehend aus vier durch die Stark-Aufspaltung entstehenden Energieniveaus. Sie können durch optisches Pumpen in das obere Multiplett angehoben werden. Laserübergänge finden nur zwischen den Multipletts statt, innerhalb dieser können die Teilchen als Boltzmann-verteilt angesehen werden.



- Berechnen Sie für alle Übergänge die entsprechenden Wellenlängen.
- Wieso zeigt der Verlauf der Emissions- und Absorptionswirkungsquerschnitte keine einzelnen, den Übergängen entsprechende Linien?
- Die effektiven Wirkungsquerschnitte sind proportional zum Produkt aus spektroskopischen Wirkungsquerschnitten und der relativen Besetzung des Start-Zustands des entsprechenden Übergangs. Zeichnen Sie die qualitativ den Verlauf der effektiven Emissions- und Absorptionswirkungsquerschnitte für Temperaturen nahe 0 K.
- Überlegen Sie sich anhand der Wirkungsquerschnitte, zwischen welchen Energieniveaus sich idealerweise eine Vierniveausystem realisieren lässt. Zeichnen Sie die entsprechenden Übergänge in das Termschema.
- Welcher Nachteil könnte sich daraus ergeben, dass die Energieniveaus energetisch sehr eng beieinander liegen?

**a.) Lösung:** Die Bezeichnung in der Abbildung gibt die Wellenzahlen der Energieniveaus für den Übergang zu einem *Grundniveau* an. Hierbei lässt sich die Wellenzahl des Übergangs einfach durch Subtraktion der Wellenzahlen der am Übergang beteiligten Niveaus berechnen. Da die Wellenzahl das Reziproke der Wellenlänge ist, ergibt sich für die Wellenlänge direkt

$$\lambda_{ij} = \frac{1}{|\tilde{\nu}_i - \tilde{\nu}_j|}. \quad (5.1)$$

In der folgenden Tabelle 2 sind die Wellenlängen für alle Übergänge aufgeführt: Es wird

**Tabelle 2:** Übergangswellenlängen zwischen den durch den Stark Effekt aufgespalteten Energieniveaus des Yb:YAG Kristalls im  $^2F_{5/2}$  und  $^2F_{7/2}$  Zustand.

$\tilde{\nu}$ [ $\frac{1}{\text{cm}}$ ]	0	565	612	785
10327	968,3 nm	1024,4 nm	1029,3 nm	1048,0 nm
10624	941,3 nm	994,1 nm	998,8 nm	1016,4 nm
10930	914,9 nm	964,8 nm	969,2 nm	985,7 nm

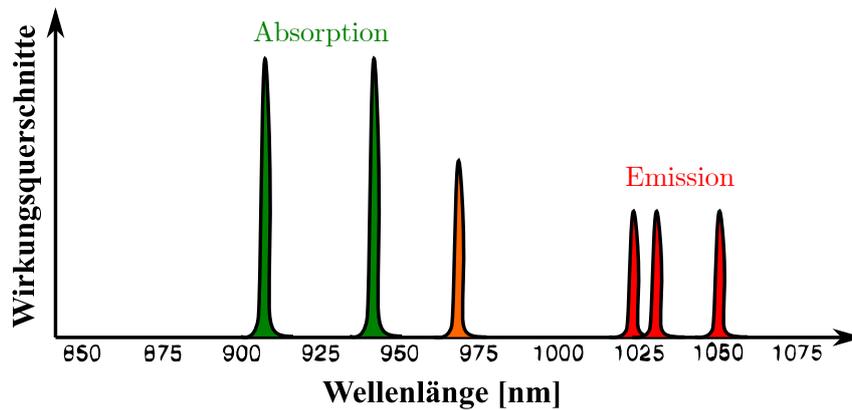
zu der Darstellung noch angemerkt, dass für freie Elektronen ein Teil der Übergänge nach den Auswahlregeln  $\Delta m_J = \pm 1, 0$  eigentlich verboten sind, da hier ebenfalls Übergänge von  $m = \pm 7/2$  nach  $\pm 1/2$  auch aufgeführt sind. Jedoch liegt hier eine etwas andere Situation vor. Durch die Dotierung des Aluminiumgranates mit Ytterbium kommt es im Kristall zu lokalen Störungen und die Energieniveaus werden weiter aufgespalten, wodurch bestimmte Übergänge möglich werden. Tatsächlich ist dieser Effekt durch die Dotierung durchaus gewünscht. Die für den Yb:YAG Laser charakteristische Linie bei 1030 nm (Teilaufgabe d) gehört auch zu einem *verbotenem* Übergang, welcher eine im Verhältnis zum Pumpniveau eine lange Lebensdauer aufweist und dadurch auch spontane Emission nicht zu stark ist.

**b.) Lösung:** Es gibt mehrere mögliche Gründe, warum die Emissions- und Absorptionswirkungsquerschnitte keine einzelnen Linien aufweisen. Eine mögliche Störung stellen Verbreiterungsmechanismen im Festkörper dar, die ebenfalls den Wirkungsquerschnitt beeinflussen. Dazu gehören beispielsweise Phononenschwingungen des Kristallgitters oder lokal inhomogene Kristallfelder. Ein weiterer Grund könnte die bereits angesprochene Dotierung des Kristalls sein, welche zu einer zusätzlichen Aufspaltung der Energieniveaus führt, was weitere Übergänge nahe des eigentlichen Übergangs erzeugt.

**c.) Lösung:** In der Aufgabenstellung wurde davon ausgegangen, dass die thermische Besetzung der Teilchen in den einzelnen Multipletten einer Boltzmann-Verteilung gehorcht, welche folgende Form aufweist

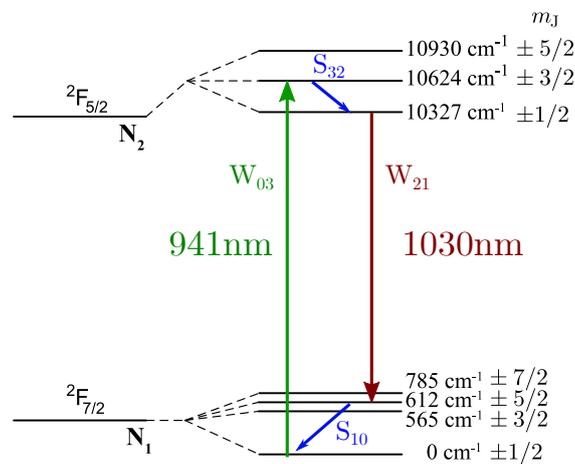
$$n_i = n_0 \exp\left(-\frac{E_i - E_0}{k_B T}\right). \quad (5.2)$$

Für den Fall nahe des absoluten Nullpunktes sind quasi alle Teilchen nur im untersten Zustand des jeweiligen Multipletts bei  $J = \pm 1/2$ . Das heißt Absorptionsvorgänge können nur von diesem Niveau aus stattfinden. Nehmen wir an, das gepumpt wurde und sich im oberen Multiplett ebenfalls einige Teilchen im  $J = 1/2$  Niveau. Dann können von diesem Niveau auch Emissionsprozesse stattfinden. Abbildung 1 zeigt den qualitativen Verlauf der Emissions- und Absorptionswirkungsquerschnitte. Die Verbreiterungsmechanismen sind nahe des Nullpunktes ebenfalls abgeschwächt, weshalb die Linien schärfer sind. Zudem sind von den zwölf möglichen Übergängen nur die möglichen Übergänge eingezeichnet (Absorption oder Emission von einem besetzten Zustand).



**Fig. 1:** Effektive Wirkungsquerschnitte für Absorptions- und Emissionsprozesse im Yb:YAG bei 0 K. Die orangene Linie beschreibt einen Übergang, der sowohl bei Absorption, als auch Emission auftritt. Die Amplituden der Emission sind geringer, da hier weniger Teilchen im oberen Multiplett vorhanden sind.

d.) **Lösung:** Für die Wahl der geeigneten Energieniveaus für ein 4-Niveau Lasersystem sollte die Absorptionsrate für das Pumpniveau, als auch die Emissionsrate des Laserniveaus groß sein. Da die Absorption vom dicht bevölkerten Grundniveau erfolgen soll, bietet sich hier der Übergang bei 941 nm für den Pumpprozess an. Hier wird auf das  $m_J = 3/2$  Niveau gepumpt. Das obere Laserniveau muss dann also das  $m_J = 1/2$  Niveau sein. Der hierbei wahrscheinlichste Übergang ist die 1030 nm Linie in das  $m_J = 5/2$  des unteren Multipletts. Die Übergänge sind in Abbildung 2 dargestellt.



**Fig. 2:** Vier-Niveau-System eines Yb:YAG-Lasers.

e.) **Lösung:** Aufgrund der Nähe der anderen Übergänge zum Pumpniveau bei 941 nm können beim Pumpen auch andere Übergänge angeregt werden, die für wahrscheinlich nicht in das obere Laserniveau relaxieren. Weiterhin ist es möglich, dass aufgrund der Nähe der Niveaus auch unbeteiligte Energieniveaus thermisch besetzt sind, weshalb unter Umständen eine Kühlung des Lasers notwendig werden könnte.

**Aufgabe 2:** Die allgemeine Ratengleichung für die Inversionsänderung in einem aktiven Medium mit homogener Inversionsdichteverteilung  $n$  ist gegeben durch

$$\frac{dn}{dt} = -\gamma n \frac{\sigma I_s}{h\nu} - \frac{[n + n_{\text{tot}}(\gamma - 1)]}{\tau_2} + W_p(n_{\text{tot}} - n), \quad (5.3)$$

wobei für ein 4-Niveau System  $\gamma = 1$  und für ein 3-Niveau System  $\gamma = 2$  ist.  $\sigma$  steht für den Wirkungsquerschnitt,  $I_s$  ist die Intensität des Lasersignals,  $\tau_2$  ist die Lebensdauer des oberen Laserniveaus,  $n_{\text{tot}}$  ist die totale Dichte der aktiven Atome im Material und  $W_p$  ist die Pumprate.

- a) Die Sättigungsintensität  $I_{\text{sat}}$  ist als die Laserintensität definiert, die den Gleichgewichtsverstärkungskoeffizienten auf die Hälfte seines Maximalwertes reduziert. zeigen Sie ausgehend von diesem Wissen und der obigen Ratengleichung die Gültigkeit der Gleichung

$$I_{\text{sat}} = \frac{(\Gamma + W_p)h\nu}{\gamma\sigma}. \quad (5.4)$$

- b) Nehmen Sie nun an, dass dieses aktive Medium ein Vier-Niveau System ist ( $W_p \ll 1/\tau_2$ ) und, dass es für  $t \leq 0$  mit einer Pumprate von  $W_p$  gepumpt wurde, bis der Gleichgewichtszustand erreicht war. Nun wird für  $t > 0$  die Pumpe ausgeschaltet. Berechnen Sie die zeitliche Entwicklung der Inversionsdichte  $n(t)$  unter der Annahme, dass die Intensität  $I$  konstant bleibt. Drücken Sie  $n(t)$  als Funktion der Sättigungsintensität  $I_{\text{sat}}$  aus.
- c) Diskutieren Sie, unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse, welches der dominante Prozess bei der Reduzierung der Inversion in den folgenden drei Fällen ist:  $I_s \ll I_{\text{sat}}$ ,  $I_s = I_{\text{sat}}$ ,  $I_s \gg I_{\text{sat}}$ .
- d) Im Fall, dass  $I_s \gg I_{\text{sat}}$  ist, haben die aktiven Teilchen eine effektive mittlere Lebensdauer  $\tau' \ll \tau_2$  im angeregten Zustand. Leiten Sie einen Ausdruck für  $\tau'$  her.

**a.) Lösung:** Wir nehmen zur Lösung der Aufgabe einen Gleichgewichtszustand an, in dem sich die Inversionsdichte nicht mehr ändert. Es gilt daher unter der Verwendung  $1/\tau_2 = \Gamma$

$$0 = \frac{dn}{dt} = -\gamma n \frac{\sigma I_s}{h\nu} - \Gamma[n + n_{\text{tot}}(\gamma - 1)] + W_p(n_{\text{tot}} - n). \quad (5.5)$$

Diese Gleichung lässt sich nun nach  $n$  auflösen, um einen Ausdruck für die Inversionsdichte als Funktion der Intensität zu erhalten

$$\begin{aligned} \Rightarrow n \left( \gamma \frac{\sigma I_s}{h\nu} + \Gamma + W_p \right) &= -\Gamma n_{\text{tot}}(\gamma - 1) + W_p n_{\text{tot}} \\ n &= \frac{n_{\text{tot}}(W_p - \Gamma(\gamma - 1))}{\gamma \frac{\sigma I_s}{h\nu} + \Gamma + W_p}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Wir können diesen Ausdruck noch vereinfachen, indem wir den Wert von  $n(I_s = 0)$  zu einer Konstanten  $n_0$  zusammenfassen

$$n_0 = n(I_s = 0) = n_{\text{tot}} \frac{(W_p - \Gamma(\gamma - 1))}{\Gamma + W_p}. \quad (5.7)$$

Damit lässt sich (5.6) umschreiben zu

$$n = n_0 \frac{\Gamma + W_p}{\Gamma + W_p + \gamma \frac{\sigma I_s}{h\nu}} = n_0 \frac{1}{1 + \frac{\gamma \sigma I_s}{h\nu(\Gamma + W_p)}}. \quad (5.8)$$

Wenn die bei der Sättigungsintensität  $I_{\text{sat}}$  den Verstärkungskoeffizient  $g = \sigma n$  auf die Hälfte reduziert ist, gilt offensichtlich

$$g = n\sigma = n_0\sigma \frac{1}{1 + \frac{I_s}{I_{\text{sat}}}}, \quad (5.9)$$

da bei  $I_s = I_{\text{sat}}$  sich der hintere Bruch zu 1/2 reduziert. Damit lässt sich durch Vergleich von (5.8) und (5.9) ein Wert für die Sättigungsintensität angeben:

$$\frac{\gamma \sigma I_s}{h\nu(\Gamma + W_p)} = \frac{I_s}{I_{\text{sat}}} \Rightarrow I_{\text{sat}} = \frac{h\nu(\Gamma + W_p)}{\gamma \sigma}. \quad (5.10)$$

**b.) Lösung:** Für den Fall des Vier-Niveau-Systems kann in der Ratengleichung der letzte Summand  $W_p(n_{\text{tot}} - n)$  vernachlässigt werden, da  $W_p \ll \Gamma$  ist. Die Ratengleichung vereinfacht sich dann mit  $\gamma = 1$  zu

$$\frac{dn}{dt} = -\left(\frac{\sigma I_s}{h\nu} + \Gamma\right)n. \quad (5.11)$$

Die Differentialgleichung lässt sich durch einen Exponentialansatz leicht lösen. Es ergibt sich

$$n(t) = n(t=0) \exp\left(-\left(\frac{\sigma I_s}{h\nu} + \Gamma\right)t\right). \quad (5.12)$$

Nun muss noch  $n(t=0)$  bestimmt werden. Da hier ein Gleichgewichtszustand vorliegt, können wir direkt das Ergebnis (5.8) aus Teilaufgabe a.) verwenden. Als Funktion der Sättigungsintensität ergibt sich nun

$$n(t) = n_0 \frac{1}{1 + \frac{I_s}{I_{\text{sat}}}} \exp\left(-\left(\frac{\sigma I_s}{h\nu} + \Gamma\right)t\right). \quad (5.13)$$

Für den Fall  $I_s = I_{\text{sat}}$  vereinfacht sich das zu

$$n(t) = \frac{n_0}{2} \exp\left(-\left(\frac{\sigma I_{\text{sat}}}{h\nu} + \Gamma\right)t\right). \quad (5.14)$$

c.) **Lösung:** Für das Vier-Niveau-System ergibt sich die Formel für die Sättigungsintensität zu

$$I_{\text{sat}} = \frac{h\nu(\Gamma + W_p)}{\gamma\sigma} \rightarrow I_{\text{sat}} = \frac{\Gamma h\nu}{\sigma}. \quad (5.15)$$

