Formelsammlung Optik und Wellen

1 Licht und Materie

Maxwellgleichungen: $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\quad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}$

$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$ $\quad \operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E} + \mu_0 \boldsymbol{j}$

Wellengleichung: $\Delta \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla}\frac{\rho}{\varepsilon_0} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{j}$

1.1 Wellengleichung, ebene Wellen

spezielle Lösungen: $\rho = 0, \quad \boldsymbol{j} = 0$

Ebene Wellen: $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \operatorname{Re}\{\boldsymbol{E_0}e^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}\}$,

$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \operatorname{Re}\{\boldsymbol{B_0}e^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}\}$, $\boldsymbol{B}_0 = \frac{1}{\omega}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0$

Dispersionsrelation: $\boldsymbol{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad \boldsymbol{E}_0 \perp \boldsymbol{k}$

Monochromatisches Feld: $\boldsymbol{E}_{\text{reell}}(\boldsymbol{r},t) = \operatorname{Re}\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\exp(-\mathrm{i}\omega t)\}$

Helmholtzgleichung: $\boxed{\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right)u(\boldsymbol{r}) = 0}$, $\quad u(r) = E_x, E_y, E_z$

Poyntingvektor: $\boldsymbol{S}_{\text{reell}} = \frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{E}_{\text{reell}} \times \boldsymbol{B}_{\text{reell}})$

$\langle \boldsymbol{S}_{\text{reell}}\rangle = \frac{1}{2\mu_0}\operatorname{Re}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}), \qquad \operatorname{div}\langle \boldsymbol{S}_{\text{reell}}\rangle = -\frac{1}{4}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}^* - \boldsymbol{B}^*\cdot\boldsymbol{j})$

1.2 Dipolstreuer

Dipolmoment: $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$, $\quad$ Polarisationsdichte: $\boldsymbol{p}_{\text{reell}} = \int \boldsymbol{P}_{\text{reell}}\,\mathrm{d}V$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{P}_{\text{reell}}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{j}_{\text{reell}}(\boldsymbol{r},t)$

Abstrahlung eines Punktdipols: $(\boldsymbol{d}\to 0, \quad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_0\delta(\boldsymbol{r}))$

Vektorpotential: $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi + \mathrm{i}\omega\boldsymbol{A}$

inhomogene HHGl.: $\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\boldsymbol{A} = -\mu_0\boldsymbol{j} = \mathrm{i}\omega\mu_0\boldsymbol{p}_0\delta(\boldsymbol{r})$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(k^2\boldsymbol{e}_r\times(\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{p}_0)\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{r} - [3\boldsymbol{e}_r(\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{p}_0)-\boldsymbol{p}_0]\right).$$
$$\left(\frac{1}{r^3} - \frac{\mathrm{i}k}{r^2}\right)\exp(\mathrm{i}kr) - \frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{p}_0\delta(\boldsymbol{r})$$

1. Fernfeld fällt mit $1/r$ ab: $\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{r}$
2. keine Abstrahlung in Richtung der Dipolachse ($\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{p}_0 = 0$)
3. Abgestrahlte Leistung $P \propto \omega^4$

1.3 Feldausbreitung im Material

Maxwellgleichungen: $\operatorname{div}\boldsymbol{D} = 0$ $\quad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = +\mathrm{i}\omega\boldsymbol{B}$

$\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0$ $\quad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{i}\omega\boldsymbol{D}$

Polarisation: $\boldsymbol{P}(\omega,\boldsymbol{r}) = \varepsilon_0\hat{\chi}(\omega,\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{E}(\omega,\boldsymbol{r})$
Relative Dielektrizitätskonstante: $\hat{\varepsilon}(\omega,\boldsymbol{r}) = 1 + \hat{\chi}(\omega,\boldsymbol{r})$
Dielektrische Verschiebung: $\boldsymbol{D}(\omega,\boldsymbol{r}) = \varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P} = \varepsilon_0\hat{\varepsilon}(\omega,\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}(\omega,\boldsymbol{r})$

Homogenes Material: $c' = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \lambda' = \frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon}}$

Brechungsindex: $n(\omega,\boldsymbol{r}) = \sqrt{\varepsilon(\omega,\boldsymbol{r})}$

Energiebilanz im Material: $\operatorname{div}\langle \boldsymbol{s}\rangle = -\frac{\omega}{2}\varepsilon_0\operatorname{Im}(\varepsilon)|\boldsymbol{E}|^2$

