

FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA  
PHYSIKALISCH-ASTRONOMISCHE-FAKULTÄT



**FRIEDRICH-SCHILLER-  
UNIVERSITÄT  
JENA**

PROF. CARSTEN RONNING

---

## **Kerne und Teilchen**

---

Übungsserien

Sommersemester 2020

**Name:** MARTIN BEYER

# Contents

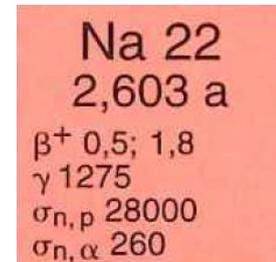
<b>1</b>	<b>Übungsserie 1</b>	<b>3</b>
1.1	Karlsruher Nuklidkarte Beschreibung . . . . .	3
1.2	Fragen zur Nuklidkarte . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Übungsserie 2</b>	<b>6</b>
2.1	Streuversuch von Rutherford . . . . .	6
2.2	Coulomb-Energie, Bestimmung von $r_0$ . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Übungsserie 3</b>	<b>9</b>
3.1	Massenbestimmung von Neutronen . . . . .	9
3.2	Separationsenergie von $\alpha$ -Teilchen . . . . .	10
3.3	Bethe-Weizsäcker-Zyklus der Sonne . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Übungsserie 4</b>	<b>12</b>
4.1	Bethe-Weizsäcker-Formel . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Übungsserie 5</b>	<b>16</b>
5.1	Quadrupolmoment . . . . .	16
5.2	Magnetische Dipolmomente - Schmidt-Modell . . . . .	18
<b>6</b>	<b>Übungsserie 6</b>	<b>20</b>
6.1	Kernspinwerte nach dem Schalenmodell . . . . .	20
6.2	Das Zerfallsgesetz . . . . .	21

# 1 Übungsserie 1

## 1.1 Karlsruher Nuklidkarte Beschreibung

### Natrium

Das dargestellte Nuklid ist  $^{22}_{11}\text{Na}_{11}$ . Die Zahl rechts neben dem Elementsymbol steht für die Massenzahl  $A$ . In der zweiten Zeile ist die Halbwertszeit mit 2,603 a datiert. Der Zerfallsprozess des Nuklids ist  $\beta^+$ -Zerfall, was durch die rote Farbe des Kästchens und in der dritten Zeile angedeutet wird. Für den Positronen-Zerfall sind zwei Prozesse möglich, deren Maximalenergie 0,5 MeV bzw. 1,8 MeV beträgt. Zudem emittiert es Gamma-Quanten mit einer Energie von 1275 keV.



Der (n,p)-Wirkungsquerschnitt der Reaktion  $^{22}\text{Na}(n,p)^{22}\text{Ne}$  beträgt 28 000 b und der (n, $\alpha$ )-Wirkungsquerschnitt der Reaktion  $^{22}\text{Na}(n,\alpha)^{19}\text{F}$  beträgt 260 b.

### Uran

Im nebenstehenden Bild ist das am häufigsten vorkommende Nuklid des Urans  $^{238}_{92}\text{U}_{146}$  dargestellt. Es weist im natürlichen Element eine Häufigkeit von 99,27 % auf. Die farbliche Unterteilung weist darauf hin, dass es sich hierbei um ein Radionuklid handelt, welches bei der Bildung der Erde entstand und heute noch vorhanden ist.



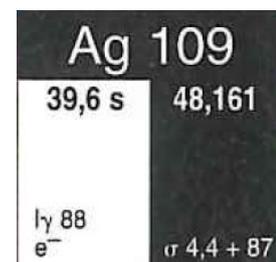
In der linken Spalte ist der metastabile Grundzustand dargestellt, der eine Halbwertszeit von 270 ns besitzt. Der Ausdruck  $|\gamma$  steht für Gamma-Quanten (der Energie 2514 keV und 1879 keV und weitere), die beim Zerfall desselben Nuklids in den Grundzustand entstehen. Der Term sf steht für Spontanzerfall (spontaneous fission) des Nuklids.

Auf der rechten Seite ist die Halbwertszeit des stabilen Grundzustandes dargestellt, was hauptsächlich unter Emission von  $\alpha$ -Strahlung zerfällt, welche eine Energie von 4,198 MeV besitzt. Weiterhin deutet  $2\beta^-$  darauf hin, dass zwei  $\beta^-$ -Teilchen (doppelter  $\beta^-$ -Zerfall) auftritt  $^{238}_{92}\text{U} \rightarrow ^{238}_{94}\text{Pu}$ .

$e^-$  steht für die Emission von Konversionselektronen, welche häufiger als Gamma-Quanten auftreten. Der (n, $\gamma$ )-Wirkungsquerschnitt beträgt 2,7 b. Der Querschnitt für die Spaltung des Urans beträgt  $\sigma_f = 3 \cdot 10^{-6}$  b.

### Silber

Bei dem dargestellten Nuklid handelt es sich um  $^{109}_{47}\text{Ag}_{62}$ . Hier tritt ein metastabiler Zustand (weißes Feld) mit einer Halbwertszeit von 39,6 s auf, welcher Gamma-Quanten der Energie 88 keV und Konversionselektronen emittiert.



Auf der rechten Seite befindet sich die natürliche Häufigkeit des

Nuklids mit 48 %. Der  $(n,\gamma)$ -Wirkungsquerschnitt  $(n,\gamma)$  für die Bildung metastabiler und des Grundzustandes des  $^{110}\text{Ag}$  mit thermischen Neutronen beträgt  $4.4 + 87\text{b}$ .

### Kalium

Im nebenstehenden Bild ist das Nuklid  $^{40}_{19}\text{K}_{21}$  dargestellt. Dabei handelt es sich ebenfalls wieder um ein Radionuklid mit einem natürlichen Vorkommen von 0,0117 %. Es zerfällt mit einer Halbwertszeit von  $1,28 \cdot 10^9$  Jahren. Die farbliche Unterteilung in rot und blau, sowie der Reihenfolge der Zerfallsprozesse weist darauf hin, dass es mit  $\geq 50\% \beta^- \leq 95\%$  als  $\beta^-$ -Strahler und  $\geq 5\% \beta^+ \leq 50\%$  als  $\beta^+$ -Strahler zerfällt. Weiterhin sind auch die  $(n,p)$ -,  $(n,\alpha)$  und  $(n,\gamma)$ -Wirkungsquerschnitte angegeben.