Die Intensität der im Resonator befindlichen Photonen lässt sich angeben als  $I_s = pch\nu$ , wobei  $p$  die Photonendichte beschreibt. Damit lässt sich das Verhältnis  $I_{\text{sat}}/I_s$  schreiben als

$$\frac{I_{\text{sat}}}{I_s} = \frac{\Gamma h\nu}{\sigma I_s} = \frac{\Gamma}{\sigma pc}. \quad (5.16)$$

Wir interpretieren nun die Bedeutung von Zähler und Nenner.  $\Gamma = 1/\tau_2$  gibt die inverse Lebensdauer des Laserniveaus an und ist somit die Wahrscheinlichkeit der spontanen Emission. Der Term  $\sigma pc$  wurde in der Vorlesung hergeleitet als die Wahrscheinlichkeit der stimulierten Emission, damit ergibt sich

$$\frac{I_{\text{sat}}}{I_s} = \frac{W_{\text{spontan}}}{W_{\text{stimuliert}}}. \quad (5.17)$$

Somit lassen sich direkt die drei Fälle untersuchen:

$$\text{Dominanter Prozess: } \begin{cases} \text{spontane Emission} & I_s \ll I_{\text{sat}} \\ \text{beide Prozesse gleich} & I_{\text{sat}} = I_s \\ \text{stimulierte Emission} & I_s \gg I_{\text{sat}} \end{cases} \quad (5.18)$$

d.) **Lösung:** Wir können (5.17) für den Fall  $I_s \gg I_{\text{sat}}$  umschreiben zu

$$I_s \gg I_{\text{sat}} \Rightarrow \sigma pc \gg \Gamma \Rightarrow \Gamma \ll \sigma pc. \quad (5.19)$$

Mit  $\Gamma = 1/\tau_2$  ergibt sich nun

$$\frac{1}{\tau_2} \ll \sigma pc \Rightarrow \frac{1}{\sigma pc} \ll \tau_2 \Rightarrow \tau' = \frac{1}{\sigma pc}. \quad (5.20)$$

## 6 Sechste Übungsserie

**Aufgabe 1:** Die Ratengleichung des oberen Energieniveaus  $N_2$  eines nicht-entarteten Zwei-Niveau-Systems kann folgendermaßen dargestellt werden:

$$\frac{dN_2}{dt} = -W_{21} \cdot (N_2 - N_1) - S_{21}N_2 \quad (6.1)$$

wobei  $W_{21}$  die Übergangswahrscheinlichkeit für stimulierte Emission oder Absorption ( $W_{12} = W_{21}$ ) und  $S_{21}$  die Rate der spontanen Emission vom oberen Niveau ist. Der allgemeine Ausdruck für die Übergangswahrscheinlichkeit von stimulierter Emission und Absorption  $W_i$  ist:

$$W_i = \int_0^{\infty} \frac{\rho(\nu)c}{h\nu} \sigma_{\nu} d\nu. \quad (6.2)$$

Hierbei ist  $\nu$  die Frequenz,  $\rho(\nu)$  die spektrale Energiedichte im Volumen  $V$ ,  $c$  ist die Lichtgeschwindigkeit und  $\sigma_{\nu}$  der Wirkungsquerschnitt.

- Drücken Sie  $W_i$  als Funktion des Photonenflusses  $\Phi$  für monochromatisches Licht aus.
- Drücken Sie  $W_i$  als Funktion der Lebensdauer des oberen Laserniveaus  $\tau_2$  für polychromatisches Licht mit breitem, glattem Spektrum aus. Nehmen Sie dazu an, dass  $\sigma_{\nu}$  deutlich schmaler als  $\rho(\nu)/(h\nu)$  ist. Nutzen Sie dies um den Ausdruck für den Einstein Koeffizient  $B_i$  zu extrahieren.

**a.) Lösung:** Der Photonenfluss  $\Phi$  ist für monochromatisches Licht gegeben als die Anzahl der Photonen pro Fläche und Zeitintervall

$$\Phi = \frac{\text{Zahl Photonen}}{dA \cdot dt} = \frac{I}{h\nu}. \quad (6.3)$$

Für monochromatisches Licht ergibt (6.2)

$$W_i = \int_0^{\infty} \frac{\rho \delta(\nu' - \nu)c}{h\nu'} \sigma'_{\nu} d\nu' = \frac{\rho c}{h\nu} \sigma_{\nu}. \quad (6.4)$$

Nun suchen wir noch nach einem Ausdruck, um Photonendichte und Intensität zu verknüpfen. Dafür stellen wir uns einen Zylinder mit Deckfläche  $A$  und Länge  $l$  vor, durch den sich die Photonen bewegen. Dann ergibt sich die Gesamtenergie im Zylinder als Produkt aus Photonendichte  $p$ , Volumen  $V = Al$  und Photonenenergie  $E = h\nu \cdot pV$ . Für die Intensität lässt sich nun schreiben

$$I = \frac{E}{t \cdot A} = \frac{h\nu p A \cdot l}{t \cdot A} = \underbrace{h\nu p}_{=\rho} c, \quad \text{mit } \frac{l}{t} = c, \quad (6.5)$$

wobei  $t$  die Zeit beschreibt, bis ein Photon den Zylinder durchquert hat. Damit ergibt sich  $I = \rho c$  und (6.4) ergibt sich zu

$$W_i = \frac{I}{h\nu} \sigma_{\nu} \stackrel{(6.3)}{=} \Phi \sigma_{\nu}. \quad (6.6)$$

b.) **Lösung** Wenn wir annehmen, dass  $\sigma_\nu$  viel schmaler als  $\rho(\nu)/(h\nu)$  ist, dann ist Letzteres auf dem gesamten Integrationsbereich konstant und kann aus dem Integral gezogen werden. Mit der Definition der Übergangswahrscheinlichkeit  $W_i = \rho(\nu)B_i$  folgt dann für den Einsteinkoeffizienten

$$W_i = \rho(\nu_0) \frac{c}{h\nu_0} \int_0^\infty \sigma_\nu d\nu \Rightarrow B_i = \frac{c}{h\nu_0} \int_0^\infty \sigma_\nu d\nu. \quad (6.7)$$

Um  $W_{12}$  als Funktion von  $\tau_2$  auszudrücken, lösen wir einfach (6.1) nach  $W_{12}$  auf und ersetzen  $S_{12} = 1/\tau_2$ :

$$W_{12} = -\frac{\frac{1}{\tau_2} N_2 + \frac{dN_2}{dt}}{N_2 - N_1} = \frac{1}{\tau} \frac{N_2}{N_1 - N_2}, \quad (6.8)$$

wobei der hintere Teil im stationären Zustand  $\frac{dN_2}{dt} = 0$  gilt. Alternativ lässt sich auch die Beziehung zwischen den Einsteinkoeffizienten  $S_{21}$  und  $B_{21} = B_{12}$  nutzen

$$\frac{1}{\tau_2} = S_{21} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} B_{21} \Rightarrow W_i = \rho B_i = \frac{1}{\tau_2} \frac{c^3 \rho(\nu)}{8\pi h\nu^3}. \quad (6.9)$$

Bei beiden Rechnungen zeigt sich, dass  $W_i$  proportional zu  $1/\tau_2$  ist.

**Aufgabe 2:** Wir betrachten ein aktives Medium der Dicke  $d$  und Verstärkung  $G = \exp(\sigma nd)$ , welches sich in einem linearen Resonator mit den Umlaufverlusten  $L$  befindet. Die Transmission des Auskoppelspiegels sei  $T$ . Somit lautet die Gleichgewichtsbedingung  $(1 - T)(1 - L)G^2 = 1$ . Nimmt man zusätzlich eine im Medium homogene Inversionsverteilung  $n$  an, so kann der Laserprozess durch folgende 4-Niveau-Ratengleichung beschrieben werden (Indizes: p–Pumpe, s–Signal):

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{n}{\tau_2} + W_p(n_{\text{tot}} - n) - \frac{I_s \sigma}{h\nu_s} n. \quad (6.10)$$

$\tau_2$  ist hierbei die Lebensdauer des oberen Laserniveaus (Fluoreszenzlebensdauer),  $n_{\text{tot}}$  die Dotierungsdichte und  $\sigma$  der effektive Emissionswirkungsquerschnitt. Die Pumprate  $W_p$  ist abhängig von der absorbierten Pumpleistung  $P_p$ , der Quanteneffizienz  $\eta = \lambda_p / \lambda_s$  und dem gepumpten Volumen  $Ad$  und ergibt sich zu:

$$W_p = \frac{\eta P_p}{h\nu_p Ad(n_{\text{tot}} - n)}. \quad (6.11)$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe der obigen Gleichungen, dass die Sättigungsintensität durch

$$I_{\text{sat}} = \frac{h\nu_s}{\sigma\tau_2} \quad (6.12)$$

gegeben ist. Berechnen Sie hierzu den Verstärkungskoeffizienten  $g$ .

b) Zeigen Sie weiterhin mit Hilfe dieser Gleichungen, dass sich die Ausgangsleistung eines cw-Lasers zu  $P_l = \sigma_s(P_p - P_{th})$  ergibt. Nehmen Sie hierzu an, dass Pump- und Signalstrahlung die gleiche Fläche  $A$  einnehmen. Bestimmen Sie einen Ausdruck für den differentiellen Wirkungsgrad  $\sigma_s$  und die Schwellpumpleistung  $P_{th}$ .

c) Zur experimentellen Bestimmung der Verluste  $L$  wurden für verschiedene Auskoppelspiegel folgende Messwerte aufgenommen (Methode nach Findlay Clay): Bestimmen

$P_p$ [W]	$P_1$ [W] $T = 0.1$	$P_1$ [W] $T = 0.2$	$P_1$ [W] $T = 0.4$
30	3.5	3.5	1.0
50	7.0	8.5	6.5
70	10.5	13.5	12.5
90	14.0	18.5	18.5
110	18.0	24.0	24.0

Sie jeweils  $P_{th}$  durch lineare Regression. Benutzen Sie die Ergebnisse aus b) und stellen Sie  $P_{th}$  so grafisch dar, dass auch  $L$  durch lineare Regression bestimmt werden kann.

d) Berechnen Sie für alle drei Auskoppelgrade aus c) die entsprechende Verstärkung  $G$ .

e) Leiten Sie aus b) mit der Näherung  $T, L \ll 1$  eine Gleichung für den optimalen Auskoppelgrad her.

f) Betrachten Sie zwei Laser mit den selben Parametern (d. h. identische  $P_p, L, \sigma$  und aktives Volumen) mit der Ausnahme, dass es sich bei dem einen um ein 4-Niveau-System und bei dem anderen um ein 3-Niveau-System handelt. Diskutieren Sie für welchen Laser die optimale Auskoppelleffizienz höher sein wird. Warum ist das so?

a.) **Lösung:** Wir nehmen zur Lösung wieder an, dass sich in der Ratengleichung (6.10) die Inversionsdichte nicht ändert. Außerdem setzen wir für  $W_p$  direkt den Ausdruck der Pumprate ein (6.11)

$$0 = -\frac{n}{\tau_2} + \frac{\eta P_p}{h\nu_p A d} - \frac{I_s \sigma}{h\nu_s} n. \quad (6.13)$$

Wir können die erhaltene Gleichung nach  $n$  auflösen und erhalten

$$\begin{aligned} n \left( \frac{1}{\tau_2} + \frac{I_s \sigma}{h\nu_s} \right) &= \frac{\eta P_p}{h\nu_p A d} \\ n &= \frac{\eta P_p}{h\nu_p A d \left( \frac{1}{\tau_2} + \frac{I_s \sigma}{h\nu_s} \right)}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Wir erhalten nun den Verstärkungskoeffizienten  $g$ , indem wir mit dem Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  multiplizieren und gleichzeitig eine Konstante  $g(I_s = 0) = g_0$  einführen:

$$g = \frac{g_0}{1 + I_s \left( \frac{\sigma \tau_2}{h\nu_s} \right)}, \quad \text{mit } g_0 = \frac{\sigma \eta P_p \tau_2}{h\nu_p A d}. \quad (6.15)$$

Die Sättigungsintensität reduziert den Verstärkungskoeffizienten  $g(I_s)$  per Definition auf die Hälfte. Damit gilt

$$g(I_{\text{sat}}) = \frac{g_0}{1 + \frac{I_s}{I_{\text{sat}}}} \stackrel{(6.15)}{\Rightarrow} \frac{1}{I_{\text{sat}}} = \frac{\sigma \tau_2}{h\nu_s} \Rightarrow I_{\text{sat}} = \frac{h\nu_s}{\sigma \tau_2}. \quad (6.16)$$

b.) **Lösung:** Im allgemeinen ergibt sich die Ausgangsleistung des Lasers als die Ausgekoppelte Energie  $E = V \cdot p \cdot h\nu$  pro Zeiteinheit. Wir nehmen nun an, dass in diesem Ausdruck nur die Photonendichte zeitabhängig ist:

$$P_l = -\frac{dE}{dt} = -Ad h\nu_s \frac{dp}{dt}. \quad (6.17)$$

Die Abnahme der Photonendichte durch Auskoppeln lässt sich schreiben als

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{p}{\tau_{\text{ph}}}, \quad (6.18)$$

wobei  $\tau_{\text{ph}}$  die Lebensdauer der Photonen im Resonator beschreibt. Wir erhalten einen Ausdruck für die Photonendichte, indem wir uns das Verhältnis der Photonendichten nach einem Roundtrip anschauen:

$$\frac{p_1}{p_0} = \exp\left(-\frac{\tau_R}{\tau_{\text{ph}}}\right) = R = 1 - T. \quad (6.19)$$

Hierbei beschreibt  $T$  die Transmissivität des Auskoppelspiegels und  $\tau_R$  die Round-trip-time im Resonator. Unter der Annahme, dass die Transmissivität des Auskoppelspiegels hoch ist, können wir die Exponentialfunktion nähern durch  $\exp(x) = 1 + x$

$$1 - T = 1 - \frac{\tau_R}{\tau_{\text{ph}}} \Rightarrow -\frac{1}{\tau_{\text{ph}}} = -\frac{T}{\tau_R}. \quad (6.20)$$

Wir erhalten damit durch Einsetzen von (6.20) und (6.18) in (6.17)

$$P_l = Ad h\nu_s \frac{T}{\tau_R} p. \quad (6.21)$$

Die Photonendichte im stationären Zustand (4-Niveau-System) wurde in der Vorlesung hergeleitet zu

$$p = (n_{\text{tot}} - n_{th})(W_p - W_{th})\tau_{\text{ph}}, \quad (6.22)$$

indem eine stationäre Photonendichte  $\frac{dp}{dt} = 0$  angenommen und der Rauschterm  $S$  der Rategleichung vernachlässigt wurde. Wird dies in Gleichung (6.21) eingesetzt, dann ergibt sich ein Ausdruck  $\frac{\tau_{\text{ph}}}{\tau_R}$ . Für einen Resonator mit Verlusten  $L$  gilt hierbei nun

$$\frac{\tau_{\text{ph}}}{\tau_R} = \frac{1}{T + L}. \quad (6.23)$$

Somit ergibt sich (6.21) zu

$$p = Ad h\nu_s (n_{\text{tot}} - n_{th})(W_p - W_{th}) \frac{T}{T + L}. \quad (6.24)$$