Snellsches Brechungsgesetz: $\boxed{n_1\sin\varphi_{\text{IN}} = n_2\sin\varphi_{\text{T}}}$

Brewsterwinkel: $\sin\varphi_{\text{B}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}}$

Bedingung für Totalreflexion: $\sin\varphi_{\text{G}} = \frac{n_2}{n_1}$

1.4 Polarisation des Materials

Oszillator: $\underbrace{m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{d}_{\text{reell}}}_{\text{Trägheit}} + \underbrace{m\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{d}_{\text{reell}}}_{\text{Dämpfung}} + \underbrace{m\omega_0^2\boldsymbol{d}_{\text{reell}}}_{\text{Rückstellkraft}} = \underbrace{q\boldsymbol{E}_{\text{reell}}}_{\text{Treiber}}$

Bewegungsgleichung: $\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\right]\boldsymbol{P}_{\text{reell}} = N\frac{q^2}{m}\boldsymbol{E}_{\text{reell}}$

Polarisation: $\boxed{\boldsymbol{P}(\omega) = \varepsilon_0\frac{f}{\omega_0^2-\omega^2-\mathrm{i}\gamma\omega}\boldsymbol{E}(\omega)}$ $\quad$ mit $f = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{q^2N}{m}$

Lorentz-Modell: $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + \mathrm{i}\varepsilon''(\omega) = 1 + \frac{f}{\omega_0^2-\omega^2-\mathrm{i}\gamma\omega}$

1. ε ist reell: $\boldsymbol{k}\in\mathbb{R}$ oder $k_R^2 - k_i^2 = \varepsilon'\frac{\omega^2}{c^2}$ und $\boldsymbol{k}_R\boldsymbol{k}_i = 0$
2. ε ist komplex: Abklingende Welle $\sim \exp(-\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{r})$ (Dissipativ)
3. $\varepsilon < 0$ ist reell: $\boldsymbol{k}^2 = -|\varepsilon|\frac{\omega^2}{c^2}$ (mindestens eine Komponente imaginär + Dissipativ)

mehrere Resonanzen: $\varepsilon(\omega) = 1 + \sum_m \frac{f_m}{\omega_m^2-\omega^2-\mathrm{i}\gamma_m\omega}$

Metalle: $\chi(\omega) = -\frac{q^2N}{\varepsilon_0 m}\frac{1}{\omega^2+\mathrm{i}\gamma\omega} = -\frac{\omega_P^2}{\omega^2+\mathrm{i}\gamma\omega}$

mit Plasmafrequenz: $\omega_P^2 = \frac{q^2N}{\varepsilon_0 m}, \quad \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2+\mathrm{i}\gamma\omega}$

1.5 Eigenschaften der Suszeptibilität χ

Zeitabhängige Felder: $\boldsymbol{P}_{\text{reell}}(t) = \int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}\omega\,\tilde{\boldsymbol{P}}(\omega)e^{-\mathrm{i}\omega t}$

Spektralamplitude: $\tilde{\boldsymbol{P}}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}t\boldsymbol{P}_{\text{reell}}(t)e^{\mathrm{i}\omega t} = \varepsilon_0\chi(\omega)\tilde{\boldsymbol{E}}(\omega)$

Responsefunktion: $\boldsymbol{P}_{\text{reell}}(t) = \int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}\tau R(\tau)\boldsymbol{E}_{\text{reell}}(t-\tau)$,

mit $R(\tau) = \frac{\varepsilon_0}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}\omega\chi(\omega)e^{-\mathrm{i}\omega\tau}$ reell und kausal: $R(\tau<0) = 0$

Suszeptibilität: $\chi(\omega) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}\tau R(\tau)e^{\mathrm{i}\omega t} = \chi(-\omega)^*$

Kramers-Kronig Transformation:

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\mathrm{i}\pi}\lim_{\nu\to 0}\left[\int_{-\infty}^{\omega-\nu}\mathrm{d}\bar{\omega}\frac{\chi(\bar{\omega})}{\bar{\omega}-\omega} + \int_{\omega+\nu}^{\infty}\mathrm{d}\bar{\omega}\frac{\chi(\bar{\omega})}{\bar{\omega}-\omega}\right]$$
$$= \frac{1}{\mathrm{i}\pi}\mathscr{P}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}\bar{\omega}\frac{\chi(\bar{\omega})}{\bar{\omega}-\omega} \quad \text{mit } \mathscr{P}\int_{\mathbb{R}}f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}f(x)\,\mathrm{d}x$$