K 40	
0,0117	
1,28 · 10 <sup>9</sup> a	
$\beta^-$ 1,3; $\epsilon$ ; $\beta^+$ ...	
$\gamma$ 1461; $\sigma_{n,p}$ 4,4	
$\sigma_{30}$ ; $\sigma_{n,\alpha}$ 0,39	

### Brom

Das Nuklid  $^{80}_{35}\text{Br}_{45}$  ist ein radioaktives Nuklid, was durch  $\beta^-$ -Emission zerfällt. Es existiert ein metastabiler- und ein Grundzustand. Der eine metastabile Zustand zerfällt nach 4,4 h unter Emission von Gamma-Quanten in den Grundzustand und dieser nach 17,6 min per  $\beta^-$  oder  $\beta^+$  Zerfall. Das  $\epsilon$  bedeutet, dass Elektroneneinfang wahrscheinlicher stattfindet, als  $\beta^+$ -Zerfall. Zudem kann das Nuklid mit geringer Wahrscheinlichkeit unter Emission von Gamma-Strahlung mit zwei Übergängen zerfallen.

Br 80	
4,42 h	17,6 m
	$\beta^-$ 2,0...
	$\epsilon$ ;
	$\beta^+$ 0,9
$\gamma$ 37...	$\gamma$ 616;
$e^-$	666...

## 1.2 Fragen zur Nuklidkarte

a.) *Welches ist der leichteste Kern, der durch  $\beta^-$ -Zerfall zerfällt? Welche Zerfallsenergie wird dabei frei?*

Das leichteste Nuklid, was unter  $\beta^-$ -Strahlung zerfällt ist das freie Neutron mit einer Massenzahl von  $A = 1$ . Es setzt dabei die Energie von 0,8 MeV frei.

Der leichteste Kern (der mindestens ein Proton besitzt) und unter  $\beta^-$ -Strahlung zerfällt ist das Tritium mit einer Energie von 0,02 MeV.

b.) *Für einige Elemente existiert nur ein stabiles Isotop (z.B. Aluminium), für andere dagegen mehrere (z.B. Silizium). Erkennen sie hierzu eine Systematik?*

Es fällt auf, dass Elemente mit gerader Kernladungszahl  $Z$  fast immer (Ausnahme Beryllium) mindestens zwei stabile Isotope besitzen. Vermutlich liegt das daran, dass diese Kerne aufgrund der Spin-Bahn-Kopplung der Protonen stabiler sind und sich öfter zwei stabile Isotope bilden. Weiter hinten auf der Nuklidkarte ( $A > 70$ ) fällt ebenfalls auf, dass es für gerade Massenzahlen  $A$  immer zwei stabile Isotope gibt, während bei ungerader Massenzahl nur ein stabiles Isotop existiert. Zudem bilden Kerne mit  $Z > 7$  keine stabilen Isotope mit  $Z, N$  jeweils ungerade aus.

c.) *Wodurch zeichnen sich die Isotope  $^3\text{He}$ ,  $^{10}\text{B}$  und  $^{113}\text{Cd}$  aus? Welche spezifischen Anwendungen ergeben sich daraus?*

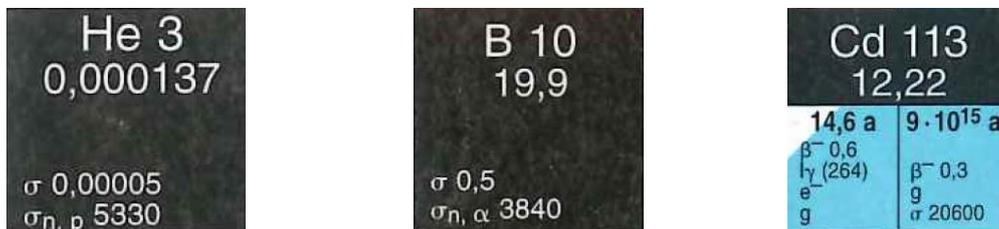


Figure 1: Die drei zu vergleichenden Nuklide.

Alle drei Nuklide weisen einen hohen Wirkungsquerschnitt bei dem Einfang von Neutronen auf. Bei Helium ist dabei der (n,p)-Querschnitt sehr groß, bei Bor der (n,α)-Querschnitt und beim Grundzustand des Cadmiums der (n,γ)-Querschnitt.

Somit eignen sich diese Nuklide besonders gut zur Absorption von Neutronen und werden beispielsweise als Abschirmung von Neutronen verwendet oder zur Steuerung der Neutronenzahl im Reaktorkern eines Kernkraftwerkes eingesetzt. Weiterhin werden die Isotope bei der Bor-Neutron Einfangtherapie in der Krebsbehandlung eingesetzt.

## 2 Übungsserie 2

### 2.1 Streuversuch von Rutherford

**Aufgabe 3:** In einem Rutherford'schen Streuversuch werden  $\alpha$ -Teilchen ( $A_\alpha = 4, Z_\alpha = 2$ ) auf eine Goldfolie ( $A_{\text{Au}} = 197, Z_{\text{Au}} = 79$ ) geschossen. Berechnen Sie die Energie  $E_{\alpha, \text{krit}}$  der  $\alpha$ -Teilchen, bei der unter einem Rückstreuwinkel von  $\vartheta = 180^\circ$  erstmals eine Abweichung vom Rutherford'schen Streuquerschnitt auftritt. Verwenden Sie dazu die Beziehung  $R = r_0 A^{1/3}$  für den Radius der Atomkerne.

**Lösung:** Es wird angenommen, dass Abweichungen zum Rutherford'schen Streuquerschnitt auftreten, wenn das  $\alpha$ -Teilchen während des Streuvorgangs in den Kernbereich gelangt  $r < r_K$  und somit starke Kernkräfte auftreten. Dies geschieht dann, wenn die kinetische Energie des  $\alpha$ -Teilchens größer ist als die potentielle Energie der Coulomb-Abstoßung am Kernrand. Es wird somit folgender Ansatz gewählt:

$$E_{\text{Pot}} = \frac{Z_\alpha \cdot Z_{\text{Au}} \cdot e^2}{4\pi\epsilon_0 r_K} \stackrel{!}{=} E_\alpha^{\text{krit.}} \quad (2.1)$$

Für den Kernradius wird die in der Vorlesung verwendete Formel genutzt

$$r_K = r_0 \cdot A_{\text{Au}}^{1/3} = 1,3 \text{ fm} \cdot (197)^{1/3} \approx 7,56 \text{ fm}. \quad (2.2)$$

Wird dies nun in (2.1) eingesetzt, ergibt sich

$$E_\alpha^{\text{krit.}} = \frac{2 \cdot 79 \cdot 1,6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}}{4\pi\epsilon_0 7,56 \text{ fm}} = 4,8 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 30,1 \text{ MeV}. \quad (2.3)$$

## 2.2 Coulomb-Energie, Bestimmung von $r_0$

**Aufgabe 4:** Geben Sie die Coulomb-Energie  $E_C$  einer homogen geladenen Kugel mit Radius  $R$  und Ladung  $Q$  an. Berechnen Sie daraus die Differenz  $\Delta E_C$  der Coulomb-Energie für die Spiegelkerne  ${}^A_Z X_{N-1}$  und  ${}^A_{Z-1} Y_N$  als Funktion der Massenzahl  $A$ , indem Sie für den Radius wieder die Beziehung  $R = r_0 A^{1/3}$  annehmen. Bestimmen Sie  $r_0$ , indem Sie die Daten aus der Tabell über einer geeigneten Potenz von  $A$  auftragen.