Wir können nun (6.11) nutzen, um einen Ausdruck für  $(W_p - W_{th})$  zu finden. Wir erhalten

$$W_p - W_{th} = \frac{\eta}{h\nu_p Ad(n_{\text{tot}} - n)} (P_p - P_{th}), \quad (6.25)$$

wobei wir analog zu  $P_p$  folgenden Ausdruck für  $P_{th}$  angesetzt haben:

$$P_{th} = W_{th} \frac{h\nu_p Ad(n_{\text{tot}} - n)}{\eta}. \quad (6.26)$$

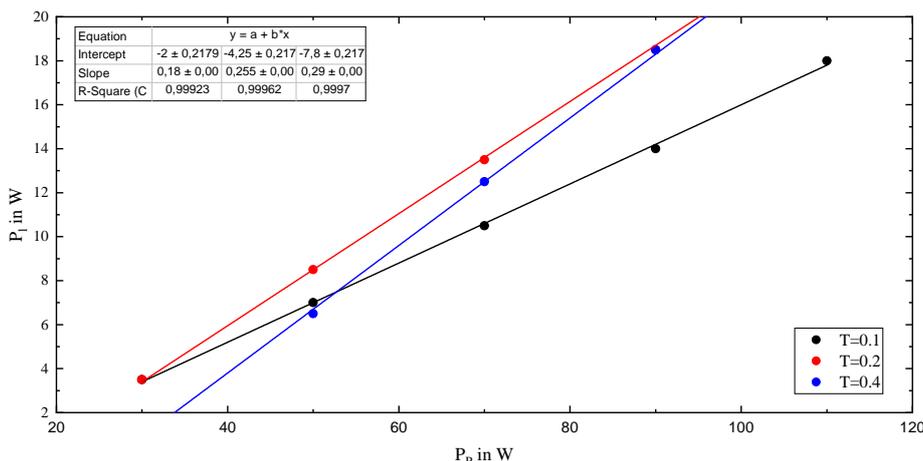
Setzen wir nun (6.25) in (6.24) ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} P_l &= \eta \frac{\nu_s}{\nu_p} \frac{T}{T + L} (P_p - P_{th}) \\ &= \sigma_s (P_p - P_{th}) \quad \text{mit} \quad \sigma_s = \eta \frac{\nu_s}{\nu_p} \frac{T}{T + L}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

c.) **Lösung:** Zunächst wollen wir für alle drei Werte von  $T$  die Schwelppumpleistung  $P_{th}$  grafisch bestimmen. Dafür tragen wir  $P_l$  über  $P_p$  grafisch auf. Ein Vergleich mit Gleichung (6.27) zeigt, dass der Graph  $P_l(P_p)$  genau bei  $P_p = P_{th}$  eine Nullstelle hat. Für eine lineare Funktion ergibt sich die Nullstelle dann zu

$$P_{th} = -\frac{y\text{-Achsenabschnitt}}{\text{Anstieg}}. \tag{6.28}$$

Die lineare Regression ist in Abbildung 3 dargestellt.



**Fig. 3:** Darstellung der Laserleistung über der Pumpleistung zur Bestimmung der Schwelppumpleistung durch Nullstellensuche.

Aus 3 lassen sich die nötigen Werte zur Berechnung von  $P_{th}$  ablesen und es ergibt sich

**Tabelle 3**

$T$	0.1	0.2	0.4
$P_l$ in [W]	11.11	16.66	26.90

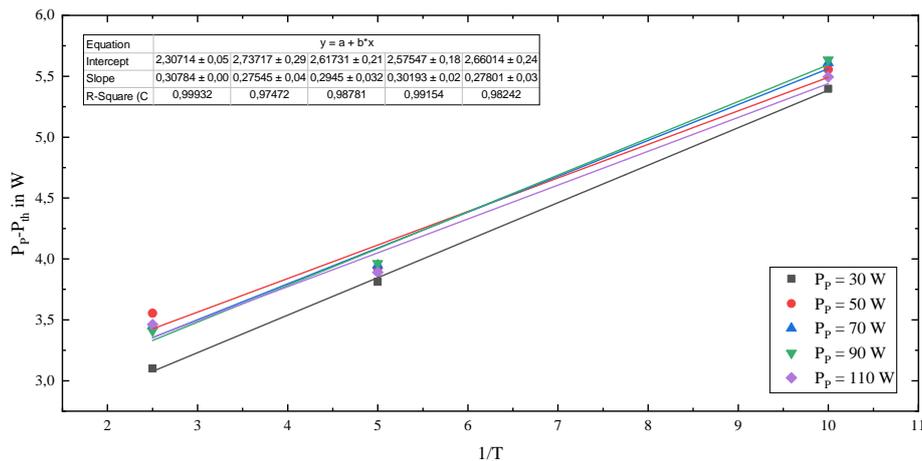
Zur grafischen Bestimmung der Verluste  $L$  stellen wir (6.27) nach  $P_p - P_{th}$  um:

$$P_p - P_{th} = \frac{P_l \nu_p}{\eta \nu_s} \left( 1 + \frac{L}{T} \right). \tag{6.29}$$

Wir erhalten ebenfalls wieder eine lineare Funktion, wenn wir  $(P_p - P_{th})$  grafisch über  $\frac{1}{T}$  auftragen. Dabei ergibt sich eine Nullstelle, wenn  $T = -L$  gilt. Es gilt wieder für die Nullstelle  $\frac{1}{T_0}$

$$\frac{1}{T_0} = -\frac{y\text{-Achsenabschnitt}}{\text{Anstieg}} \Rightarrow -T_0 = L = \frac{\text{Anstieg}}{y\text{-Achsenabschnitt}}. \tag{6.30}$$

Die grafische Darstellung wurde für alle Werte von  $P_p$  durchgeführt und ist in Abbildung 4 dargestellt. Wir können wieder Anstieg und Achsenabschnitt der gefitteten Kurven aus dem Diagramm ablesen und mithilfe von (6.30) die Verluste  $L$  bestimmen (siehe Tabelle 4). Es zeigt sich, dass die Verluste etwa bei  $L = 0.11$  liegen.



**Fig. 4:** Darstellung der Differenz von Pumpleistung und Schwellpumpleistung über der inversen Transmissivität zur Bestimmung der Verluste.

**Tabelle 4**

$P_p$ in [W]	30	50	70	90	110
$L$	0.13	0.10	0.11	0.12	0.10

d.) Lösung: Nach der in der Aufgabenstellung gegebenen Gleichgewichtsbedingung

$$G = \frac{1}{\sqrt{(1-T)(1-L)}}, \quad \begin{array}{ccc} T & 0.1 & 0.2 & 0.4 \\ \hline G & 1.117 & 1.185 & 1.368 \end{array} \quad (6.31)$$

lässt sich die Verstärkung einfach durch Einsetzen von  $L = 0.11$  und  $T$  bestimmen.

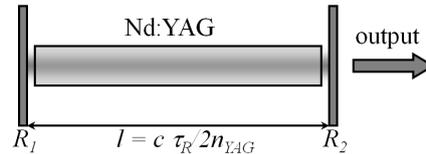
e.) Lösung: Ein optimaler Auskoppelgrad liegt dann vor, wenn die extrahierte Laserleistung (6.27) maximal ist. Dabei ist diese direkt vom Auskoppelgrad abhängig, jedoch hängt  $P_{lh}$  linear vom Auskoppelgrad  $T$  ab. Wir erhalten dann

$$P_l \propto \frac{T}{T+L}(\text{const.} - T) \Rightarrow \frac{dP}{dT} = \frac{-L \cdot \text{const.} - T^2 + 2TL}{(T+L)^2}. \quad (6.32)$$

Damit ergibt sich ein Extremum für die Lösungen der quadratischen Gleichung  $T^2 - 2TL + L \cdot \text{const.} = 0$  mit den Lösungen  $T = L \pm \sqrt{L^2 - L \cdot \text{const.}}$  und  $\text{const.} = \tau_2 \eta W_{03} n_{\text{tot}} \sigma \tau_R$ .

f.) Lösung: Die Auskuppelleffizienz wird für den 4-Niveau-Laser höher sein, da hier die Schwellinversionsdichte sehr klein sein kann. Somit ist ebenfalls die Schwellpumpleistung recht klein. Ein Vergleich mit dem Ergebnis aus Teil b.) (Gleichung (6.27)) zeigt, dass bei kleinerer Schwellpumpleistung die extrahierte Laserleistung bei gleicher Pumpleistung höher ist. Somit ist die Auskuppelleffizienz höher.

**Aufgabe 3:** Ein gütegeschalteter, diodengepumpter Nd:YAG Laser (4-Niveau-System,  $\tau_2 = 230 \mu\text{s}$ ,  $\sigma = 4,1 \cdot 10^{-19} \text{ cm}^2$ ) mit einem Stabdurchmesser von 4 mm, einer Stablänge von 100 mm (nehmen Sie an, dass die Resonatorlänge etwa diesem Wert entspricht) und 0,8 % Dotierungskonzentration ( $n_{\text{tot}} = 1,1 \cdot 10^{20} \frac{1}{\text{cm}^3}$ ) wird optisch gepumpt. Die Pumpleistung beträgt 1 kW bei 808 nm. Die Kavität im “high-Q state” (niedrige Verluste) ist in folgender Abbildung schematisch dargestellt:



- a) Nehmen Sie an, dass der Brechungsindex des YAG-Kristalls  $n_{\text{YAG}} = 1.82$  beträgt. Der Strahl sei hierbei innerhalb des Resonators transversal homogen, perfekt kollimiert und füllt den aktiven Kristall komplett aus.  $\tau_R$  sei die Kavitätsumlaufzeit und  $L$  sind die Verluste bei einmaligem Durchgang durch die Kavität. Unter diesen Umständen zeigen Sie, dass die Photonenlebensdauer  $\tau_{ph}$  in der Kavität im “high-Q state” durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$\tau_{ph} = -\frac{\tau_R}{\ln[R_1 R_2 (1 - L)^2]}. \quad (6.33)$$

- b) Es sei nun ein Resonator mit den Reflektivitäten  $R_1 = 1$  und  $R_2 = 0.5$ , den Verlusten  $L = 4\%$  und einer Quanteneffizienz von 95% gegeben. In dieser Aufgabe soll nur der erste Puls betrachtet werden, d. h. der Pumpprozess (“low-Q state”) ändert die Inversion vom Anfangswert  $n = 0$  auf den finalen Wert  $n_i$ . Berechnen Sie den finalen Inversionswert nach dem Pumpprozess. Nehmen Sie dazu an, dass die Periode der Güteschaltung viel länger ist, als die Lebensdauer der angeregten Ionen (Gleichgewichtszustand) und die Photonendichte  $p_i = 0$  beträgt.

Hinweis: Ersetzen Sie in den Ratengleichungen die Lichtgeschwindigkeit  $c$  durch  $c/n_{\text{YAG}}$ .

- c) Berechnen Sie für die selben Resonatorparameter die finale Inversion nach der Pulsenergie unter der Annahme, dass die finale Photonendichte nach dem Puls  $p_f = 0$  beträgt.
- d) Berechnen Sie die Pulsenergie, Pulsspitzenleistung und Pulsdauer unter der Annahme eines gaußförmigen Pulses. Die Intensität ist als

$$I = \frac{1}{2} \cdot (1 - R_2) \cdot \frac{c h p v_s}{n_{\text{YAG}}} \quad (6.34)$$

definiert. Berücksichtigen Sie auch, dass bei einem Gaußpuls die Pulsenergie  $E$  und die Pulsspitzenleistung  $P_{\text{peak}}$  über die Pulsdauer  $\tau$  durch folgenden Ausdruck miteinander zusammenhängen:  $P_{\text{peak}} = 0.94E/\tau$ .

a.) **Lösung:** Nach einem Umlauf ergibt sich definitionsgemäß die Photonendichte  $p_1$  gegenüber der Anfangsphotondichte  $p_0$  zu

$$p_1 = p_0 \exp\left(-\frac{\tau_R}{\tau_{\text{ph}}}\right), \quad (6.35)$$

wobei  $\tau_R$  die Umlaufdauer und  $\tau_{\text{ph}}$  die Lebensdauer der Photonen in der Kavität beschreiben. Gleichzeitig lässt sich dieser Zusammenhang ebenfalls durch Multiplikation der einzelnen Verlustmechanismen beschreiben:

$$p_1 = (1 - T_1) \cdot (1 - T_2) \cdot (1 - L)^2 p_0 = R_1 R_2 \cdot (1 - L)^2 p_0, \quad (6.36)$$

wobei  $L$  den Verlust bei einem Durchgang durch das aktive Medium beschreibt und in einem Umlauf das Medium zweimal durchquert wird, was zu  $(1 - L)^2$  führt.

Ein Vergleich von (6.35) und (6.36) führt auf

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{\tau_R}{\tau_{\text{ph}}}\right) &= R_1 R_2 \cdot (1 - L)^2 \Rightarrow -\frac{\tau_R}{\tau_{\text{ph}}} = \ln(R_1 R_2 (1 - L)^2) \\ \tau_{\text{ph}} &= -\frac{\tau_R}{\ln(R_1 R_2 (1 - L)^2)}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

b.) **Lösung:** Wir berechnen die Inversionsdichte unter Zuhilfenahme der Ratengleichung für ein 4-Niveau-System:

$$\frac{dn}{dt} = -\sigma c p n - \Gamma n + W_p (n_{\text{tot}} - n). \quad (6.38)$$

Wir nehmen hierbei an, dass sich die Inversionsdichte  $n_i$  im Gleichgewicht befindet. Zudem wird  $p_i = 0$  im low-Q state angenommen.

Wird das Ergebnis nun nach der Inversionsdichte aufgelöst, und für  $W_p$  Gleichung (6.11) eingesetzt, ergibt sich mit  $\Gamma = \frac{1}{\tau_2}$  folgende Gleichung:

$$n_i = \tau_2 \frac{\eta P_p}{h \nu_p A d}. \quad (6.39)$$

Setzen wir die gegebenen Größen ein  $\lambda = 808 \text{ nm} \rightarrow h \nu_p = 1,534 \text{ eV}$ , die Länge des aktiven Mediums  $d = 100 \text{ mm}$ , die kreisförmige Fläche  $A = \pi(2 \text{ mm})^2$  und die Pumpleistung  $P_p$ , dann ergibt sich

$$n_i = 230 \mu\text{s} \frac{0,95 \cdot 1 \text{ kW}}{1,534 \text{ eV} \cdot \pi(2 \text{ mm})^2 \cdot 100 \text{ mm}} = 7,075 \cdot 10^{17} \frac{1}{\text{cm}^3}. \quad (6.40)$$

c.) **Lösung:** In der Vorlesung wurde zur eine Gleichung für die finale Inversionsdichte  $n_f$  hergeleitet

$$0 = p_f = n_{th} \ln\left(\frac{n_f}{n_i}\right) - n_f + n_i, \quad (6.41)$$

wobei wir annehmen, dass die finale Photonendichte  $p_f = 0$  ist. Es handelt sich hierbei um eine transzendente Gleichung für  $n_f$ , die nicht mithilfe *einfacher* Funktionen lösbar ist.