Realteil: $\operatorname{Re}[\chi(\omega)] = \frac{1}{\pi}\mathscr{P}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}\bar{\omega}\frac{\operatorname{Im}[\chi(\bar{\omega})]}{\bar{\omega}-\omega}$

Imaginärteil: $\operatorname{Im}[\chi(\omega)] = -\frac{1}{\pi}\mathscr{P}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}\bar{\omega}\frac{\operatorname{Re}[\chi(\bar{\omega})]}{\bar{\omega}-\omega}$

$\Rightarrow$ Verknüpfung von absorptiven ($\varepsilon'' = \frac{nc}{\omega}k_i$) und dispersiven Eigenschaften ($\varepsilon' = \operatorname{Re}(\hat{n}^2)$) eines Materials ($\hat{n} = n + \mathrm{i}\kappa$).

1.6 Transparente, doppelbrechende Materialien

Allgemeine dielektrische Verschiebung: $D_i = \varepsilon_0 \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij} E_j$

Transparentes Material: Energieerhaltung gilt ($\mathrm{div}\langle \boldsymbol{s}_{\mathrm{reell}}\rangle = 0$)

$\mathrm{div}\,\langle \boldsymbol{s}_{\mathrm{reell}}\rangle = \frac{\mathrm{i}\omega\varepsilon_0}{4} \sum_{i,j=1}^{3} E_i^* E_j \left(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ji}^*\right) = 0$ (verlustfrei)

Dielektrischer Tensor $\hat{\varepsilon}$ ist hermitesch: $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}^*$ und diagonal

Klassifikation von Kristallen:

1. Isotrop: drei gleiche Kristallachsen, $\hat{\varepsilon} = \varepsilon\mathbb{1}$, $\quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon$
2. Einachsig: zwei gleiche Achsen, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = n_o^2$ und $\varepsilon_3 = n_e^2$
3. Zweiachsig: drei verschiedene Kristallachsen, $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3 \neq \varepsilon_1$

Wellenausbreitung: $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_0 \exp(\mathrm{i}\boldsymbol{kr})$ und $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{D}_0 \exp(\mathrm{i}\boldsymbol{kr})$

Richtungsabhängige Brechzahl: $\boldsymbol{k} = n(\boldsymbol{u})\frac{\omega}{c}\boldsymbol{u}$ mit $\boldsymbol{u}^2 = 1$

Eigenwertproblem: $\hat{\varepsilon}^{-1}\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{E}_0) = -\frac{1}{n^2}\boldsymbol{E}_0 = \lambda \boldsymbol{E}_0$

$$l\lambda^3 + \left(\frac{u_2^2 + u_3^2}{\varepsilon_1} + \frac{u_1^2 + u_3^2}{\varepsilon_2} + \frac{u_1^2 + u_2^2}{\varepsilon_3}\right)\lambda^2 + \left(\frac{u_1^2}{\varepsilon_2\varepsilon_3} + \frac{u_2^2}{\varepsilon_1\varepsilon_3} + \frac{u_3^2}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\right)\lambda = 0$$

Triviale Lösung $\lambda = 0$ Eigenvektor parallel zu $\boldsymbol{u}$

Definiere: $\hat{V}\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{E}_0)$, $\quad \hat{M}' = \sqrt{\varepsilon^{-1}}\hat{V}\sqrt{\varepsilon^{-1}}$, $\quad M'^{\dagger} = M'$

Analoges Eigenwertproblem: $M'\boldsymbol{X}_n = -\frac{1}{n^2}\boldsymbol{X}_n$, $\quad \boldsymbol{X} = \sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{E}_0$

$\boldsymbol{X}_n \cdot \boldsymbol{X}_{n'} = a\delta_{nn'} \Rightarrow \boldsymbol{D}_n \cdot \boldsymbol{E}_{n'} = a\delta_{nn'}$

Im anisotropen Medium: $\boxed{\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{D}_n}$

$$n^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\sum_i D_{n_i} D_{n_i}}{\sum_i^i E_{n_i} D_{n_i}} = \frac{\sum_i \varepsilon_i E_{n_i} D_{n_i}}{\sum_i E_{n_i} D_{n_i}}, \quad \min(\varepsilon_i) \leq n^2 \leq \max(\varepsilon_i)$$

Ausbreitung im einachsigen Kristall: $\varepsilon_x = \varepsilon_y = n_o^2 \neq \varepsilon_z = n_e^2$