**Lösung:** Die potentielle Energie einer Probeladung außerhalb einer Ladungsverteilung ist gegeben durch

$$E_{\text{Pot}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(r)}{r}. \quad (2.4)$$

Die Ladung in einer homogen ( $\rho = \text{konstant}$ ) geladenen Kugel mit  $r \leq R$  ergibt sich zu

$$\begin{aligned} Q(r) &= \iiint \rho \, d^3r = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho, \quad \rho = \frac{Z \cdot e}{\frac{4}{3}\pi R^3} \\ &= \frac{r^3}{R^3} Z \cdot e. \end{aligned} \quad (2.5)$$

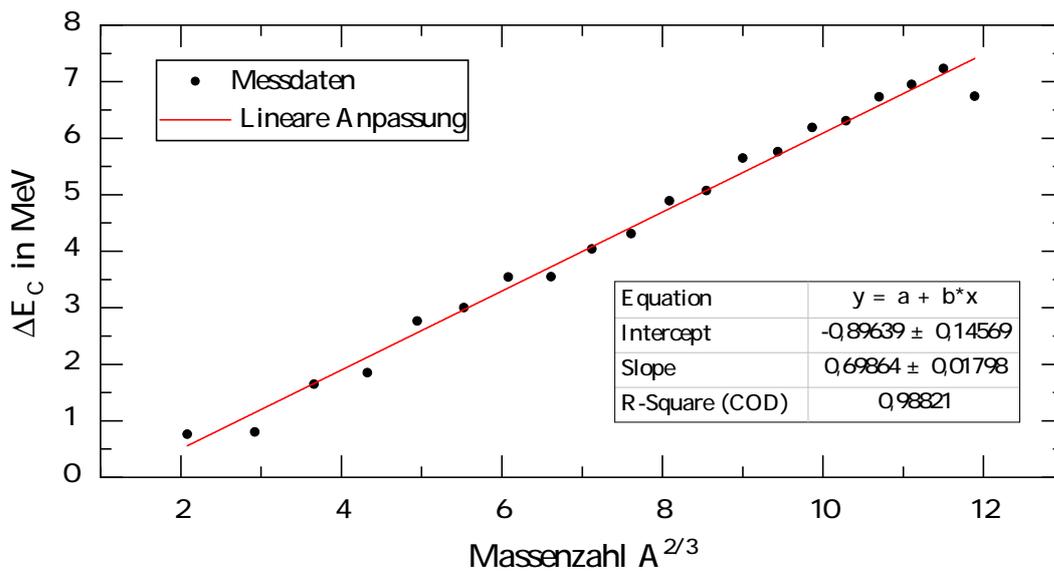
Eine Kugelschale der Dicke  $dr$  trägt die Ladung  $dq = 4\pi r^2 \rho \, dr$ . Durch Integration über alle Kugelschalen, lässt sich die damit die Coulomb-Energie der Kugel gewinnen

$$\begin{aligned} E_C &\stackrel{(2.4)}{=} \int_0^R \frac{4\pi r^2 \rho \, dr}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(r)}{r} \stackrel{(2.5)}{=} \int_0^R \frac{r^4}{R^3} \frac{Z \cdot e}{\epsilon_0} \underbrace{\frac{Z \cdot e}{\frac{4}{3}\pi R^3}}_{=\rho} \, dr \\ &= \frac{3Z^2 \cdot e^2}{4\pi\epsilon_0 R^6} \int_0^R r^4 \, dr = \frac{3}{5} \frac{Z^2 \cdot e^2}{4\pi\epsilon_0 R}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Nun lässt sich die Differenz  $\Delta E_C$  der Coulomb-Energie als Funktion der Massenzahl ausdrücken

$$\begin{aligned} \Delta E_C &= E_C(X) - E_C(Y) = E_C({}^A_Z X_{N-1}) - E_C({}^A_{Z-1} Y_N) \\ &= \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} (Z^2 - (Z-1)^2) = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0 A^{1/3}} (2Z-1) \\ &\stackrel{*}{=} \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0 A^{1/3}} \cdot A = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} A^{2/3}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

(\*) In diesem Schritt wurde die Eigenschaft der Spiegelkerne genutzt, dass  $Z-1 = N$  gilt, woraus  $Z = \frac{A+1}{2}$  folgt.



**Figure 2:** Lineare Anpassung des Messwerte.

Mithilfe der linearen Anpassung  $\Delta E_C(A^{2/3}) = m \cdot A^{2/3}$  aus Abbildung 2 lässt sich mithilfe des Anstiegs ein Wert für  $r_0$  ermitteln. Nach (2.7) entspricht der Anstieg

$$m = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} \Rightarrow r_0 = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m}. \quad (2.8)$$

Wird nun  $m = 0,69864 \text{ MeV}$  eingesetzt ergibt sich

$$r_0 = \frac{3}{5} \frac{(1,6022 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 0,69864 \text{ MeV}} = 1,24 \text{ fm}. \quad (2.9)$$

## 3 Übungsserie 3

### 3.1 Massenbestimmung von Neutronen

**Aufgabe 5:** Die Masse eines Neutrons kann nicht im Massenspektrometer gemessen werden, da die Lorentzkraft nicht auf neutrale Teilchen wirken kann. Schlagen Sie eine alternative Methode vor, um die Masse des Neutrons zu bestimmen.