Zunächst berechnen wir erstmal die Schwellinversionsdichte  $n_{th} = (\sigma c \tau_{ph})^{-1}$ . Setzen wir den in a.) ermittelten Ausdruck ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} n_{th} &= -\frac{\ln(R_1 R_2 (1-L)^2)}{\tau_R \sigma c}, & \tau_R &= \frac{2l}{c} n_{YAG} \\ &= -\frac{\ln(R_1 R_2 (1-L)^2)}{2l n_{YAG} \sigma} \\ &= -\frac{\ln(0.5(1-0.04)^2)}{2 \cdot 100 \text{ nm} \cdot 1.82 \cdot 4,1 \cdot 10^{-19} \text{ cm}^2} = 5,19 \cdot 10^{16} \frac{1}{\text{cm}^3}. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Für Gleichung (6.41) liefert Wolfram|Alpha als Lösung folgenden Ausdruck:

$$n_f = -n_{th} \cdot W\left(-\exp\left(-\frac{n_i}{n_{th}}\right) \frac{n_i}{n_{th}}\right), \quad (6.43)$$

wobei  $W(x)$  die Lambert-W-Funktion (Produktlogarithmus) bezeichnet. Werden nun (6.42) und (6.40) in (6.43) eingesetzt, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} n_f &= -5,19 \cdot 10^{16} \frac{1}{\text{cm}^3} W\left(-\exp\left(-\frac{7,075 \cdot 10^{17} \frac{1}{\text{cm}^3}}{5,19 \cdot 10^{16} \frac{1}{\text{cm}^3}}\right) \frac{7,075 \cdot 10^{17} \frac{1}{\text{cm}^3}}{5,19 \cdot 10^{16} \frac{1}{\text{cm}^3}}\right) \\ &= 8,5 \cdot 10^{11} \frac{1}{\text{cm}^3}. \end{aligned} \quad (6.44)$$

**d.) Lösung:** Zunächst bestimmen wir mithilfe von (6.34) die maximale Intensität des Gaußpulses. Dafür benötigen wir die maximale Photonendichte  $p_{\max}$ . Wir erhalten diese, wenn wir in (6.41) statt der finalen Inversionsdichte die Schwellinversionsdichte  $n_{th}$  einsetzen. Dann wir erhalten damit

$$p_{\max} = n_{th} \ln\left(\frac{n_{th}}{n_i}\right) - n_{th} + n_i = 5,2 \cdot 10^{17} \frac{1}{\text{cm}^3}. \quad (6.45)$$

Nun können wir die Pulsspitzenleistung  $P_{\text{Peak}} = A I_{\text{Peak}}$  direkt ausrechnen:

$$\begin{aligned} I_{\text{Peak}} &= A \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (1-R_2)}_{=1/4} \cdot \frac{c p_{\max} h \nu_s}{n_{YAG}} \\ &= \pi \frac{(2 \text{ mm})^4}{4} \frac{c \cdot 5,2 \cdot 10^{17} \frac{1}{\text{cm}^3} \cdot 1,165 \text{ eV}}{1.82} = 5,022 \cdot 10^7 \text{ W}. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Die Pulsenergie ergibt sich aus der gesamten Energie, die dem aktiven Medium entzogen wurde. Entscheidend hierfür ist die Differenz aus initialer und finaler Inversionsdichte. Es folgt dann

$$E_{\text{out}} = V(n_i - n_f) \cdot h \nu_s = \pi (2 \text{ mm})^2 \cdot 100 \text{ mm} (n_i - n_f) \cdot 1,165 \text{ eV} = 0,166 \text{ J}. \quad (6.47)$$

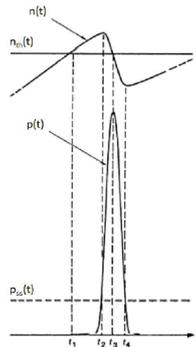
Die Pulsdauer lässt sich nun über die bereits in Übungsserie 1 hergeleitete Relation berechnen:

$$\tau = 0.94 \frac{E_{\text{out}}}{P_{\text{Peak}}} = \frac{0.94 \cdot 0,166 \text{ J}}{5,022 \cdot 10^7 \text{ W}} = 3,1 \text{ ns}. \quad (6.48)$$

## 7 Siebte Übungsserie

### Aufgabe 1:

- a) Was ist Spiking eines Lasers und wann kann es beobachtet werden?
- b) Beschreiben Sie qualitativ anhand der gegebenen Skizze unter Einbeziehung der zeitlichen Veränderung von der Photonendichte  $p$  und der Inversionsdichte  $n$  die Entstehung eines Laserspikes.



- c) Was sind Relaxationsoszillationen in einem Laser und wann treten diese auf?
- d) Angenommen es handelt sich um die selbe Resonatorkonfiguration, warum haben Relaxationsoszillationen in einem 3-Niveau Laser eine höhere Frequenz als in einem 4-Niveau Laser?
- e) In einem 4-Niveau System bei vernachlässigbarer spontaner Emission ist die Dämpfungskonstante der Relaxationsoszillationen gegeben durch:

$$\delta = \frac{n_{tot}}{2n_{th}}(W_p - W_{th}). \quad (7.1)$$

Erklären Sie, warum die Dämpfungskonstante von der Pumprate abhängt!

a.) **Lösung:** Befindet sich ein Laser im nichtstationären Betrieb, beispielsweise wenn die Pumpleistung des Lasers plötzlich angeschaltet wird, dann können mehrere nichtlineare Spitzen (engl. *spikes*) in der emittierten Laserleistung entstehen bevor das System sich in den stationären Zustand begibt. Bei großen (nichtlinearen) Abweichungen vom Gleichgewicht sprechen wir von Spikes, während kleine Abweichungen des stationären Gleichgewichts durch harmonische Relaxationsoszillationen beschreibbar sind.

b.) **Lösung:** Unterhalb der Schwelleninversionsdichte  $n < n_{th}$ ,  $t < t_1$  erhöht sich die Inversionsdichte nahezu linear mit der Zeit. Sobald die Inversionsdichte erreicht wird, startet der Laserbetrieb und eine Photonendichte bildet sich aus. Allerdings dauert es eine gewisse Zeit  $t_1 < t < t_2$  bis sich die Photonendichte des stationären Zustandes eingestellt hat, in dieser

Zeit steigt die Inversionsdichte jedoch noch weiter an. Diese zusätzliche Inversionsdichte stellt eine genügend hohe Verstärkung bereit, sodass die Photonendichte den Gleichgewichtszustand  $p_{SS}$  übersteigen kann. Ab diesem Zeitpunkt  $t > t_2$  fängt die Inversionsdichte wieder an zu sinken, da immer schneller Photonen generiert werden. Ist die Inversionsdichte wieder auf den Gleichgewichtswert abgefallen  $n = n_{th}$  und  $t = t_3$ , dann erreicht die Photonendichte ein Maximum, da die Nettoverstärkung im Resonator  $G = 1$  wird. Da sich hier die Photonendichte weit über  $p_{SS}$  befindet, sinkt die Inversion unterhalb des Schwellwertes, was ein schnelles Abfallen der Photonendichte verursacht. Unterschreitet die Photonendichte den Gleichgewichtswert bei  $t_4$ , beginnt die Inversionsdichte wieder langsam zu wachsen. Dieser Zyklus wiederholt sich mehrere Male mit gedämpfter Amplitude bis sich ein Gleichgewichtszustand einstellt.

c.) **Lösung:** Relaxationsoszillationen sind im Gegensatz zu Spikes harmonische Oszillationen der Laserintensität um einen Gleichgewichtszustand. Hierbei handelt es sich um kleine Abweichungen vom Gleichgewichtszustand. Eine kleine Abweichung der Inversionsdichte und/oder Photonendichte führt zu einer gekoppelten Schwingung, weil Photonendichte und Inversionsdichte durch Differentialgleichungen miteinander gekoppelt sind.

d.) **Lösung:** Für die Relaxationsoszillationen wurde in der Vorlesung für ein 4-Niveau-System folgende Gleichung hergeleitet:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\tau_2 \cdot \tau_{ph}} \left( \frac{W_p}{W_{th}} - 1 \right)} = \sqrt{\frac{c\sigma n_{th}}{\tau_2} \left( \frac{W_p}{W_{th}} - 1 \right)}, \quad (7.2)$$

wobei die Photonenlebensdauer mit der Inversionsdichte über die Schwellwertbedingung  $\tau_{ph} = (c\sigma n_{th})^{-1}$  verknüpft ist. Im Vier-Niveau-System ist die Schwellinversionsdichte viel geringer als im Drei-Niveau-System, da in ersterem bereits ein Teilchen im oberen Laserniveau ausreicht, um Inversion zu erzeugen. Da allerdings  $W_{th}$  auch von  $n_{th}$  abhängt, ist die Beantwortung der Frage nicht ganz so einfach. Wir setzen uns es daher zum Ziel, einen allgemeinen Ausdruck von Gleichung (7.2) zu finden. Dafür gehen wir analog zu Abschnitt 4.2.2 des Skriptes vor. Betrachten wir den allgemeinen Fall, dann ergibt sich durch eine völlig analoge Rechnung Gleichung (4.27) des Skriptes allgemein zu

$$\frac{d^2(\Delta n)}{dt^2} + (\gamma \bar{p} \cdot c \cdot n + \Gamma) \frac{d(\Delta n)}{dt} + \underbrace{\frac{\gamma \bar{p}}{\tau_{ph}^2 \cdot n_{th}}}_{=: \omega^2} \Delta n = 0. \quad (7.3)$$

Damit ergibt sich für  $\omega$  die Korrektur

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma}{\tau_2 \cdot \tau_{ph}} \left( \frac{W_p}{W_{th}} - 1 \right)}, \quad (7.4)$$

wodurch direkt ersichtlich wird, dass  $\omega$  für ein Drei-Niveau-System ( $\gamma = 2$ ) größer ist, als im Vier-Niveau-System.

e.) **Lösung:** Zur Diskussion der Dämpfung der Relaxationsoszillationen schreiben wir die in (7.1) gegebene Formel etwas um:

$$\delta = \frac{1}{2} n_{\text{tot}} (W_p - W_{th}) \underbrace{\tau_{ph} \cdot c \sigma}_{1/n_{th}} = \frac{1}{2} n_{\text{tot}} (W_p - W_{th}) \underbrace{\tau_{ph}}_{\bar{p}} c \sigma = \frac{1}{2} \bar{p} c \sigma. \quad (7.5)$$

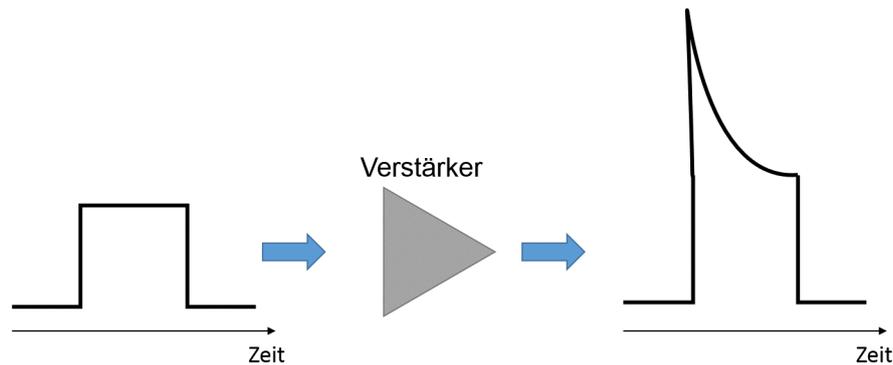
Wir sehen, dass die Ursache der Abhängigkeit von der Pumprate die Photonendichte  $\bar{p}$  im Resonator ist. Liegt eine hohe Photonendichte vor, dann können kleine Abweichungen  $\Delta n$  der Inversionsdichte schneller kompensiert werden als bei einer niedrigen Photonendichte. Das liegt daran, dass aufgrund der hohen Photonenzahl die Inversion schneller abgebaut wird, die Relaxationsoszillationen eine höhere Frequenz aufweisen (siehe (7.2)) und sich das Gleichgewicht schneller einstellt.

**Aufgabe 2:** Gegeben sei ein aktives Medium in Form einer dünnen und runden Scheibe mit einem Durchmesser  $d$  und einer Dicke  $w$  ( $w \ll d$ ). Sowohl Pumpe als auch Signal werden durch eine der Kreisflächen mit dem Durchmesser  $d$  eingestrahlt. Das Medium wird homogen gepumpt und soll einen gütegeschalteten Laser ermöglichen. Alle Oberflächen des aktiven Mediums sind poliert. Das System ist so ausgelegt, dass das aktive Medium seine maximale Inversion erreicht und die Güte des Resonators sofort im Anschluss geschaltet wird.

- Erklären Sie kurz das Prinzip der Güteschaltung.
- Berechnen Sie den maximal möglichen Durchmesser der Scheibe, bevor Laserbetrieb in transversaler Richtung auftritt. Der Brechungsindex beträgt  $n = 1.83$ , der Emissions-Wirkungsquerschnitt bei der Signalwellenlänge beträgt  $\sigma = 2 \cdot 10^{-20} \text{ cm}^2$  und die Dotierungskonzentration ist  $N = 7 \cdot 10^{20} \text{ Ionen/cm}^3$ .
- Wie viel Energie kann das aktive Medium speichern, wenn es ein 3-Niveau-, 4-Niveau- oder umgekehrtes 3-Niveau-System ist? Nehmen Sie eine Dicke  $w = 100 \mu\text{m}$  und eine Pumpwellenlänge von  $976 \text{ nm}$  an.
- Wie viel Energie kann man aus der Scheibe aus c) extrahieren, wenn es ein 3-Niveau-, 4-Niveau- oder umgekehrtes 3-Niveau-System ist? nehmen Sie eine Signalwellenlänge von  $1064 \text{ nm}$  an.
- Die kurzen Laserpulse aus dem gütegeschalteten Laser sind aktiv zu einem rechteckigen zeitlichen Profil geformt. Nach der Verstärkung in einem zusätzlichen Laserverstärker verändert sich das zeitliche Profil wie im Bild gezeigt. Erklären Sie, warum sich das zeitliche Pulsprofil im Verstärker verändert!

a.) **Lösung:** Die Güteschaltung ist eine Methode zur Erzeugung eines kurzen, energiereichen Laserpulses. Hierfür wird der Gütefaktor des Laserresonators abrupt geändert:

$$Q = \frac{\text{Im Resonator gespeicherte Energie}}{\text{Energieverlust pro Umlauf}}. \quad (7.6)$$



Zu Beginn wird der Gütefaktor des Resonators niedrig gehalten, sodass sich eine hohe Inversion im aktiven Medium aufbauen kann, ohne dass Laseroszillation auftritt, da die Schwellinversionsdichte hier sehr hoch ist. Ist die Inversion groß genug, wird zu einer Resonatorconfiguration hoher Güte umgeschaltet, in welcher die aufgebaute Inversion die Schwellinversionsdichte wesentlich größer ist. Damit ist es möglich, dass sich sehr schnell die Photondichte aufbauen kann und die im aktiven Medium gespeicherte Energie in Form eines Riesenimpulses extrahiert wird.