1. Zylindersymmetrie: $\boldsymbol{u}$ in x-z-Ebene: $u_x^2 + u_y^2 = 1$
   Ausbreitung nur von Winkel $\measuredangle\theta = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_z)$ abhängig
2. Polarisation $\perp$ zur Ebene Einfallsrichtung-außerordentliche Achse: ordentlicher Strahl, Brechungsindex richtungsunabhängig (wie im isotropen Medium)
3. Polarisation $\parallel$ zur Ebene Einfallsrichtung-außerordentliche Achse: außerordentlicher Strahl
   Normalenfläche außerordentlicher Strahl: $1 = \frac{n^2 u_x^2}{n_e^2} + \frac{n^2 u_z^2}{n_0^2}$

1.7 Polarisation elektromagnetischer Felder

Ausbreitung in z-Richtung: $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{e}_z$, $\quad \boldsymbol{E}_0 = E_x e^{\mathrm{i}\varphi_x}\boldsymbol{e}_x + E_y e^{\mathrm{i}\varphi_y}\boldsymbol{e}_y$

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{reell}}(\boldsymbol{r}, t) = \begin{pmatrix} E_x \cos\left(kz - \omega t + \varphi_x\right) \\ E_y \cos\left(kz - \omega t + \varphi_y\right) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x \cos(\Theta) \\ E_y \cos(\Theta - \delta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jones-Vektor: $\boxed{\boldsymbol{j} = \frac{1}{\sqrt{E_x^2 + E_y^2}}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y e^{\mathrm{i}\delta} \end{pmatrix}}$

Polarisationsarten:

1. Linear: $\delta = 0, \pi \quad \boldsymbol{j} = \frac{1}{\sqrt{E_x^2 + E_y^2}}\begin{pmatrix} E_x \\ \pm E_y \end{pmatrix}$
2. Zirkular: $\delta = \pm\frac{\pi}{2}$, $\quad E_x = E_y = E$, $\quad \boldsymbol{j} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm\mathrm{i} \end{pmatrix}$
3. Elliptisch: $0 < \delta < \pi$: linksdrehend, $-\pi < \delta < 0$: rechtsdrehend

Polarisierende Elemente:

- Polarisator: $\boldsymbol{j}_{\mathrm{out}} = \begin{pmatrix} \cos^2\varphi & \sin\varphi\cos\varphi \\ \sin\varphi\cos\varphi & \sin^2\varphi \end{pmatrix}\boldsymbol{j}_{\mathrm{in}}$
- $\lambda/4$-Plättchen: $\boldsymbol{j}_{\mathrm{out}} = \hat{M}_{\lambda/4}\boldsymbol{j}_{\mathrm{in}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}\boldsymbol{j}_{\mathrm{in}}$
- $\lambda/2$-Plättchen: $\boldsymbol{j}_{\mathrm{out}} = \hat{M}_{\lambda/2}\boldsymbol{j}_{\mathrm{in}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{j}_{\mathrm{in}}$
  Dicke des $\lambda/2$ Plättchens: $L = \frac{\lambda}{2|n_0 - n_e|}$
- allg. Drehung: $\hat{\boldsymbol{M}}(\varphi) = \hat{\boldsymbol{U}}_\varphi^{\dagger}\hat{\boldsymbol{M}}\hat{\boldsymbol{U}}_\varphi$ mit $\hat{\boldsymbol{U}}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

2 Geometrische Optik

Ziel: Abbildungseigenschaften optischer Systeme beschreiben

Annahmen: lokal charakterisierte Strahlen mit Amplitude u_i, Ausbreitungsrichtung mit Wellenvektor $\boldsymbol{k}_i$ und lokale Polarisation $\boldsymbol{j}_i$

2.1 Gaußsche Optik

Voraussetzungen: Rotationssymmetrie, Paraxialität ($\alpha < 30°$)

Charakterisierung des Strahls: $\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} x \\ n\alpha \end{pmatrix}$ mit Brechungsindex n

Translation: $x(z_R + L) \approx x(z_R) + L\alpha$, $\quad \boldsymbol{s}_{\mathrm{out}} = \hat{T} = \begin{pmatrix} 1 & L/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{s}_{\mathrm{in}}$

Kugelfläche: $\boldsymbol{s}_{\mathrm{out}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k_{12} & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{s}_{\mathrm{in}}$, Brechkraft $k_{12} = \frac{n_2 - n_1}{r}$

Linse: $\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$ mit $f = \frac{R}{n-1}$ (Brennweite)