**Lösung:** Die Masse des Neutrons lässt sich über Kernreaktionen vermessen. Betrachtet wurde dabei von CHADWICK und GOLDHABER 1934 die Photospaltung des Deuterons in seine Bestandteile Neutron und Proton bei der Bestrahlung mit Gammastrahlung der Energie von 2,227 MeV. Die Reaktionsgleichung lautet folgendermaßen:



Das Deuterium zerfällt, wenn die verwendete Gammastrahlung der Bindungsenergie des Deuterons entspricht. Diese ist definiert als

$$B = c^2 \cdot [m_n + m({}^1_1\text{H}) - m({}^2_1\text{D})]. \quad (3.2)$$

Die Masse des Wasserstoff- und Deuteriumatoms können mithilfe von Massenspektrometern ausgemessen werden und ergeben sich zu

$$\begin{aligned} m({}^1_1\text{H}) &= 1,008 \text{ u} \\ m({}^2_1\text{D}) &= 2,014\,101\,777\,85 \text{ u} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Wird nun Gleichung (3.2) nach der Neutronenmasse umgestellt, so ergibt sich

$$m_n = m({}^2_1\text{D}) - m({}^1_1\text{H}) + \frac{B}{c^2}. \quad (3.4)$$

Werden nun die Werte aus (3.3) in (3.4) eingesetzt, ergibt sich:

$$\begin{aligned} m_n &= 2,014\,101\,777\,85 \text{ u} - 1,008 \text{ u} + \frac{2,227 \text{ MeV}}{299\,782\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \\ &= 1,0085 \text{ u}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

### 3.2 Separationsenergie von $\alpha$ -Teilchen

**Aufgabe 5:** Um den Nachweis langsamer Neutronen zu führen, benutzt man die Reaktion  $^{10}\text{B}(n,\alpha)^7\text{Li}$ . Wie groß ist die Separationsenergie für das  $\alpha$ -Teilchen? Berechnen Sie die den  $Q$ -Wert (die frei werdene Energie) dieser Reaktion).

Kern	$^2_1\text{H}_1$ (d)	$^3_1\text{H}_2$ (t)	$^3_2\text{He}_1$	$^4_2\text{He}_2$ ( $\alpha$ )	$^6_3\text{Li}_3$	$^7_3\text{Li}_4$	$^8_4\text{Be}_4$ ( $\rightarrow 2\alpha$ )	$^9_4\text{Be}_5$	$^{10}_5\text{B}_5$	$^{11}_5\text{B}_6$	$^{12}_6\text{C}_6$
B	2,225	8,482	7,718	28,29	31,99	39,24	56,49	58,16	64,75	76,20	92,16
B/A	1,11	2,83	2,57	7,07	5,33	5,60	7,06	6,46	6,47	6,93	7,67
$S_n$	2,22	6,25	—	20,6	5,66	7,25	18,9	1,67	8,44	11,4	18,7
$S_p$	2,22	—	5,49	19,8	4,65	9,98	17,2	16,9	6,59	11,2	15,9
$\delta_n$	—	4,0	—	—	—	1,6	—	—	—	3	—
$\delta_p$	—	—	3,3	—	—	—	7,22	14,9	—	—	4,7

**Figure 3:** Bindungsenergie für die leichtesten Kerne in MeV.  $S_n, S_p$  beschreibt die Separationsenergie für Neutronen bzw. Protonen und  $\delta_n, \delta_p$  die Paarungsenergien.

**Lösung:** Die Separationsenergie des  $\alpha$ -Teilchens ergibt sich aus der Differenz der Bindungsenergie  $^{11}_5\text{B}_6$  und  $^7_3\text{Li}_4$ . Aus der Tabelle lässt sich dabei ein Wert von

$$S_\alpha = B(^{11}_5\text{B}_6) - B(^7_3\text{Li}_4) - B(^4_2\text{He}_2) = 76,20 \text{ MeV} - 39,24 \text{ MeV} - 28,29 \text{ MeV} = 8,67 \text{ MeV} \quad (3.6)$$

ablesen. Der  $Q$ -Wert lässt sich berechnen als die Differenz der Ruheenergien vor der Reaktion und der Ruheenergien nach der Reaktion:

$$Q = c^2 [m(^{10}_5\text{B}_5) + m_n - m(^7_3\text{Li}_4) - m_\alpha]. \quad (3.7)$$

Für die Massen von  $^{10}_5\text{B}_5$ ,  $^7_3\text{Li}_4$  und dem  $\alpha$ -Teilchen wird die allgemeine Formel der Bindungsenergie umgestellt:

$$\begin{aligned} c^2 m(^{10}_5\text{B}_5) &= c^2 [5m(^1_1\text{H}) + 5m(^1_0\text{n})] - B(^{10}_5\text{B}_5) \\ c^2 m(^7_3\text{Li}_4) &= c^2 [3m(^1_1\text{H}) + 4m(^1_0\text{n})] - B(^7_3\text{Li}_4) . \\ c^2 m(^4_2\text{He}_2) &= c^2 [2m(^1_1\text{H}) + 2m(^1_0\text{n})] - B(^4_2\text{He}_2) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dies wird nun in (3.7) eingesetzt und es folgt:

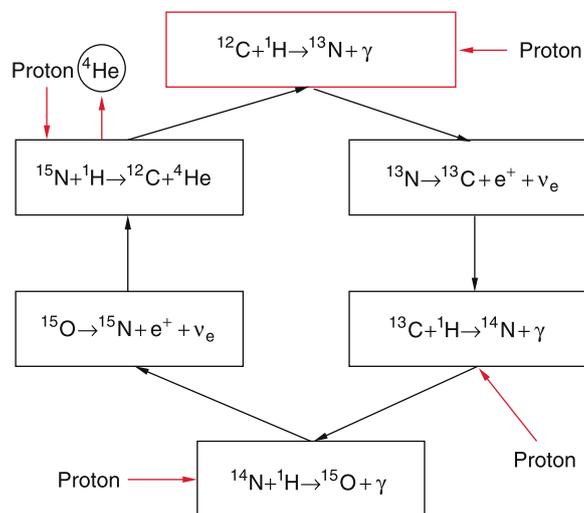
$$\begin{aligned} Q &= -B(^{10}_5\text{B}_5) + B(^7_3\text{Li}_4) + B(^4_2\text{He}_2) \\ &= (-64,75 + 39,24 + 28,29) \text{ MeV} = 2,78 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

### 3.3 Bethe-Weizsäcker-Zyklus der Sonne

**Aufgabe 5:** Beschreiben Sie den Bethe-Weizsäcker-Zyklus (CNO-Zyklus) für die Wasserstoffverbrennung in der Sonne. Wie ist die Teilchenbilanz?

**Lösung:** Für Sterne mit einer Masse  $M > 2.3M_{\odot}$  wird die Zentraltemperatur so hoch, dass in einem kleinen Kerngebiet der CNO-Zyklus beginnt. Dieser heizt das Sternzentrum weiter auf, sodass alle höheren Elemente bis zum Eisen durch Fusion erzeugt werden können. In der Sonne spielt dieser aufgrund ihrer geringen Masse nur eine sehr untergeordnete Rolle.