**b.) Lösung:** Zur Berechnung, wann in transversaler Richtung das Lasing beginnt, wird die Schwellwertbedingung für einen Resonator  $R_1 \cdot R_2 \cdot G = 1$  betrachtet. Dabei bezeichnet  $R = R_1 = R_2$  die Reflektivität des aktiven Mediums am Rand und  $G$  die Verstärkung. Die Reflektivität lässt sich mithilfe der Fresnelschen Formeln berechnen, welche sich für den Spezialfall des senkrechten Einfalls zu

$$R = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 = \left( \frac{1.82 - 1}{1.82 + 1} \right)^2 = 0.086, \quad (7.7)$$

wobei  $n_1$  die Brechzahl des aktiven Mediums und  $n_2$  die Brechzahl in Luft bezeichnet. Mit  $G = \exp(N \cdot \sigma \cdot 2l)$  folgt dann für die Länge des aktiven Mediums

$$l = \frac{1}{2\sigma N} \ln\left(\frac{1}{R^2}\right) = -\frac{1}{\sigma N} \ln(R) = -\frac{2}{2 \cdot 10^{-20} \text{ cm}^2 \cdot 7 \cdot 10^{20} \frac{1}{\text{cm}^3}} \ln(0.086) = 1,75 \text{ mm}. \quad (7.8)$$

**c.) Lösung:** Die im aktiven Medium gespeicherte Energie ergibt sich als die Energie des Pumplichtes multipliziert mit der Anzahl der laseraktiven Atome. Letzteres erhalten wir aus der Dotierdichte und dem Volumen des aktiven Mediums. Wir nehmen für den Durchmesser des aktiven Mediums den in b.) errechneten Wert an. Damit ergibt sich für die Energie

$$E = h\nu \cdot N \cdot w \pi \frac{l^2}{4} = 1,27 \text{ eV} \cdot 7 \cdot 10^{20} \frac{1}{\text{cm}^3} \cdot 100 \mu\text{m} \pi \frac{(3,5 \text{ mm})^2}{4} = 34 \text{ mJ}. \quad (7.9)$$

Wir müssen diesen Wert noch für die verschiedenen Niveau-Systeme anpassen. Im idealen Vier-Niveau-System wird das Pumpniveau direkt geleert, sodass alle Atome angeregt werden. Im Drei-Niveau-System lässt sich die selbe Annahme treffen. Auch hier wird das Pumpniveau ausreichend schnell geleert, sodass alle Atome auf das obere Laserniveau gebracht werden

können. Im umgekehrten 3-Niveau-System dient das Pump-Niveau gleichzeitig auch als das obere Laserniveau und wird beim Pumpen langsam bevölkert. Dabei ist eine Besetzungsinversion gegenüber des Grundniveaus nicht möglich. Wir können also nur maximal die Hälfte der Atome anregen. Somit halbiert sich die Energie die im umgekehrten 3-Niveau-System gespeichert werden kann:

$$E = \begin{cases} 34 \text{ mJ} & \text{4-Niveau-System} \\ 34 \text{ mJ} & \text{3-Niveau-System} \\ 17 \text{ mJ} & \text{umgekehrtes 3-Niveau-System} \end{cases} . \quad (7.10)$$

**d.) Lösung:** Für die Energie, die aus dem Medium extrahiert werden kann, gehen wir analog zu (7.9) vor. Wir erhalten die Energie, indem wir die Wellenlänge des Lasersignals bei 1064 nm verwenden:

$$E = 1,165 \text{ eV} \cdot 7 \cdot 10^{20} \frac{1}{\text{cm}^3} \cdot 100 \mu\text{m} \pi \frac{(1,75 \text{ mm})^2}{4} = 31,4 \text{ mJ}. \quad (7.11)$$

Auch diskutieren wir die verschiedenen Niveau-Systeme. Im Vier-Niveau-System wird das untere Laserniveau schnell geleert, sodass Absorptionsvorgänge vernachlässigt werden können. Damit lassen sich alle im aktiven Medium angeregten Atome für den Laserprozess nutzen. Im 3-Niveau-System ist das Grundniveau das untere Laserniveau und wird nicht geleert. Wurde nun das obere Laserniveau um die Hälfte geleert, dann befinden sich in beiden Niveaus die gleiche Anzahl an Atomen und der Laser wird transparent, denn stimulierte Emission und Absorption wiegen einander auf. Es lässt sich keine weitere Energie extrahieren. Im umgekehrten 3-Niveau-System wird das untere Laserniveau geleert und alle angeregten Atome können genutzt werden. Allerdings müssen wir beachten, dass hier nur die Hälfte angeregt wurde. Wir erhalten somit

$$E = \begin{cases} 31,4 \text{ mJ} & \text{4-Niveau-System} \\ 15,7 \text{ mJ} & \text{3-Niveau-System} \\ 15,7 \text{ mJ} & \text{umgekehrtes 3-Niveau-System} \end{cases} . \quad (7.12)$$

**e.) Lösung:** Zur Verstärkung des Rechteckpulses wird ebenfalls ein gepumptes aktives Medium genutzt. Dieses besitzt eine endliche Inversionsdichte. Trifft nun der Riesenimpuls auf das aktive Medium, dann baut sich die Inversionsdichte schnell ab und die Verstärkung sinkt. Im zeitlichen Pulsverlauf zeigt sich dann, dass der Anfangsteil des Rechteckpulses (bei kleineren Zeiten) mehr verstärkt wurde als der hintere Teil.

## 8 Achte Übungsserie

**Aufgabe 1:** Betrachten Sie einen passiv gütegeschalteten Laser. Es gilt die folgende Raten-gleichung für die Inversion  $n$  (mit  $\gamma = 2$  für ein 3-Niveau-System):

$$\frac{dn}{dt} = -\gamma n \frac{\sigma I_s}{h\nu} - \frac{[n + n_{\text{tot}}(\gamma - 1)]}{\tau} + W_p(n_{\text{tot}} - n). \quad (8.1)$$

$\sigma$  sei der Wirkungsquerschnitt,  $I_s$  die Intensität des Lasersignals,  $\tau$  die Fluoreszenzlebens-dauer,  $n_{\text{tot}}$  die totale Dichte der aktiven Atome im Material und  $W_p$  die Pumprate.

- Berechnen Sie die zeitliche Entwicklung der Inversion zwischen den Pulsen. Nehmen Sie hierbei an, dass nach einem Puls die Inversion  $n_f = 0$  und die Intensität des Signals  $I_s = 0$  ist.
- Passiv gütegeschaltete Laser nutzen sogenannte sättigbare Absorber (SA) um die Güte des Resonators zu schalten. SA besitzen intensitätsabhängige Verluste und werden näherungsweise transparent, sobald sie mit einer gewissen Intensität bestrahlt werden. Ein sättigbarer Absorber kann beispielweise ein Zwei-Niveau-System sein. Geben Sie die Ratengleichung eines Zwei-Niveau-Systems für die Inversion  $n$  als Funktion der Gesamtionendichte  $n_{\text{tot}}$  und der Signalintensität  $I_s$  an.
- Der Laserprozess beginnt, wenn die Verluste des SA reduziert werden. Dies geschieht, wenn die Signalintensität im Resonator die sogenannte Sättigungsintensität  $I_{\text{sat}}$  (Intensität, an der die Inversion im Gleichgewicht  $n = -n_{\text{tot}}/2$  ist) erreicht. Unter der Annahme, dass die ungesättigten Verluste des SA klein sind (Verluste bei  $I_s \approx 0$ ), ist die Signalintensität im SA ungefähr konstant. Berechnen Sie dann einen Ausdruck für  $I_{\text{sat}}$ .
- Typischerweise wird ein SA direkt vor einem Spiegel (Gesamtstruktur bekannt als SAM) platziert. Betrachten Sie einen Spiegel der Reflektivität 1 und einen SA der Dicke  $d$ . Berechnen Sie die effektive Reflektivität des SAM als Funktion der einfallenden Signalintensität im stationären Gleichgewicht. Stellen Sie die sättigbare effektive Reflektivität für  $0 \leq I_s \leq 10I_{\text{sat}}$  dar, wenn die Verluste des SA im ungesättigten Fall für einen Einfachdurchgang 2% betragen, d. h.  $I_{s,\text{out}}/I_s = 0.98$ .  
Hinweis: Nach einem Durchgang durch den SA ist die Signalintensität  $I_{s,\text{out}} = I_s \exp(\sigma nd)$ . Da die Verluste im SA gering sind, können Sie annehmen, dass das einfallende Signal und das durch den Spiegel reflektierte Signal ungefähr gleich sind.
- Jedes mal, wenn die Inversion den Wert  $n_{\text{tot}}/2$  erreicht, werde ein gütegeschalteter Puls emittiert. Zeigen Sie dann, dass (unter Vernachlässigung spontaner Emission) die Puls-wiederholungsrate gegeben ist als  $T = \ln 2 / W_p$ .
- Was passiert in diesem Laser mit steigender Pumpleistung? Diskutieren Sie hierbei die Veränderung von Puls-wiederholrate und Pulsenergie.

a.) **Lösung:** Für die zeitliche Entwicklung der Inversion zwischen den Pulsen nehmen wir  $n(t=0) = 0$  an. Weiterhin ist die Photonendichte im "Low Q-state" vernachlässigbar klein, weshalb  $I_s = c p h \nu = 0$  für die gesamte Zeit des Inversionsaufbaus gilt. Damit vereinfacht sich (8.1) zu

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= -\frac{[n + n_{\text{tot}}(\gamma - 1)]}{\tau} + W_p(n_{\text{tot}} - n) \\ &= -\underbrace{\left(\frac{1}{\tau} + W_p\right)}_{=:a} n + \underbrace{n_{\text{tot}}\left(W_p - \frac{\gamma - 1}{\tau}\right)}_{=:b}. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Wir müssen daher eine Differentialgleichung der Form  $\dot{n} = a \cdot n + b$  lösen. Dafür verwenden wir das Verfahren zur Variation der Konstanten und lösen zunächst den homogenen Teil der Gleichung

$$\dot{n} = a \cdot n \quad \Rightarrow \quad n(t) = A(t)e^{at}. \quad (8.3)$$

Durch Variation von  $A(t)$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{n}(t) &= \dot{A}(t)e^{at} + \cancel{A(t)ae^{at}} \stackrel{!}{=} \cancel{A(t)ae^{at}} + b \\ \Rightarrow A(t) &= -\frac{b}{a}e^{-at} + c. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Damit ergibt sich als Lösung mit der Anfangsbedingung

$$\begin{aligned} n(t) &= \left(-\frac{b}{a}e^{-at} + c\right)e^{at} \stackrel{n(0)=0}{\Rightarrow} c = \frac{b}{a} \\ &= \frac{b}{a}(e^{at} - 1). \end{aligned} \quad (8.5)$$

Setzen wir nun die Konstanten ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} n(t) &= \frac{n_{\text{tot}}\left(W_p - \frac{\gamma - 1}{\tau}\right)}{-\left(\frac{1}{\tau} + W_p\right)} \left[ \exp\left(-\left(W_p + \frac{1}{\tau}\right)t\right) - 1 \right] \\ &\stackrel{\gamma=2}{=} -n_{\text{tot}} \frac{W_p - \frac{1}{\tau}}{W_p + \frac{1}{\tau}} \left[ \exp\left(-\left(\frac{1}{\tau} + W_p\right)t\right) - 1 \right]. \end{aligned} \quad (8.6)$$

b.) **Lösung:** Wir können analog zu Aufgabe 2 der ersten Übungsserie die Ratengleichung für das obere Niveau eines Zwei-Niveau-Systems aufstellen:

$$\frac{dN_2}{dt} = -\Gamma N_2 + B_{12}\rho(\nu) \underbrace{(N_1 - N_2)}_{-n}. \quad (8.7)$$

Wir können diese Ratengleichung mithilfe der Dotierungsdichte  $n_{\text{tot}} = N_1 + N_2$  und der Inversionsdichte  $n = N_2 - N_1$  formulieren. Für  $N_1$  und  $N_2$  gilt dann

$$N_1 = \frac{n_{\text{tot}} - n}{2}, \quad N_2 = \frac{n_{\text{tot}} + n}{2}. \quad (8.8)$$

Setzen wir nun noch den in der Vorlesung hergeleiteten Ausdruck für den Einsteinkoeffizienten  $B_{21} = \frac{\sigma c}{h\nu}$  und  $\rho(\nu) = I_s/c$  ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{n_{\text{tot}} + n}{2} \right) &= -\Gamma \frac{n_{\text{tot}} + n}{2} - \frac{\sigma c}{h\nu} \rho(\nu) n \\ \frac{dn}{dt} &= -\Gamma (n_{\text{tot}} + n) - \frac{2\sigma I_s}{h\nu} n. \end{aligned} \quad (8.9)$$

c.) **Lösung:** Wenn die Inversion im Gleichgewicht ist, gilt  $\frac{dn}{dt} = 0$ . Setzen wir nun in den Ausdruck (8.9)  $n = -\frac{n_{\text{tot}}}{2}$  ein, dann ergibt sich für die Sättigungsintensität

$$\begin{aligned} 0 &= -\Gamma \frac{n_{\text{tot}}}{2} + \frac{2\sigma I_{\text{sat}}}{h\nu} \frac{n_{\text{tot}}}{2} \\ \Rightarrow I_{\text{sat}} &= \Gamma \frac{h\nu}{2\sigma} = \frac{h\nu}{2\tau\sigma}. \end{aligned} \quad (8.10)$$

d.) **Lösung:** Bei einer sehr kleinen Signalintensität gilt für die Inversion  $n \approx -n_{\text{tot}}$ . Damit gilt für den ungesättigten Fall

$$\frac{I_{s,\text{out}}}{I_s} = \frac{I_s \exp(-\sigma n_{\text{tot}} d)}{I_s} = 0.98, \Rightarrow \exp(-\sigma n_{\text{tot}} d) = 0.98. \quad (8.11)$$

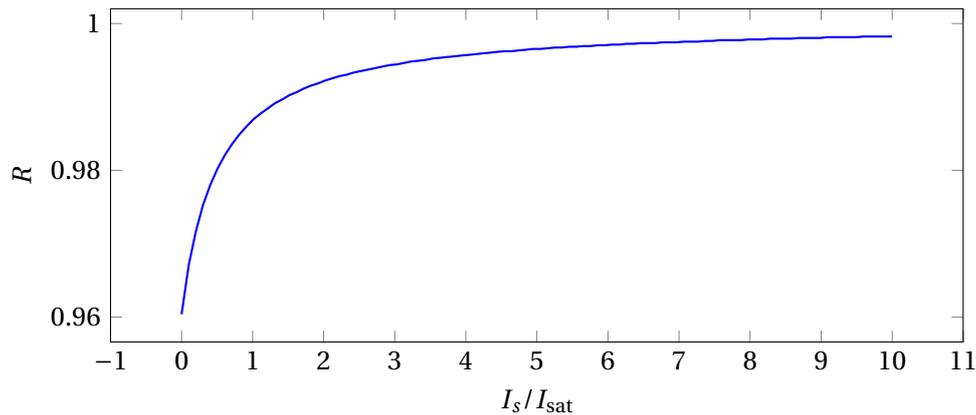
Wir können nun für den Gleichgewichtszustand die Inversionsdichte als Funktion der Intensität  $I_s$  mithilfe von (8.9) ausrechnen:

$$\begin{aligned} 0 &= -\Gamma n_{\text{tot}} - n \left( \Gamma + \frac{2\sigma I_s}{h\nu} \right) \\ \Rightarrow n(I_s) &= -\frac{\Gamma n_{\text{tot}}}{\Gamma + \frac{2\sigma I_s}{h\nu}} = -\frac{n_{\text{tot}}}{1 + \frac{I_s}{I_{\text{sat}}}}. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Die effektive Reflektivität ergibt sich nun, indem wir den Ausdruck für  $n(I_s)$  in  $\exp(\sigma n d)$  einsetzen. Da sich das AM nahe am Spiegel befindet, ergibt sich die Reflektivität durch den Intensitätsverlust bei zweifacher Propagation durch das aktive Medium. Deshalb fügen wir im Exponenten noch einen Faktor zwei hinzu:

$$R_{\text{eff}} = \exp(2\sigma n d) = \exp\left(-\sigma \frac{2n_{\text{tot}} d}{1 + \frac{I_s}{I_{\text{sat}}}}\right) \stackrel{(8.11)}{=} \underbrace{\exp(-\sigma n_{\text{tot}} d)}_{=0.98} \frac{2}{1 + \frac{I_s}{I_{\text{sat}}}} = 0.98 \frac{2}{1 + \frac{I_s}{I_{\text{sat}}}}. \quad (8.13)$$

Wir können nun die Funktion grafisch darstellen, wie Abbildung 5 zeigt.