Abbildung durch dünne Linse:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & g \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{b}{f} & g + b - g\frac{b}{f} \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{g}{f} \end{pmatrix}$$

Abbildungsgleichung: $\boxed{\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}}$

Abbildungsmaßstab: $A = 1 - \frac{b}{f} = \frac{f}{f - g}$

Hauptebenen: Ziel ist es, optische Systeme durch eine effektive dünne Linse zu ersetzen, indem vor und hinter dem System Freiraum mit den Längen u und v hinzugefügt wird.

$$\begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + vC & Au + B + uvC + vD \\ C & Cu + D \end{pmatrix}$$

Hauptebenen: $v = \frac{1 - A}{C}$ und $u = \frac{1 - D}{C}$, effektive Brennweite: $f = -\frac{1}{C}$

Da dünne Linsen perfekt abbilden, ermöglicht in der Gaußschen Optik jedes System spätestens nach Hinzufügen von Freiraum eine perfekte Abbildung.

2.2 Abbildungsfehler

Chromatische Abberation: $f = \frac{1}{n-1}\frac{1}{1/r_1 - 1/r_2}$ Brennweite abhängig von der Brechzahl. (blau bricht stärker)

Monochromatische Abbildungsfehler

1. Sphärische Abberation: Brennweite verringert sich mit wachsendem Abstand zur optischen Achse
2. Astigmatismus: Störung der Fokussierung von Strahlenbündeln unter großem Winkel quer zur optischen Achse.
3. Koma: Schräger Einfall auf die Linse (Astigmatismus + sphärische Aberration)
4. Feldkrümmung: Bildfeld ist keine Ebene

Korrekturen: Asphären (Paraboloide), Kombination von Sammel- und Zerstreuungslinsen, Vermeidung schräger Einfallswinkel

2.3 Aplanatische Objektive

Vorteile: Reduktion der Emissionswinkel α ohne Abbildungsfehler durch Verwendung einer Kugeloberfläche $\mathrm{NA}_{\mathrm{Kugel}} = n\sin(\alpha)$

Für das nachgeschaltete Objektiv wird die notwendige numerische Apertur um den Faktor n^2 kleiner.

Apertur des Objektives: $\mathrm{NA}_{\mathrm{Objektiv}} = \frac{1}{n^2}\mathrm{NA}_{\mathrm{Kugel}}$

3 Beugungsphänomene

Idee des Beugungsintegrals: Zur Berechnung der Propagation einer gegebenen Feldverteilung wird das Anfangsfeld in den Ortsfrequenzraum transformiert. Dann werden mithilfe der HHGl die die Ortsraumfrequenzen γ mit einer Übertragungsfunktion durch den Raum propagiert. Die finale Feldverteilung ergibt sich durch eine Fourier-Rücktransformation.

3.1 Das Beugungsintegral

Voraussetzungen: monochromatisches Feld, homogenes, isotropes, absorptionsfreies Medium (n konstant und reell)

Konfiguration: Objekt- und Bildebene in der $x-y-$Ebene, Ausbreitung $+z-$Richtung, gegebenes Feld $u(x,y,z=0) = u_0(x,y)$

Ansatz: $u(x,y,z) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \bar{U}(\alpha,\beta,z)\exp[\mathrm{i}(\alpha x + \beta y)]\ \mathrm{d}\alpha\ \mathrm{d}\beta$

Folgerung aus HHGl: $\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} + k^2 - \alpha^2 - \beta^2\right)\bar{U}(\alpha,\beta,z) = 0$

$\bar{U}_0(\alpha,\beta) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} u_0(x,y)\exp[-\mathrm{i}(\alpha x + \beta y)]\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$

Allgemeine Lösung mit $\gamma(\alpha,\beta) = \sqrt{k^2 - \alpha^2 - \beta^2}$

$u(x,y,z) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \bar{U}_0(\alpha,\beta)\exp[\mathrm{i}\gamma(\alpha,\beta)z]\exp[\mathrm{i}(\alpha x + \beta y)]\ \mathrm{d}\alpha\ \mathrm{d}\beta$

Übertragungsfunktion: $H(\alpha,\beta,z) = \exp\left(\mathrm{i}\sqrt{k^2 - \alpha^2 - \beta^2}z\right)$

1D-Spalt: $u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} |x| \le d/2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \bar{U}_0(\alpha) = \frac{d}{2\pi}\mathrm{sinc}\left(\frac{d}{2}\alpha\right)$