Hier wird die Fusion von Protonen zu Heliumkernen durch Kohlenstoff katalysiert. Der Kreislauf-Prozess verwandelt über sechs Teilschritte vier Protonen in einen Heliumkern. Die einzelnen Schritte sind in Abbildung 4 dargestellt. Der Prozess spielt nur dann eine Rolle,



**Figure 4:** Schematische Darstellung des CNO-Zyklus nach [Demtröder 4, S.315].

wenn genügend Kohlenstoff in der Brennzzone vorhanden ist und ist er dann wahrscheinlicher als die Proton-Proton-kette, wenn die Temperaturen oberhalb von 18 Millionen Grad Celsius liegen.

Die Gesamtteilchenbilanz ergibt sich somit zu



## 4 Übungsserie 4

### 4.1 Bethe-Weizsäcker-Formel

**Aufgabe 8:** Bestimmen Sie aus der Weizsäcker'schen Massenformel das stabilste Isobar der Isobarenreihe  $A = 57$ .

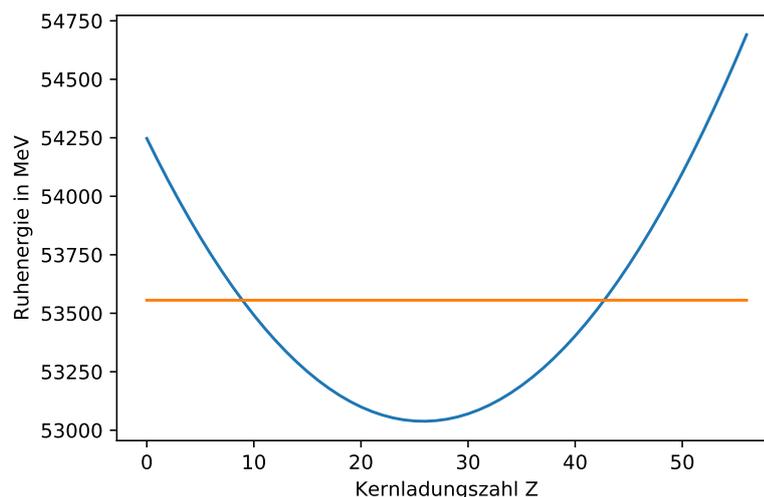
**Lösung:** Es ergibt sich nach der Vorlesung die WEIZSÄCKER'sche Massenformel zu:

$$m(Z, N) = Z \cdot m_H + N \cdot m_n - a_V \frac{A}{c^2} + a_S \frac{A^{2/3}}{c^2} + a_C \frac{Z^2}{A^{1/3} c^2} + a_{AS} \frac{\left(Z - \frac{A}{2}\right)^2}{A c^2} - a_P \frac{\delta}{c^2} \frac{1}{\sqrt{A}} \quad (4.1)$$

mit den experimentellen Konstanten:

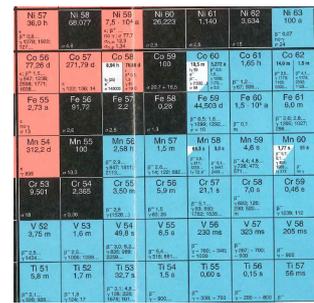
$$\begin{aligned} a_V &= 15,85 \text{ MeV} & a_S &= 18,34 \text{ MeV} & a_C &= 0,71 \text{ MeV} \\ a_A &= 92,86 \text{ MeV} & a_P &= 11,46 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

Es wird nun mithilfe eines Python-Programms für alle Kernladungszahlen im Bereich von  $Z \in [0, 57]$ ,  $Z \in \mathbb{N}$  die Masse des hypothetischen Nuklids ausgerechnet. Die Ruheenergie  $E = m_0 c^2$  ist in der folgenden Abbildung grafisch aufgetragen.



**Figure 5:** Ruheenergie der Isobarenreihe  $A = 57$ . Als Vergleich ist in orange die Ruheenergie von 57 Neutronen dargestellt.

Die Kernladungszahl mit der geringsten Ruhenergie ist  $Z = 26$ , was dem Nuklid  $^{57}_{26}\text{Fe}$  entspricht. Ein Vergleich mit der Nuklidkarte zeigt, dass  $^{57}_{26}\text{Fe}$  das einzige, stabile Nuklid der Isobarenreihe ist. Tatsächlich ergibt sich für ungerade Massenzahlen für genügend großes  $A$  nur genau ein stabiles Nuklid.



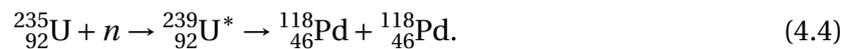
Alternativ lässt sich die Aufgabe lösen, indem (4.1) nach  $Z$  differenziert wird, um ein Minimum zu finden. Die Ableitung ergibt

$$\frac{\partial m(Z, A)}{\partial Z} = m_H - m_n + 2a_C \frac{Z}{A^{1/3}} + 2a_A \frac{Z - \frac{A}{2}}{A} \stackrel{!}{=} 0. \quad (4.2)$$

Die Ableitung wird nun schrittweise nach  $Z$  aufgelöst

$$\begin{aligned} \Rightarrow Z \left( 2a_C \frac{1}{A^{1/3}} + \frac{2a_A}{A} \right) &= a_A + m_n - m_H \\ \Rightarrow Z &= \frac{A a_A + m_n - m_H}{2 a_C A^{2/3} + a_A} \approx 25,8. \end{aligned} \quad (4.3)$$

**Aufgabe 9:** Betrachten Sie die symmetrische Spaltung:



Wie groß ist die freigesetzte Energie  $Q$  aus der Weizsäcker'schen Massenformel? Warum ist der Wert kleiner als ca. 210 MeV, den wir nach dem  $B/A$ -Diagramm erwarten würden?

**Lösung:** Die freigesetzte Energie lässt sich direkt aus der Differenz der Ruheenergien der Edukte und Produkte berechnen

$$Q = c^2 [m(^{235}_{92}\text{U}) + m_n - 2 \cdot m(^{118}_{46}\text{Pd})]. \quad (4.5)$$

Werden die jeweiligen Kernladungszahlen und Massezahlen in die Formel (4.1) eingesetzt, ergibt sich ein Wert von

$$Q = 186,11 \text{ MeV}. \quad (4.6)$$

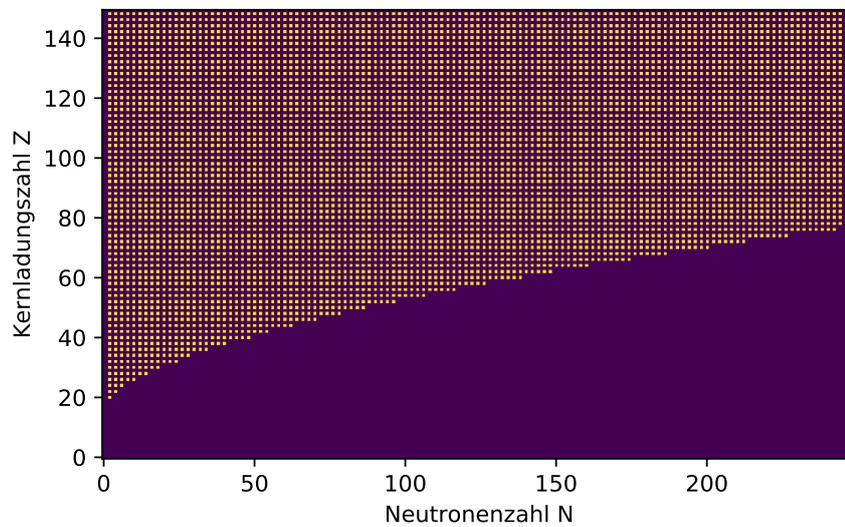
Der  $Q$ -Wert ist niedriger, da im  $B/A$ -Diagramm nur Übergänge zu stabilen Nukliden eingetragen wurden. Das Palladium zerfällt aber selbst noch weiter zu Selen.