**Fig. 5:** Grafische Darstellung der effektiven sättigbaren Reflektivität des Absorbers.

e.) **Lösung:** Wir nehmen zur Lösung der Aufgabe an, dass für die Pulswiederholrate  $T$  nur die Zeit von Beginn des Aufbaus der Inversionsdichte (bei  $t = 0$ ) und der Emission des Pulses relevant ist, da die Pulsdauer gegenüber  $T$  vernachlässigbar klein ist. Zur Vernachlässigung spontaner Emission bilden wir in (8.6) den Grenzwert  $\tau \rightarrow \infty$  und fordern, dass  $n(T) = \frac{n_{\text{tot}}}{2}$ :

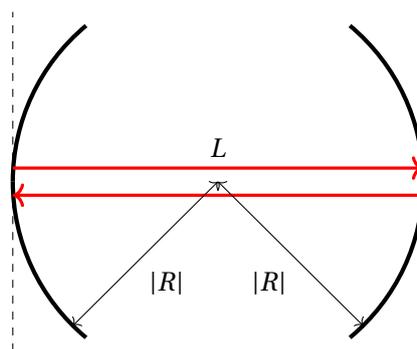
$$\begin{aligned}
 n(t) &= -n_{\text{tot}} \frac{W_p - \frac{1}{\tau}}{W_p + \frac{1}{\tau}} \left[ \exp\left(-\left(\frac{1}{\tau} + W_p\right)t\right) - 1 \right] \\
 &\stackrel{\tau \rightarrow \infty}{\approx} -n_{\text{tot}} [\exp(-W_p t) - 1] \\
 \Rightarrow \frac{n_{\text{tot}}}{2} &= -n_{\text{tot}} [\exp(-W_p T) - 1] \\
 \Rightarrow \frac{1}{2} &= [1 - \exp(-W_p T)] \\
 \Rightarrow T &= -\frac{\ln(1/2)}{W_p} = \frac{\ln(2)}{W_p}. \tag{8.14}
 \end{aligned}$$

f.) **Lösung:** Erhöhen wir die Pumpleistung  $W_p$ , dann wird direkt mithilfe von Gleichung (8.14) erkennbar, dass die Zeit  $T$  zwischen den Pulsen sinkt und die Pulswiederholrate steigt. Allerdings wird die Pulsenergie nicht von der Pumprate beeinflusst, wenn wir davon ausgehen, dass Emission eines Pulses aufgrund der Sättigung des Absorbers bei einer bestimmten Inversionsdichte stattfindet. Da die im aktiven Medium gespeicherte Energie nur von der Inversionsdichte abhängt, wird die Energie des Pulses nicht von  $W_p$  beeinflusst.

**Aufgabe 2:** Ein Student hat die Aufgabe eine stabile Cavity für einen Laser zu entwerfen. Wegen der globalen Finanzkrise kann sich seine Universität nur einen sehr kleinen aktiven Kristall, zwei identische konkave Spiegel (Krümmungsradius  $R$  mit Toleranz  $\pm\Delta R$ ) und einen Planspiegel leisten. Aufgrund des Teilemangels ist er sehr frustriert und findet einfach keinen Weg mit den vorhandenen Komponenten einen funktionsfähigen Aufbau zu realisieren. Können Sie ihm helfen?

- Entwerfen Sie einen einfachen optischen Resonator, der das Meiste aus dem sehr kleinen aktiven Kristall herausholt.
- Führen Sie eine Stabilitätsanalyse der Cavity unter Berücksichtigung der Toleranz der Krümmungsradien der aktiven Spiegel durch. Entscheiden Sie, was der Student tun soll, fall seine Cavity instabil wird.
- Der Student hat Pech beim Transport des Lasers in ein anderes Labor, denn einer seiner Spiegel geht zu Bruch. Aufgrund von Murphys Gesetz handelt es sich gerade um den Spiegel, der ihn zwingt seinen Cavity Aufbau abzuändern, wenn er mit den noch vorhandenen Komponenten auskommen möchte. Helfen Sie ihm und entwerfen Sie eine neue Cavity.
- Führen Sie wie in b) eine Stabilitätsanalyse der neuen Cavity durch und beraten Sie den Studenten, was er bei Instabilitäten tun soll.

a.) **Lösung:** Ein einfacher optischer Resonator, der sich mit diesen Spiegeln aufbauen lässt ist ein konzentrischer bzw. sphärischer Resonator. Für diesen Aufbau gilt, dass der Krümmungsmittelpunkt beider Spiegel in der Mitte des Resonators sitzt. Damit folgt  $R = \frac{L}{2}$ . Dieser Resonatoraufbau bietet den großen Vorteil, dass es möglich ist, die Strahltaile in der Mitte des Lasers auf eine minimale Spotgröße zu reduzieren. Wenn dort das kleine aktive Medium erzielt wird, stellt dieser Aufbau einen effizienten Laser dar. Der Aufbau ist schematisch in Abbildung 6 dargestellt:



**Fig. 6:** Schematischer Aufbau eines konzentrischen Laserresonators.

b.) **Lösung:** Für eine Stabilitätsanalyse betrachten wir das Produkt  $g_1 \cdot g_2$  der Resonatorparameter. Es gilt hier

$$g_1 = g_2 = 1 - \frac{L}{R} \quad \text{mit} \quad R = \frac{L}{2}. \quad (8.15)$$

Das Produkt ergibt sich zu

$$g_1 \cdot g_2 = \left(1 - \frac{L}{R}\right)^2 = 1 - \frac{2RL - L^2}{R^2}. \quad (8.16)$$

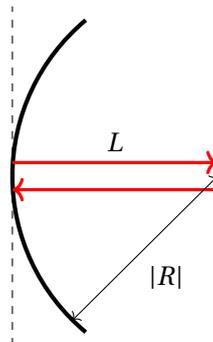
Betrachten wir jetzt  $R$  mit einer Abweichung  $\pm\Delta R$ , dann ergibt sich durch Einsetzen von  $R = \frac{L}{2}$  für das Produkt

$$\begin{aligned} g_1 \cdot g_2 &= \left(1 - \frac{L}{(R \pm \Delta R)}\right)^2 = 1 - \frac{2(R \pm \Delta R)L - L^2}{(R \pm \Delta R)^2} = 1 - \frac{2\left(\frac{L}{2} \pm \Delta R\right)L - L^2}{\left(\frac{L}{2} \pm \Delta R\right)^2} \\ &= 1 - \frac{\pm\Delta R \cdot L}{\frac{L^2}{4} \pm \Delta R(L \pm \Delta R)}. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Damit der Resonator stabil ist, muss  $0 \leq g_1 \cdot g_2 \leq 1$  gelten. Für positives  $\Delta R$  wird der Ausdruck stets kleiner als eins sein und erst für  $\Delta R \rightarrow \infty$  gegen Null tendieren. Ist allerdings  $\Delta R$  negativ, dann wird der Resonator sofort instabil. Er befindet sich also an einer Stabilitätsgrenze.

Wird die Cavity instabil, dann sollte der Student die Spiegel aneinander rücken als  $L$  verkleinern. Dann bleibt der Resonator auch für negative  $\Delta R$  stabil, allerdings wird der Fokus in der Mitte größer.

**c.) Lösung:** Ein alternativer Aufbau lässt sich ebenfalls unter Verwendung eines planaren Spiegels und eines sphärischen Spiegels konstruieren. Diese Resonatorbauform wird *halbsphärischer* Resonator genannt und erzeugt ebenfalls eine kleine Spotgröße. Hier wird das aktive Medium nahe des planaren Spiegels in den Krümmungsmittelpunkt des sphärischen Spiegels gestellt. Der Aufbau ist schematisch in Abbildung 7 dargestellt:



**Fig. 7:** Schematischer Aufbau eines halbsphärischen Laserresonators.

**d.) Lösung:** Für die Stabilitätsanalyse betrachten wir wieder das Produkt  $g_1 \cdot g_2$ , wobei für den planaren Spiegel nun  $g_1 = 1$  gilt. Wir müssen weiterhin bedenken, dass in dieser Bauform  $R = L$  gilt. Damit ergibt sich

$$g_1 \cdot g_2 = 1 - \frac{L}{R \pm \Delta R} = 1 - \frac{L}{L \pm \Delta R}. \quad (8.18)$$

Damit ergibt sich hier wieder die Schlussfolgerung, dass diese Resonatorbauform an einer Stabilitätsgrenze liegt. Für  $\Delta R < 0$  wird  $g_1 \cdot g_2 < 0$  und der Resonator instabil, während er für  $\Delta R > 0$  der Resonator stabil bleibt.

Dem Studenten wird angeraten, bei auftretenden Instabilitäten der Cavity den Spiegelabstand zu verringern, dann wird der Resonator auch bei kleinen Abweichungen  $-\Delta R$  nicht sofort instabil.

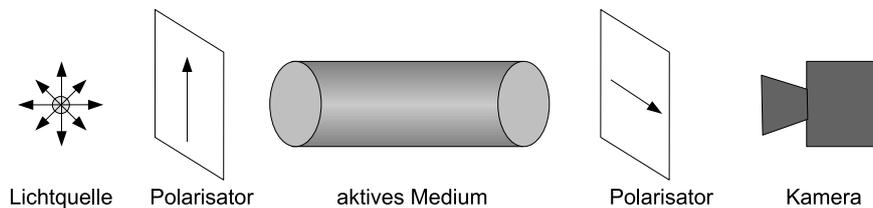
## 9 Neunte Übungsserie

**Aufgabe 1:** Der Hochleistungsbetrieb eines Stablasers kann die Strahlqualität der emittierten Laserstrahlung durch thermisch induzierte Doppelbrechung negativ beeinflussen. Hierbei wird an jedem Punkt entlang des stabförmigen aktiven Mediums der lokale Brechungsindex durch thermisch induzierte Spannungen verändert. Die spannungsinduzierte Brechzahländerung besitzt zwei Komponenten: eine radiale  $\Delta n_r$  und eine tangential  $\Delta n_\phi$ . Beide Komponenten sind durch die folgenden Gleichungen gegeben:

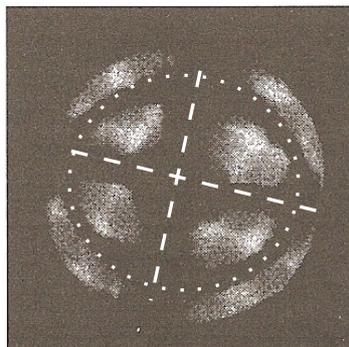
$$\Delta n_r = -\frac{1}{2} n_0^3 \frac{\alpha Q}{K} C_r r^2, \quad \Delta n_\phi = -\frac{1}{2} n_0^3 \frac{\alpha Q}{K} C_\phi r^2 \quad (9.1)$$

mit dem Brechungsindex des Stabes  $n_0$ , dem thermischen Ausdehnungskoeffizienten  $\alpha$ , der erzeugten Wärmelast pro Volumeneinheit  $Q$ , der thermischen Leitfähigkeit  $K$ , dem radialen Abstand zur Stabachse und den elektrooptischen Materialparametern  $C_r$  und  $C_\phi$ .

- Beschreiben Sie kurz den Effekt der Doppelbrechung und erklären Sie dessen Einfluss auf polarisiertes Licht.
- Um den Einfluss von thermisch induzierter Doppelbrechung sichtbar zu machen, kann der nachfolgend dargestellte Aufbau benutzt werden. Erklären Sie das zugrunde liegende Funktionsprinzip.



- Mit dem in b) gezeigten Aufbau kann ein typisches Bild wie unten dargestellt, aufgenommen werden. Erklären Sie das Auftreten des dunklen Kreuzes (markiert mit gestrichelter Linie).

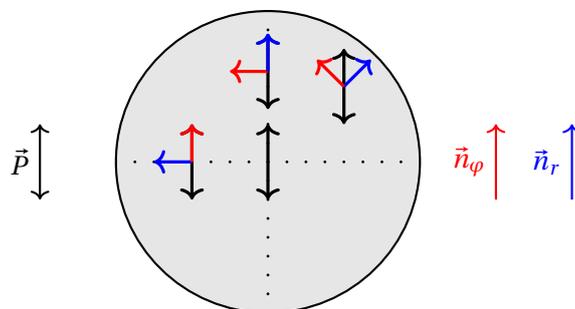


- Erklären Sie das Auftreten des dunklen Ringes (markiert mit der gepunkteten Linie).
- Wie kann man die Geometrie des aktiven Mediums verändern, um den thermischen Einfluss zu reduzieren?

a.) **Lösung:** Ein Medium wird als doppelbrechend bezeichnet, wenn der Brechungsindex im Material von der einfallenden Polarisation und von Richtung abhängig ist. Hierbei *spüren* verschiedene Polarisationskomponenten des einfallenden Lichtes einen unterschiedlichen Brechungsindex  $n$ . Dadurch ergibt sich ein Phasenunterschied zwischen den Komponenten, wodurch sich die Polarisationsart des Lichtes ändern kann. Wird beispielsweise ein Phasenunterschied von  $\pi/2$  akkumuliert, dann entsteht aus linear polarisiertem Licht zirkular polarisiertes Licht. Weiterhin kann auch die Polarisationsrichtung mit doppelbrechenden Materialien gedreht werden.

b.) **Lösung:** In dem experimentellen Aufbau, wird vor das aktive Medium ein Polarisator gestellt, welcher dafür sorgt, dass die gesamte Strahlung senkrecht polarisiert ist. Ist das aktive Medium nicht doppelbrechend, dann wird sich die Polarisationsrichtung nicht ändern und der zweite Polarisator wird die gesamte Strahlung blockieren und das Kamerabild ist schwarz. Propagiert der Strahl nun durch ein doppelbrechendes Medium, dann wird die Polarisation im Allgemeinen eine Komponente in radiale Richtung und in azimutale Richtung besitzen. Sind die elektrooptischen Materialparameter für die radiale- und azimutale Brechzahländerung unterschiedlich, dann ergibt sich eine Phasenverschiebung zwischen den Komponenten und die Polarisationsrichtung wird gedreht (oder das linear polarisierte Licht wird elliptisch). Dann wird der zweite Polarisator nicht die gesamte Strahlung blockieren, da ebenfalls ein Teil parallel polarisiert ist.

c.) **Lösung:** Eine anschauliche Erklärung für das Zustandekommen des dunklen Kreuzes gibt Abbildung 8. Wir nehmen wieder an, dass die einfallende Strahlung senkrecht polarisiert ist. Für Strahlen, die sich in der vertikalen Symmetrieachse des Stabes befinden, ist die Polarisation in radiale Richtung gerichtet und erfährt nur einen Brechungsindex. Daher treten hier keine Phasenverschiebungen auf und das Licht wird vom zweiten Polarisator blockiert. Für Strahlen die in der horizontalen Symmetrieachse liegen, ist das einfallende Licht entlang des azimutalen Brechungsindex polarisiert und erfährt ebenso keine Doppelbrechung. Für alle anderen Strahlen lässt sich die Polarisation in einen Anteil in radialer und azimutaler Richtung aufspalten, wodurch Doppelbrechung auftritt und in der Kamera eine Signalintensität registriert wird.

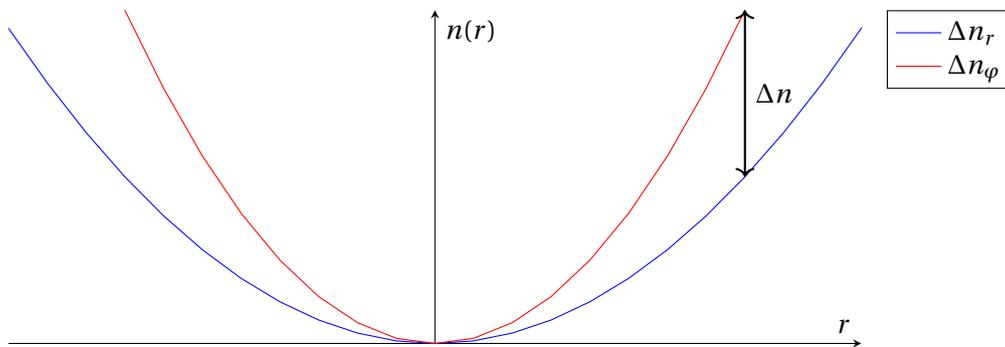


**Fig. 8:** Polarisationsrichtung (schwarz) und Richtung mit radialem Brechungsindex (blau) und azimutalem Brechungsindex (rot). Es lässt sich erkennen, dass für Strahlen entlang des Kreuzes die gesamte Polarisation nur einen Brechungsindex *sieht*.

d.) **Lösung:** Es ist trotz Doppelbrechung trotzdem möglich, dass das einfallende Licht vom Polarisator vollständig geblockt wird. Dies ist dann möglich, wenn durch die Doppelbrechung bei der Propagation durch das aktive Medium ein Phasenunterschied von  $n \cdot 2\pi$  mit  $n \in \mathbb{N}$  akkumuliert wird. Dann ändert sich effektiv die Polarisation des Lichtes hinter dem aktiven Medium nicht. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn der Brechzahlunterschied  $\Delta n$  zwischen radialer und azimuthaler Komponente einen bestimmten Wert erreicht (siehe Abbildung 9). Mathematisch lässt sich dies folgendermaßen formulieren:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} L \Delta n \stackrel{!}{=} n \cdot 2\pi \quad \Rightarrow \quad \Delta n = \frac{\lambda}{n \cdot L}. \quad (9.2)$$

Da die Brechzahl nur eine Funktion des radialen Abstandes von der Stabmitte ist, ist dies Bedingung für einen bestimmten Wert  $r'$  erfüllt. Dadurch ergibt sich hier ein Kreis, wo keine Strahlung den Polarisator passieren kann. Auf der Kamera ist dies als schwarzer Kreis zu erkennen.