**Aufgabe 10:** Ein gg-Kern soll in zwei identische Kerne zerfallen. Bestimmen Sie mit Hilfe der Bethe Weizsäcker-Formel den Wertebereich für  $Z^2/A$ , in dem dies rein energetisch möglich ist. Welchem Wertebereich von  $Z$  bzw.  $A$  entspricht dies? Verwenden Sie dabei die Näherung  $a_p = 0$ .

Zur Lösung dieser Aufgabe wurde ebenfalls Python verwendet und für gg-Kerne geprüft, ob nach der BETHE-WEIZSÄCKER-Formel die Differenz

$$m(Z, A) - 2 \cdot m(Z/2, A/2) > 0 \quad (4.7)$$

erfüllt ist. Dies wurde graphisch aufgetragen und ist im Folgenden dargestellt.



**Figure 6:** Hypothetische Möglichkeit der Kernspaltung für alle in gelb dargestellten Nuklide.

Unter der Annahme  $a_p = 0$  lässt sich das Problem auch analytisch lösen. Dafür wird die Ungleichung (4.7) nach  $Z^2/A$  aufgelöst. Zur besseren Übersichtlichkeit wird  $c^2$  in die Konstanten gewälzt.

$$Zm_H + (A-Z)m_n - a_V A + a_S A^{2/3} + a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} + \frac{a_A}{A} \left( \frac{Z-A}{2} \right)^2 - 2 \left[ \frac{Z}{2} m_H + \frac{A-Z}{2} m_n - a_V \frac{A}{2} + a_S \frac{A^{2/3}}{2^{2/3}} + a_C \frac{Z^2}{4} \frac{A^{-1/3}}{2^{-1/3}} + \frac{a_A}{2A} \left( \frac{Z-A}{2} \right)^2 \right] > 0.$$

Es folgt damit

$$0 < a_S A^{2/3} + \frac{Z^2}{A^{1/3}} - 2a_S \frac{A^{2/3}}{2^{2/3}} - 2a_C \frac{Z^2}{4} \frac{A^{-1/3}}{2^{-1/3}} \\ 0 < a_S (1 - 2^{1/3}) A + a_C Z^2 (1 - 2^{-2/3}). \quad (4.8)$$

Schließlich ergibt sich für  $Z^2/A$  der Ausdruck

$$\frac{Z^2}{A} > \frac{a_S}{a_C} \frac{2^{1/3} - 1}{1 - 2^{-2/3}} \approx 18,14. \quad (4.9)$$

Für alle schwereren Kerne gilt  $Z > N$ . Dabei verhält sich die Massenzahl  $A$  gegenüber  $Z$  mit  $A \approx 2,3Z$ . Damit ergibt sich als untere Schranke für die symmetrische Kernspaltung

$$Z \geq 42, \quad A \geq 96. \quad (4.10)$$

## 5 Übungsserie 5

### 5.1 Quadrupolmoment

**Aufgabe 11:** Zeigen Sie, dass das Quadrupolmoment einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung null ist.

**Lösung:** Für eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung gilt immer  $\rho(\mathbf{r}) = \rho(r)$ . Damit ist die Ladungsdichte eine gerade Funktion mit  $\rho(-\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$ . Das Quadrupolmoment ist dann für kugelsymmetrische Verteilungen definiert als

$$Q_{ij} = \iiint_{\mathbb{R}^3} \rho(r) (3r_i r_j - \delta_{ij} r^2) d^3 r. \quad (5.1)$$

Für alle Elemente außerhalb der Diagonalen ( $i \neq j$ ) vereinfacht sich die Gleichung zu

$$Q_{ij} = \iiint_{\mathbb{R}^3} 3\rho(r) r_i r_j d^3 r. \quad (5.2)$$

Die Funktionen  $r_i$  und  $r_j$  sind jeweils ungerade Funktionen der jeweiligen Koordinate und das symmetrische Integral muss Null ergeben. Somit verschwinden alle Elemente außerhalb der Diagonalen. Für die Diagonalelemente gilt dann

$$Q_{ij} = \iiint_{\mathbb{R}^3} \rho(r) (3r_i^2 - r^2) d^3 r. \quad (5.3)$$

Für die Komponente  $i = j = x$  ergibt sich das Integral in Kugelkoordinaten mit  $x = r \sin \vartheta \cos \varphi$  zu

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= \iiint_{\mathbb{R}^3} \rho(r) (3 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi - 1) r^4 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi \\ &= \int_0^\infty \int_{\vartheta=0}^\pi \rho(r) \sin \vartheta (3\pi \sin^2 \vartheta - 2\pi) r^4 dr d\vartheta \\ &= \int_0^\infty \rho(r) (4\pi - 4\pi) r^4 dr = 0, \end{aligned} \quad (5.4)$$

wobei folgende Hilfsintegrale verwendet wurden:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi &= \left[ \frac{\varphi}{2} (1 + \sin \varphi \cos \varphi) \right]_0^{2\pi} = \pi \\ \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta &= \int_0^\pi \sin \vartheta - \sin \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta = - \left[ \cos \vartheta - \frac{1}{3} \cos^3 \vartheta \right]_0^\pi = \frac{4}{3}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Wird die Integration über  $\vartheta$  ausgeführt, verschwindet das Integral. Da die Verteilung kugelsymmetrisch ist, sind alle drei Raumrichtungen äquivalent und die Integrale  $Q_{yy}$  und  $Q_{zz}$  verschwinden ebenfalls.

Man erhält das Ergebnis noch schneller, wenn man benutzt, dass der Quadrupoltensor spurfrei ist. Aufgrund der Symmetrie muss  $Q_{xx} = Q_{yy} = Q_{zz}$  gelten, womit direkt  $Q_{xx} = 0$  folgt.

**Aufgabe 12:** Die folgenden drei Kerne haben ein von null verschiedenes Quadrupolmoment. Bestimmen Sie den Deformationsparameter  $\delta$  und die beiden Halbachsen  $a$  und  $b$  unter der Annahme, dass die Kerne die Gestalt eines Rotationsellipsoiden haben. Der mittlere Kernradius des Deuterons beträgt 3,5 fm. Für die anderen beiden Kerne kann  $R$  mit der allgemeinen Formel  $R = r_0 A^{1/3}$  abgeschätzt werden.

Kern	$Q/e$ [fm <sup>2</sup> ]
<sup>2</sup> D	0.28
<sup>35</sup> Cl	-8.2
<sup>181</sup> Ta	320

**Lösung:** Mithilfe von  $r_0 = 1,2$  fm lässt sich der mittlere Kernradius  $\bar{R}$  der anderen beiden Nuklide abschätzen zu

$$\begin{aligned} {}^{35}\text{Cl}: \quad \bar{R} &= 1,2 \text{ fm} \cdot 35^{1/3} \approx 3,93 \text{ fm} \\ {}^{181}\text{Ta}: \quad \bar{R} &= 1,2 \text{ fm} \cdot 181^{1/3} \approx 6,79 \text{ fm} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Nach der Vorlesung ergibt sich das Quadrupolmoment eines Rotationsellipsoiden mit den Halbachsen  $a$  und  $b$  zu

$$\frac{Q}{e} = \frac{2}{5} Z \cdot (a^2 - b^2) \quad (5.7)$$

$$\text{oder} \quad = \frac{6}{5} Z \cdot \bar{R}^2 \delta, \quad (5.8)$$

wobei der Deformationsparameter über

$$\delta = \frac{\Delta \bar{R}}{\bar{R}}, \quad \Delta \bar{R} = 2 \frac{a - b}{3} \quad (5.9)$$

definiert ist. Dabei ergibt sich  $\Delta \bar{R}$  durch Gleichsetzen von (5.7) und (5.8). Gleichung (5.8) kann nun nach dem Deformationsparameter aufgelöst werden

$$\delta = \frac{5}{6} \frac{Q}{e Z \bar{R}^2}. \quad (5.10)$$

Nun können mithilfe von  $\delta$  die Halbachsen des Rotationsellipsoiden berechnet werden. Aus (5.9) folgt  $a = \frac{3}{2} \Delta \bar{R} + b$

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= 3R^2 \Delta \bar{R} \\ \frac{9}{4} (\Delta \bar{R})^2 + 3b \Delta \bar{R} &= 3 \Delta \bar{R} \bar{R}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

womit sich die Halbachsen ergeben zu

$$a = \bar{R} \left( 1 + \frac{3}{4} \delta \right), \quad b = \bar{R} \left( 1 - \frac{3}{4} \delta \right). \quad (5.12)$$

Werden nun die Werte für  $Q/e$  und  $\bar{R}$  in (5.10) und (5.12) eingesetzt, ergibt sich:

Kern	$Q/e$ [fm <sup>2</sup> ]	$\bar{R}$ [fm]	$\delta$	$a$ [fm]	$b$ [fm]
<sup>2</sup> D	0.28	3.5	0.0190	3.53	3.46
<sup>35</sup> Cl	-8.2	3.93	-0.0260	3.87	3.99
<sup>181</sup> <sub>73</sub> Ta	320	6.79	0.0792	7.19	6.39

## 5.2 Magnetische Dipolmomente - Schmidt-Modell

**Aufgabe 13:** Berechnen Sie für die folgenden Kerne das magnetische Dipolmoment nach dem Schmidt-Modell mit der Landé-Formel und vergleichen Sie die Ergebnisse mit den experimentellen Werten.

**Lösung:** Nach der Vorlesung ist der Kern-Landé-Faktor gegeben durch

$$g_I = g_l \frac{j(j+1) + l(l+1) - s(s+1)}{2j(j+1)} + g_s \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)}. \quad (5.13)$$

Nach dem Modell von SCHMIDT wird nun die Annahme getroffen, dass der Kern aus einem spinlosen Teil und einem ungepaarten Nukleon ("Leuchtnukleon") besteht, welches alleinig das magnetische Moment bestimmt. Für das magnetische Moment ergibt sich dann

$$\frac{\mu}{\mu_K} = g_I \cdot j. \quad (5.14)$$

Für einen Ein-Teilchen-Zustand lässt sich der Landé-Faktor vereinfachen zu

$$g_I = g_l \pm \frac{(g_s - g_l)}{2l+1} \quad \text{für } j = l \pm \frac{1}{2}. \quad (5.15)$$

Die Landé-Faktoren für Drehimpuls und Spin sind gegeben als

$$g_l = 1, \quad g_s = 5.5858 \quad \text{Proton} \quad (5.16)$$

$$g_l = 0, \quad g_s = -3.8261 \quad \text{Neutron.} \quad (5.17)$$

Somit ergibt sich der Kern-Landé-Faktor für Leuchtprotonen bzw. Leuchtneutronen zu

$$g_I = \pm \frac{-3.8261}{2l+1} \quad \text{Leuchtneutron} \quad (5.18)$$

$$g_I = 1 \pm \frac{4.5858}{2l+1} \quad \text{Leuchtproton.}$$

Damit lässt sich das Kernmoment für die einzelnen Kerne berechnen zu:

Kern	$l$	$j$	$\frac{\mu_I^{\text{exp}}}{\mu_K}$	Kern	Nukleon	$g_I$	$\frac{\mu_I}{\mu_K}$
${}^7_3\text{Li}_4$	1	$\frac{3}{2}$	3.26	ug	p	2.529	3.793
${}^{13}_6\text{C}_7$	1	$\frac{1}{2}$	0.7	gu	n	1.275	0.638
${}^{17}_8\text{O}_9$	2	$\frac{5}{2}$	-1.91	gu	n	-0.7652	-1.913
${}^{23}_{11}\text{Na}_{12}$	1	$\frac{3}{2}$	2.22	ug	p	2.529	3.793
${}^{25}_{12}\text{Mg}_{13}$	2	$\frac{5}{2}$	-0.86	gu	n	-0.765	-1.913
${}^{39}_{19}\text{K}_{20}$	2	$\frac{3}{2}$	0.39	ug	p	0.083	0.124

Es zeigt sich, dass die nach dem Schmidt-Modell berechneten Werte für das Kernmoment nur für die leichteren Kerne, wie  ${}^{13}\text{C}$  oder  ${}^{17}\text{O}$  gut mit den experimentellen Daten übereinstimmen. Nur die wenigsten Kernzustände lassen sich durch die Einteilchen-Konfiguration beschreiben.