**Fig. 9:** Änderung des Brechungsindex durch photoelastischen Effekt.

e.) **Lösung:** Es gibt zwei Möglichkeiten, um den thermischen Einfluss im aktiven Medium zu ändern. Eine Möglichkeit, ist das aktive Medium sehr breit und dünn zu machen. Diese Geometrie wird beispielsweise in Scheibenlasern verwendet, wo die Rückseite des aktiven Mediums als Spiegel dient und das Kühlmittel direkt dahinter angebracht wird. Die zweite Möglichkeit ist das aktive Medium sehr lang zu machen mit sehr kleiner lateraler Ausdehnung. Diese Geometrie findet sich in Faserlasern wieder. Die Grundidee ist bei beiden Methoden gleich. Durch Verringerung der Volumen-Oberflächen-Verhältnisses kann die entstehende Wärme effektiver abgeführt werden.

**Aufgabe 2:** Das ABCD-Gesetz verbindet die Propagation von Gaußstrahlen mit dem Matrixformalismus. Jeder reale Laserstrahl, der durch ein optisches System mit der Strahltransfermatrix

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (9.3)$$

mit  $\det(M) = 1$  propagiert, verändert seinen  $q$ -Parameter folgendermaßen:

$$q = \frac{Aq_0 + B}{Cq_0 + D} \quad \frac{1}{q} = \frac{C + \frac{D}{q_0}}{A + \frac{B}{q_0}}. \quad (9.4)$$

Des Weiteren ist der komplexe Strahlparameter  $q$  mit dem Krümmungsradius der Wellenfront  $R$  und dem Strahlradius  $w$  über

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi w(z)^2} \quad (9.5)$$

verknüpft.

- Gegeben sei ein Gaußstrahl mit Radius  $w_0$  und Krümmungsradius der Wellenfront  $R_0$ , der durch ein optisches System mit einer realen ABCD-Matrix propagiert. Berechnen Sie den Strahldurchmesser  $w$  in der Austrittsebene des optischen Systems.
- Wenn die Strahltransfermatrix  $M$  gegeben ist, wie berechnet sich dann die Matrix  $N$  für den umgekehrten optischen Weg aus den Elementen  $A, B, C$  und  $D$  von  $M$ ?
- Wir betrachten nun stabile Resonatoren im Strahltransfermatrixformalismus, d. h.  $q = q_0$ . Nutzen Sie das ABCD-Gesetz, um Ausdrücke für  $R$  und  $w$  in einem stabilen Resonator abzuleiten. Berechnen Sie die Stabilitätsbedingung für die Matrix  $M$ .

**a.) Lösung:** Der gegebene Gaußstrahl besitzt folgenden inversen  $q$ -Parameter:

$$\frac{1}{q_0} = \underbrace{\frac{1}{R_0}}_{=:q_r} - i \underbrace{\frac{\lambda}{\pi w_0^2}}_{=:q_i}. \quad (9.6)$$

Dabei haben wir  $q_r$  und  $q_i$  als Real- und Imaginärteil des inversen  $q$ -Parameters eingeführt. Für können nun Gleichung (9.4) nutzen, um einen Ausdruck für den neuen inversen  $q$ -Parameter hinter dem optischen System zu finden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} &= \frac{C + \frac{D}{q_0}}{A + \frac{B}{q_0}} = \frac{C + D(q_r - iq_i)}{A + B(q_r - iq_i)} = \frac{(C + Dq_r) - iDq_i}{(A + Bq_r) - iBq_i} \\ &= \frac{[(C + Dq_r) - iDq_i] \cdot [(A + Bq_r) + iBq_i]}{(A + Bq_r)^2 + B^2q_i^2}. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Für den Strahldurchmesser benötigen wir nur den Imaginärteil des inversen  $q$ -Parameters:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\left(\frac{1}{q}\right) &= \frac{Bq_i(C + Dq_r) - Dq_i(A + Bq_r)}{(A + Bq_r)^2 + B^2q_i^2} \\ &= \frac{\overbrace{q_i(BC - AD)}^{-1}}{(A + Bq_r)^2 + B^2q_i^2} = \frac{-q_i}{(A + Bq_r)^2 + B^2q_i^2}. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Im letzten Schritt haben wir die Tatsache benutzt, dass die Determinante einer ABCD-Matrix immer eins ist. Aus Gleichung (10.6) lässt sich ablesen, dass für den Strahlradius folgendes gilt:

$$\begin{aligned} w^2(z) &= \frac{-\lambda}{\pi} \frac{1}{\operatorname{Im}(1/q)} = \frac{-\lambda}{\pi} \frac{(A + Bq_r)^2 + B^2q_i^2}{-q_i} = \frac{\lambda}{\pi} \frac{1}{\operatorname{Im}(1/q)} = \frac{\lambda}{\pi} \frac{(A + Bq_r)^2 + B^2q_i^2}{\frac{\lambda}{\pi} \frac{1}{w_0^2}} \\ &= w_0^2((A + Bq_r)^2 + B^2q_i^2). \end{aligned} \quad (9.9)$$

Durch Einsetzen der Größen  $q_r$  und  $q_i$  folgt dann

$$w(z) = w_0 \sqrt{\left(A + \frac{B}{R_0}\right)^2 + B^2 \frac{\lambda^2}{\pi^2 w_0^4}}. \quad (9.10)$$

**b.) Lösung:** Durch Anwendung des umgekehrten optischen Weges  $N$  muss sich wieder der originale  $q$ -Parameter ergeben. Damit erhalten wir als Bedingung

$$N \cdot M = \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad N = M^{-1}. \quad (9.11)$$

Damit ist  $N$  die Inverse Matrix von  $M$ . Für  $2 \times 2$ -Matrizen lässt sich die Inverse mithilfe der Adjunkten Matrix ausrechnen:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad N = \frac{1}{\underbrace{\det(M)}_{=1}} \operatorname{adj}(M) = \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}. \quad (9.12)$$

Hier gilt ebenfalls wieder, dass die Determinante der ABCD-Matrix  $M$  eins sein muss, wodurch ebenfalls sichergestellt wird, dass  $N$  immer existiert.

**c.) Lösung:** Für einen stabilen Resonator nimmt das ABCD-Gesetz folgende Form an:

$$q = \frac{Aq + B}{Cq + D} \Rightarrow q(Cq + D) = Aq + B \Rightarrow q^2 + q \frac{D - A}{C} - \frac{B}{C} = 0. \quad (9.13)$$

Die sich ergebende quadratische Gleichung für  $q$  können wir mithilfe der Lösungsformel angeben als

$$q = \frac{A - D \pm \sqrt{(A - D)^2 + 4BC}}{2C}. \quad (9.14)$$

Ein realistischer  $q$ -Parameter hat jedoch einen nicht-verschwindenden Imaginärteil (endlicher Strahlradius), die Elemente einer ABCD-Matrix jedoch reell sein müssen, fordern wir, dass die Diskriminante von (9.14) kleiner als Null sein muss. Weiterhin müssen wir für die Lösung das negative Vorzeichen wählen, da der Imaginärteil negativ sein muss. Wir erhalten als Bedingung

$$(A - D)^2 + 4BC \stackrel{\det=1}{=} (A - D)^2 + 4(AD - 1) = (A + D)^2 - 4 < 0, \quad (9.15)$$

d. h. es muss für die ABCD-Matrix gelten:  $|A + D| < 2$ . Betrachten wir nun einen stabilen Resonator mit zwei Spiegeln mit  $R_1$  und  $R_2$ . Dann lässt sich die Transfermatrix  $M$  berechnen zu

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - 2L/R_1 & 2L(1 - L/R_1) \\ 2(-1/R_1 - 1/R_2 + L/(R_1 R_2)) & 1 - 2L/R_1 - 4L/R_2 + 4L^2/(R_1 R_2) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Die Stabilitätsbedingung für den Resonator ergibt sich nun zu

$$\frac{1}{2}|A + D| = \left| 1 - 2\left(\frac{L}{R_1} + \frac{L}{R_2}\right) + \frac{2L^2}{R_1 R_2} \right| < 1. \quad (9.17)$$

Mit den in der Vorlesung eingeführten Resonatorparametern  $g_1 = 1 - L/R_1$  und  $g_2 = 1 - L/R_2$  ergibt sich

$$|2g_1 g_2 - 1| \leq 1. \quad (9.18)$$

Betrachten wir zunächst den ersten Fall  $2g_1 g_2 - 1 \geq -1$ . Hier ergibt sich  $g_1 g_2 \geq 0$  und für den zweiten Fall  $g_1 g_2 \leq 1$ , also insgesamt

$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1, \quad (9.19)$$

was dem aus der Vorlesung bekannten Stabilitätskriterium entspricht.

Um nun einen Ausdruck für den Krümmungsradius der Phasen und den Strahldurchmesser im Resonator zu gewinnen, betrachten wir die quadratische Gleichung für den inversen  $q$ -Parameter:

$$\frac{1}{q} = \frac{C + D/q}{A + B/q} \Rightarrow \left(\frac{1}{q}\right)^2 + \left(\frac{1}{q}\right)\frac{A - D}{B} - \frac{C}{B} = 0 \quad (9.20)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{D - A}{2B} \pm \sqrt{\left(\frac{A - D}{2B}\right)^2 + \frac{C}{B}}. \quad (9.21)$$

Mithilfe der Lösung dieser Gleichung lassen sich allgemeine Formeln für  $R(z)$  und  $w(z)$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{D - A}{2B} \\ \frac{1}{w^2} &= -\frac{\pi}{\lambda} \operatorname{Im}\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{\pi}{\lambda} \sqrt{\left(\frac{A - D}{2B}\right)^2 + \frac{C}{B}}. \end{aligned} \quad (9.22)$$

Für das Beispiel in (9.16) ergibt sich für den Krümmungsradius beispielsweise

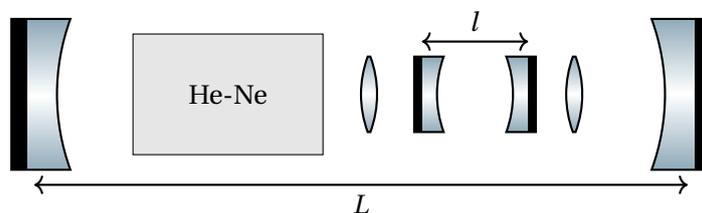
$$\frac{1}{R} = \frac{1 - 2L/R_1 - 4L/R_2 + 4L^2/(R_1 R_2) - (1 - 2L/R_1)}{2[2L(1 - L/R_1)]} = -\frac{1}{R_2}. \quad (9.23)$$

Der Phasenkrümmungsradius des Gaußstrahls entspricht dem Krümmungsradius des Spiegels. Es lässt sich also für eine gegebene ABCD-Matrix im Resonator direkt der Phasenkrümmungsradius und die Strahlbreite ausrechnen.

## 10 Zehnte Übungsserie

### Aufgabe 1:

- a) Sie sollen einen Laser realisieren, bei welchem nur eine longitudinale Mode anschwingt. Beschreiben Sie Maßnahmen einen "einfrequenten" Betrieb zu erzwingen, falls die Verstärkungsbandbreite des aktiven Mediums die Oszillation einer großen Anzahl longitudinaler Moden erlaubt.
- b) Ein He-Ne-Laser soll durch ein Etalon zur Oszillation auf einer longitudinalen Mode gezwungen werden. Die Verstärkungsbandbreite wird dabei mit 2 pm angenommen. Die Resonatorlänge beträgt  $L = 50$  cm. Folgender Aufbau des Resonators ergibt sich dabei: Zeigen Sie, dass die Transferfunktion des zweiten Resonators (Etalon) durch die



folgende Gleichung gegeben ist:

$$T = \frac{I_{out}}{I_{in}} = \frac{1}{1 + \frac{4 \sin^2(\delta)}{\Gamma^2}}, \quad (10.1)$$

mit  $\Gamma^2 = \frac{(1-R)^2}{R}$  und  $\delta = \frac{2\pi l}{\lambda}$ , wobei  $R$  die Reflektivität der beiden Spiegel ist. Hinweis: Vernachlässigen Sie den Gouy-Phasenshift.

- c) Die Finesse des zweiten Resonators soll 5 betragen. Berechnen Sie das Reflexionsvermögen der Spiegel (beide haben die gleiche Reflektivität). Hinweis: Die Finesse berechnet sich mit Hilfe von  $F \approx \pi/\Gamma$ .
- d) Wie groß muss der Abstand  $l$  der beiden Spiegel sein, so dass benachbarte Moden des Hauptresonators eine Dämpfung von  $1/e$  erfahren. Dabei ist angenommen, dass ausgewählte Resonanzen beider Resonatoren sich bei einer bestimmten Frequenz exakt überlagern.

a.) **Lösung:** Falls es das breite Verstärkungsprofil nicht zulässt, durch Verkürzung der Resonatorlänge den Laser zum Single-Mode Betrieb zu zwingen, werden in den Resonatoraufbau zusätzliche, frequenzselektive Elemente eingebaut. Eine einfache Möglichkeit stellen Prismen dar. Hier tritt wellenlängenabhängige Dispersion auf, die zu zusätzlichen frequenzabhängigen Verlusten führt. Damit lässt sich der Spektralbereich einschnüren, in dem transversale Moden anschwingen können. Zusätzlich können noch Etalons in den Resonator eingebaut werden. Dabei handelt es sich um zwei teildurchlässige Spiegel, deren Transmissionsverhalten durch die Vielstrahlinterferenz im Etalon bestimmt wird. Hierbei können zwei Etalons unterschiedlicher Dicke kombiniert werden, damit nur an einer bestimmten Frequenz im betrachteten Spektralbereich die Transmission der Etalons maximal ist. Somit lässt

sich durch ein dickes Etalon mit geringer Bandbreite eine einzelne longitudinale Mode selektieren.

**b.) Lösung:** Die Transmission des Etalons ergibt sich durch eine Interferenz aller möglichen Strahlen, die im Etalon propagieren. Dafür nehmen wir an, dass eine ebene Welle auf das Etalon einfällt und auf verschiedenen Wegen durch das Etalon transmittieren kann. Das einfallende elektrische Feld hat dabei folgende Form:

$$E(t) = E_0 e^{i\omega t}. \quad (10.2)$$

Die einfachste Möglichkeit ist direkt die Transmission durch beide Spiegel des Etalons. Allerdings kann die Welle ebenfalls auch einmal am hinteren Spiegel und anschließend nochmals am vorderen Spiegel reflektiert werden und danach erst das Etalon verlassen. Dabei sammelt sie einen Phasenshift

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (2 \cdot l) = 2\delta \quad (10.3)$$

auf. Setzen wir diesen Gedanken fort, kann die Welle ebenfalls auch viermal in der Cavity des Etalons reflektiert werden, bevor sie transmittiert wird. Das gesamte Feld ergibt sich nun als die Summe aller Wellen, die im Etalon propagieren. Da wir hier mit Feldstärken arbeiten, verwenden wir  $t = \sqrt{T}$  und  $r = \sqrt{R}$  für die Transmission und Reflexion. Es ergibt sich

$$E(t) = E_0 (t^2 e^{i\omega t} + t^2 r^2 e^{i\omega t + \varphi} + t^2 r^4 e^{i\omega t + 2\varphi} + \dots). \quad (10.4)$$

Wir merken an, dass  $T = 1 - R$  ist, woraus  $t^2 = 1 - r^2$  folgt. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} E(t) &= E_0 e^{i\omega t} (1 - r^2) [1 + r^2 e^{i\varphi} + r^4 e^{i2\varphi} + \dots] \\ &= E_0 e^{i\omega t} (1 - r^2) \sum_{n=0}^{\infty} (r^2 e^{i\varphi})^n \\ &= E_0 e^{i\omega t} \frac{1}{1 - r^2 e^{i\varphi}}. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Es ergibt sich eine geometrische Reihe, die konvergiert, da  $r^2 e^{i\varphi} < 1$  ist.