## 6 Übungsserie 6

### 6.1 Kernspinwerte nach dem Schalenmodell

**Aufgabe 14:** In der folgenden Tabelle sind die gemessenen Kernspinwerte und Paritäten einiger Kerne im Grundzustand und im ersten angeregten Zustand angegeben. Bestimmen Sie die Konfiguration der Neutronen und Protonen nach dem Schalenmodell. Vergleichen Sie ihre Werte mit der Tabelle.

	${}^7_3\text{Li}$	${}^{23}_{11}\text{Na}$	${}^{33}_{16}\text{S}$	${}^{41}_{21}\text{Sc}$	${}^{83}_{36}\text{Kr}$	${}^{93}_{41}\text{Nb}$
Grundzustand $I^\Pi$	$3/2^-$	$3/2^+$	$3/2^+$	$7/2^-$	$9/2^+$	$9/2^+$
Erste Anregung $I^\Pi$	$1/2^-$	$5/2^+$	$1/2^+$	$3/2^-$	$7/2^+$	$1/2^-$

**Lösung:** Die Aufgabe lässt sich mithilfe des in der Aufgabenstellung gegebenen Bildes lösen. Der Kernzustand wird folgendermaßen bestimmt. Für Kerne mit einem Nukleon außerhalb einer geschlossenen Schale wird die Parität und der Gesamtdrehimpuls durch das einzelne Nukleon bestimmt. Genauso verhält es sich bei Kernen mit einem Nukleon weniger. Zunächst wird mithilfe von  $\pi$  (Proton) oder  $\nu$  (Neutron) die Art des Nukleons bestimmt. Dann wird der Energiezustand in Klammern geschrieben. Der Exponent beschreibt, ob ein Kernbaustein zur vollen Schale fehlt ( $-$ ) oder überschüssig ist ( $+$ ). Ein angeregter Zustand lässt sich der Spin und die Parität durch eine Einzelteilchenanregung des ungepaarten Nukleons erklären. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle dargestellt:

	${}^7_3\text{Li}$	${}^{23}_{11}\text{Na}$	${}^{33}_{16}\text{S}$	${}^{41}_{21}\text{Sc}$	${}^{83}_{36}\text{Kr}$	${}^{93}_{41}\text{Nb}$
Grundzust. $I^\Pi$	$3/2^-$	$3/2^+$	$3/2^+$	$7/2^-$	$9/2^+$	$9/2^+$
Anregung $I^\Pi$	$1/2^-$	$5/2^+$	$1/2^+$	$3/2^-$	$7/2^+$	$1/2^-$
Kernzustand	$\pi(p_{\frac{3}{2}})^{+1}$	$\pi(d_{\frac{5}{2}})^{+1}$	$\nu(d_{\frac{3}{2}})^{+1}$	$\pi(f_{\frac{7}{2}})^{+1}$	$\nu(g_{\frac{9}{2}})^{-1}$	$\pi(g_{\frac{9}{2}})^{+1}$
Grundz. Theorie	$3/2^-$	$5/2^+$	$3/2^+$	$7/2^-$	$9/2^+$	$9/2^+$
Anregung Theorie	$1/2^-$	$1/2^+$	$7/2^-$	$3/2^-$	$5/2^+$	$7/2^+$

Die Parität wurde über folgende Beziehung bestimmt:

$$\Pi = (-1)^l = \begin{cases} 1 & s, d, g \\ -1 & p, f, h \end{cases} \quad (6.1)$$

Es zeigt sich, dass die durch das Schalenmodell ermittelten Werte für Spin und Parität für alle Nuklide, bis auf  ${}^{23}\text{Na}$  übereinstimmt. Für diese Nuklid das Proton im Energieniveau  $d_{5/2}$  sitzen, im Experiment ergibt sich jedoch der höhere Energiezustand  $d_{3/2}$ . Das Schalenmodell trifft nur eine grobe Vorhersage, wie der Kernspin aussieht.

Der Ein-Elektronen-Ansatz zur Bestimmung der Spins im ersten angeregten Zustand funktioniert nicht mehr zuverlässig. Nur für zwei Nuklide stimmt hier die Vorhersage mit den experimentellen Daten überein. Es ist davon auszugehen, dass im ersten angeregten Zustand nicht nur ein Nukleon angeregt wird.

## 6.2 Das Zerfallsgesetz

**Aufgabe 15:** Nehmen wir an, dass sich 1 kg Radium auf der Erde befindet. Die Halbwertszeit von  $^{226}\text{Ra}$  ist etwa 1600 Jahre und das Alter der Erde etwa  $5 \cdot 10^9$  Jahre. Berechnen Sie auf der Basis dieser Daten den Ra-Anteil auf der Erde bei der Entstehung der Erde. Vergleichen Sie ihren Wert mit der Masse der Erde. Wie können Sie das Problem lösen.

**Lösung:** Unter Anwendung des radioaktiven Zerfallsgesetzes

$$N(t) = N_0 \exp(-\lambda t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad (6.2)$$

mit der Halbwertszeit  $t_{1/2} = \ln(2)\tau$  lässt sich die Masse durch Umkehr der Zeit  $t \rightarrow -t$  vor  $5 \cdot 10^9$  Jahren bestimmen. Es gilt dann

$$m(t) = m_0 \exp\left(\frac{t \ln(2)}{t_{1/2}}\right) = 1 \text{ kg} \exp\left(\frac{5 \cdot 10^9 \text{ a} \cdot \ln(2)}{1600 \text{ a}}\right) \approx 5 \cdot 10^{940718} \text{ kg}. \quad (6.3)$$

Alternativ lässt sich das Ergebnis daraus gewinnen, dass sich die Radium-Masse alle 1600 Jahre halbiert. Somit ergeben sich im Laufe der Erdgeschichte

$$\frac{5 \cdot 10^9}{1600} = 3.125 \cdot 10^6 \text{ Verdopplungen} \Rightarrow m(t) = m_0 \cdot 2^{3.125 \cdot 10^6}. \quad (6.4)$$

Vergleicht man die erhaltene Masse mit der Masse der Erde von  $5 \cdot 10^{24}$  kg zeigt sich, dass diese Abschätzung vollkommen daneben liegt. Es wurde die falsche Annahme getroffen, dass sich Radium nicht durch natürliche Zerfallsketten neu bilden kann. Jedoch kommt  $^{226}\text{Ra}$  als Zwischenprodukt in der Uran-Radium-Reihe, eine der natürlichen Zerfallsketten, vor. Somit war es nicht nötig, dass bereits zur Entstehung der Erde Unmengen an Radium vorhanden waren, damit heute davon noch ein Kilogramm übrig ist.