Wir können nun die Intensität über den bekannten Zusammenhang  $I = \frac{c\varepsilon_0}{2} |E|^2$  berechnen. Damit ergibt sich

$$I = \frac{c\varepsilon_0}{2} |E|^2 = \underbrace{\frac{c\varepsilon_0}{2} E_0^2 (1 - r^2)^2}_{=I_0} \underbrace{\left| \frac{e^{i\omega t}}{1 - r^2 e^{i\varphi}} \right|^2}_*. \quad (10.6)$$

Wir berechnen zunächst den Betrag des Ausdrucks (\*). Dafür nutzen wir  $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{i\omega t}}{1 - r^2 e^{i\varphi}} \right|^2 &= \frac{e^{i\omega t}}{1 - r^2 e^{i\varphi}} \frac{e^{-i\omega t}}{1 - r^2 e^{-i\varphi}} = \frac{1}{(1 - r^2 \cos \varphi) + ir^2 \sin \varphi} \frac{1}{(1 - r^2 \cos \varphi) - ir^2 \sin \varphi} \\ &= \frac{1}{(1 - r^2 \cos \varphi)^2 + r^4 \sin^2 \varphi} = \frac{1}{1 + r^4 - 2r^2 \cos \varphi}. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Zur weiteren Umformung nutzen wir die Doppelwinkelfunktion  $\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2(\varphi/2)$

$$\left| \frac{e^{i\omega t}}{1 - r^2 e^{i\varphi}} \right|^2 = \frac{1}{1 + r^4 - 2r^2 - 4r^2 \sin^2(\varphi/2)} = \frac{1}{(1 - r^2)^2 - 4r^2 \sin^2(\varphi/2)}. \quad (10.8)$$

Damit ergibt sich für das Intensitätsverhältnis  $I/I_0$  unter Verwendung von  $\varphi/2 = \delta$  und  $r^2 = R$

$$\frac{I}{I_0} \stackrel{(10.6)}{=} \frac{(1 - R)^2}{(1 - R)^2 - 4R \sin^2 \delta} = \frac{1}{1 - \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \delta} = \frac{1}{1 + \frac{4 \sin^2 \delta}{\Gamma^2}} \quad (10.9)$$

womit die gesuchte Relation gezeigt ist.

**c.) Lösung:** Zur Berechnung der Reflektivität nutzen wir den gegebenen Ausdruck für die Finesse  $F = \pi/\Gamma$ , wobei die Finesse das Verhältnis zwischen dem Modenabstand und der Bandbreite der Moden beschreibt. Setzen wir den bekannten Ausdruck für  $\Gamma$  ein, so ergibt sich

$$F = \frac{\pi \sqrt{R}}{1 - R} \Rightarrow \frac{(1 - R)^2}{R \frac{\pi^2}{F^2}}. \quad (10.10)$$

Damit ergibt sich ein quadratisches Gleichungssystem für die Reflektivität  $R$

$$0 = R^2 - R \left( 2 + \frac{\pi^2}{F^2} \right) + 1$$

$$R = 1 + \frac{\pi^2}{2F^2} - \sqrt{\left( 1 + \frac{\pi^2}{2F^2} \right)^2 - 1} = 0.539, \quad (10.11)$$

wobei  $F = 5$  eingesetzt wurde. Zudem wurde die Lösung mit dem negativen Vorzeichen gewählt, da die Reflektivität kleiner als eins sein muss.

**d.) Lösung:** Gehen wir davon aus, dass die Hauptmode mit  $\nu_0$  ungedämpft ist, dann gilt  $l = n \cdot \frac{c}{\nu_0}$ . Wir suchen nun nach der Länge, bei der die Transmission  $T$  auf  $1/e$  abfällt für die erste benachbarte longitudinale Mode. Wir fordern also

$$\frac{1}{e} \stackrel{!}{=} \frac{I_{\text{in}}}{I_{\text{out}}} = \frac{1}{1 + \frac{4}{\Gamma^2} \sin^2 \left( \frac{2\pi l \nu}{c} \right)}. \quad (10.12)$$

Mit  $\sin^2(2n\pi + x) = \sin^2(x)$  folgt durch Umstellen von (10.12)

$$\sin^2 \left( \frac{2\pi l (\nu + \Delta \nu)}{c} \right) = \sin^2 \left( \frac{2\pi l \Delta \nu}{c} \right) = \frac{\Gamma^2}{4} (e - 1). \quad (10.13)$$

Mit  $\Delta \nu = \frac{c}{2L}$ ,  $\Gamma = \pi/F$  und  $L = 50 \text{ cm}$  folgt damit für  $l$

$$l = \frac{c}{2\pi \Delta \nu} \arcsin \left( \frac{\Gamma}{2} \sqrt{e - 1} \right) = \frac{L}{\pi} \arcsin \left( \frac{\pi}{2F} \sqrt{e - 1} \right) = 6,76 \text{ cm}. \quad (10.14)$$

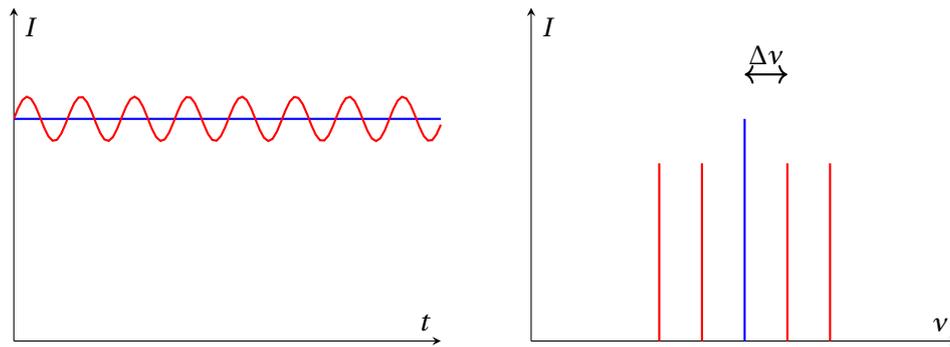
**Aufgabe 2:** Betrachten Sie zwei verschiedene, modengekoppelte Laser mit gleichem aktiven Medium und folgenden Eigenschaften:

	Laser 1	Laser 2
emittierte Zentralwellenlänge	1 $\mu\text{m}$	1 $\mu\text{m}$
Bandbreite	20 nm	20 nm
Resonatorlänge $L$	4 m	8 m
Brechzahl im Resonator	1.0	1.5
Auskoppelspiegel $R_2$	80 %	30 %
emittierte Durchschnittsleistung	300 mW	100 mW

- Erläutern Sie kurz das Konzept der aktiven Modenkopplung! Geben Sie eine kurze Erklärung im "Zeit-" und "Frequenz-Bild".
- Berechnen Sie die FWHM-Pulsdauer der emittierten Gauß-förmigen Pulse (Zeit-Bandbreite Produkt: 0.44).
- Skizzieren Sie die Longitudinalmoden der beiden Resonatoren unter Beachtung der obigen Tabelle qualitativ in einem gemeinsamen Diagramm im "Frequenz-Bild".
- Vergleichen Sie die emittierte Spitzenleistung der beiden Laser und begründen Sie das Ergebnis.
- Welcher Effekt führt dazu, dass transversale Moden höherer Ordnung andere Resonanzfrequenzen haben als die transversale Grundmode?

**a) Lösung:** Bei der Modenkopplung wird sichergestellt, dass viele longitudinale Moden gleichzeitig im Resonator oszillieren. Mithilfe eines Modulators werden sie dann gekoppelt (phasenrichtig überlagert), sodass sie nur für eine kurze Zeit konstruktiv interferieren und sich ein ultrakurzer Laserpuls bildet.

Bei der aktiven Modenkopplung wird nun ein Modulator in den Resonator eingebaut. Dieser kann entweder durch Amplituden- oder Phasenmodulation die Verluste modulieren. Wichtig ist hierbei, dass die Modulationsfrequenz dem Frequenzabstand der longitudinalen Moden des Resonators entspricht. Nehmen wir zunächst ein zeitlich konstantes Intensitätsprofil mit einer longitudinalen Mode an. Der Modulator prägt nun Verluste auf das zeitliche Intensitätsprofil auf. Damit ergeben sich im Frequenzbereich Seitenbänder mit dem Abstand der Modulationsfrequenz. Es werden also weitere longitudinale Moden angeregt, welche ebenfalls moduliert werden und ihrerseits Seitenbänder erzeugen. Dies geschieht so lange, bis alle longitudinalen Moden des Verstärkungsprofils angeregt sind und mit gleicher Phase propagieren. Im Zeitbereich lässt sich beobachten, dass sich bei den Verlustminima des Modulators ein ultrakurzer Laserpuls ausbildet.



**Fig. 10:** Modulation des zeitlichen Intensitätsprofils. Im Frequenzspektrum tauchen Seitenbänder auf. Entspricht die Modulationsfrequenz dem Modenabstand, so werden durch die Modulation weitere longitudinale Moden angeregt.

**b.) Lösung:** Für einen gaußförmigen Puls ist das Zeit-Bandbreiten Produkt gegeben als

$$t_P \cdot \delta\nu = 0.44. \quad (10.15)$$

Die in der Tabelle gegebenen Bandbreiten lassen sich folgendermaßen in den Frequenzbereich übertragen:

$$\begin{aligned} \delta\nu &= c \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) = c \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} \\ &= c \cdot \frac{20 \text{ nm}}{990 \text{ nm} \cdot 1010 \text{ nm}} = 5,996 \text{ THz}. \end{aligned} \quad (10.16)$$

Damit ergibt sich die Pulsdauer zu

$$t_P = \frac{0.44}{\delta\nu} = \frac{0.44}{5,996 \text{ THz}} = 73,4 \text{ fs}. \quad (10.17)$$

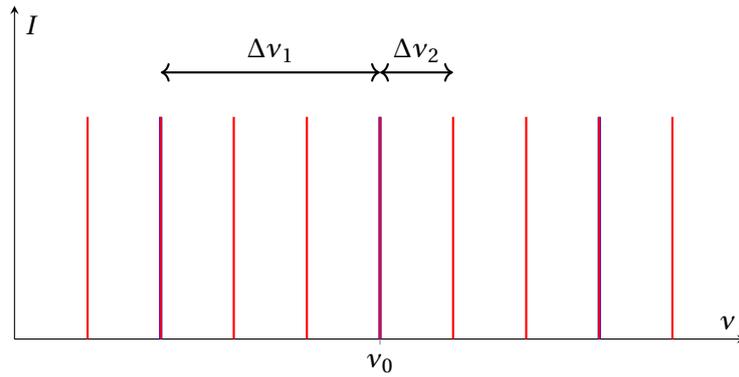
**c.) Lösung:** Für die Longitudinalmoden im Resonator ergibt sich der Frequenzabstand (FSR) zu

$$\Delta\nu = \frac{c}{2n \cdot L}, \quad (10.18)$$

wobei  $n$  die Brechzahl im Resonator und  $L$  die Resonatorlänge ist. Damit ergibt sich der freie Spektralbereich beider Resonatoren zu

$$\begin{aligned} \Delta\nu_1 &= \frac{c}{1 \cdot 8 \text{ m}} = 37,47 \text{ MHz} \\ \Delta\nu_2 &= \frac{c}{1.5 \cdot 16 \text{ m}} = 12,49 \text{ MHz}. \end{aligned} \quad (10.19)$$

Damit ergibt sich  $\Delta\nu_1 = 3\Delta\nu_2$ . Im Frequenz-Bild lässt sich dies folgendermaßen darstellen (siehe Abbildung 11)



**Fig. 11:** Longitudinale Moden der beiden Resonatoren. In blau sind die Moden des ersten Resonators dargestellt, während in rot die Moden des zweiten Resonators gezeigt sind.  $\nu_0 = 300 \text{ THz}$  ist die Frequenz des Übergangs

**d.) Lösung:** Zur Berechnung der emittierten Spitzenleistung benötigen wir die Pulsenergie und Pulsdauer  $t_p$ . Letzteres haben wir bereits in Teilaufgabe b.) berechnet zu  $t_p = 73,4 \text{ fs}$ . Die Pulsenergie  $E_{\text{Puls}}$  ist mit der Pulsfolgefrequenz  $f_{\text{rep}}$  und der emittierten Durchschnittsleistung  $P$  verknüpft über  $P = E_{\text{Puls}} \cdot f_{\text{rep}}$ . Nehmen wir an, dass bei jedem Resonatorumlauf ein Puls ausgekoppelt wird, dann entspricht die Pulsfolgefrequenz dem inversen der Resonatorumlaufzeit

$$E_{\text{Puls}} = \frac{P}{f_{\text{rep}}} = \frac{P \cdot 2nL}{c}. \quad (10.20)$$

Unter Annahme eines gaußförmigen Pulses haben wir bereits in der ersten Übungsserie einen Ausdruck für die Pulsenergie als Funktion der Spitzenleistung  $P_{\text{Puls}}$  hergeleitet

$$E_{\text{Puls}} = P_{\text{Puls}} \cdot t_p \underbrace{\sqrt{\frac{\pi}{4 \ln 2}}}_{\approx 1.06}. \quad (10.21)$$

Ein Vergleich ergibt direkt

$$P_{\text{Puls}} = \frac{E}{t_p \cdot 1.06} = \frac{P \cdot 2nL}{t_p \cdot c \cdot 1.06} \quad \begin{aligned} P_{\text{Puls},1} &= \frac{300 \text{ mW} \cdot 2 \cdot 4 \text{ m}}{73,4 \text{ fs} \cdot c \cdot 1.06} = 102,9 \text{ kW} \\ P_{\text{Puls},2} &= \frac{100 \text{ mW} \cdot 2 \cdot 1.5 \cdot 8 \text{ m}}{73,4 \text{ fs} \cdot c \cdot 1.06} = 102,9 \text{ kW} \end{aligned} \quad (10.22)$$

Es zeigt sich, dass die emittierte Spitzenleistung beider Laser gleich ist. Zwar ist die Durchschnittsleistung des ersten Lasers dreimal so hoch, jedoch ist im zweiten Leistung der optische Weg  $n \cdot L$  der Dreifache, weshalb die Pulsfolgefrequenz um einen Faktor drei verringert ist. Laser 1 emittiert also einfach nur die dreifache Anzahl an Pulsen pro Zeitintervall, die Pulsenergie ist jedoch gleich.

**e.) Lösung:** Der Grund für die Abweichung der Resonanzfrequenzen stellt die Gouy-Phase dar. Sie beschreibt die Phasenabweichung des Strahls im Resonator von der ebenen Welle. Für höhere transversale Moden ist der Gouy-Phasenshift um den Faktor  $(m + n + 1)$  stärker ausgeprägt als für die  $\text{TEM}_{00}$  Mode. Damit steigt die Resonanzfrequenz mit höherer Modenordnung (gleiche longitudinale Mode) an.