Verbesserung des Auflösungsvermögens:
- Verwendung von Objektiven hoher numerischer Apertur
- Reduktion von λ (hochbrechende Immersionsflüssigkeiten)
- Detektion evaneszenter Wellen mittels optischer Nahfeldmikroskopie
(SNOM - Scanning Nearfield Optical Microscopy)

3.2 Gaußstrahlen in paraxialer Näherung

Anfangsverteilung: $u_0(x,y) = A_0\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{W_0^2}\right)$

Spektrum: $\bar{U}_0(\alpha,\beta) = A_0\frac{W_0^2}{4\pi}\exp\left[-\frac{W_0^2}{4}(\alpha^2+\beta^2)\right]$

paraxiale Näherung: $\sqrt{k^2 - (\alpha^2+\beta^2)} \approx k - \frac{\alpha^2+\beta^2}{2k}$

$$u = e^{ikz}\frac{W_0^2}{W'^2}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}\alpha\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}\beta\frac{A_0W'^2}{4\pi}\exp\left[-\frac{W'^2}{4}\left(\alpha^2+\beta^2\right)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha x+\beta y)}$$

Beugungsparameter: $\boxed{z_R = \frac{kW_0^2}{2} = \frac{\pi W_0^2}{\lambda}}$ (Rayleigh-Länge)

komplexe Breite: $W'^2 = W_0^2 + \frac{2\mathrm{i}z}{k} = W_0^2\left(1+\mathrm{i}\frac{z}{z_R}\right)$

$$u(x,y,z) = e^{\mathrm{i}kz}\frac{A_0}{1+\mathrm{i}z/z_R}\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{W_0^2(1+\mathrm{i}z/z_R)}\right], \quad \varphi = -\arctan(z/z_R)$$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}A_0}{1+\mathrm{i}z/z_R}\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{W_0^2\left(1+(z/z_R)^2\right)}\right]\exp\left[\mathrm{i}\frac{z}{z_R}\frac{x^2+y^2}{W_0^2\left(1+(z/z_R)^2\right)}\right]$$

Strahlbreite: $\boxed{W(z) = W_0\sqrt{1+(z/z_R)^2}}$

Leistung auf der Strahlachse: $|A(z)|^2 = \frac{|A_0|^2}{1+(z/z_R)^2}$

Krümmungsradius: $\boxed{R(z) = z\left[1+\left(\frac{z_R}{z}\right)^2\right]}$

3.3 Gaußsche Optik mit q-Parametern

Beschreibung von Gaußstrahlen durch Parameter $q = z_F - iz_R$

z_F– Abstand zum Fokus/Strahltaille

Lösung: $u(x,y,z) = \frac{\mathrm{i}A_0\,\mathrm{Im}(q)}{q}\exp\left[\mathrm{i}\frac{\pi}{\lambda}\frac{x^2+y^2}{q}\right]\exp[\mathrm{i}k\mathrm{Re}(q)]$

inverser q-parameter: $\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{z_F - \mathrm{i}z_R} = \frac{1}{R(z)} + \mathrm{i}\frac{\lambda}{\pi}\frac{1}{W(z)^2}$

Dynamik des q-Parameters:

1. homogener Raum: $q(z+L) = q(z) + L$
2. dünne Linse: $\frac{1}{q_+} = \frac{1}{q_-} - \frac{1}{f}$
3. Optische Systeme mit $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ $\boxed{q_+ = \frac{Aq_- + B}{Cq_- + D}}$

Gaussche Moden im Resonator: $q_+ = q_- = q$

Strahlparameter: $q = \frac{A-D}{2C} \pm \sqrt{\left(\frac{A-D}{2C}\right)^2 + \frac{B}{C}}$

q-Parameter ist komplex: $\left(\frac{A-D}{2C}\right)^2 + \frac{B}{C} < 0$

$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = 1 \quad \Rightarrow |A+D| < 2$

Transfermatrix Laserresonator:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/R_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/R_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Stabilitätsbedingung: $\left|1 + 2\left(\frac{L}{R_1} + \frac{L}{R_2}\right) + \frac{2L^2}{R_1R_2}\right| < 1$

Definition: $g_1 = 1 + \frac{L}{R_1}, \quad g_2 = 1 + \frac{L}{R_2}$

Beziehungen: $|2g_1 g_2 - 1| < 1, \quad 0 \le g_1 g_2 \le 1$

Phasenkrümmungsradius der Gaußmode ist gleich dem Krümmungsradius des Spiegels (parallele Phasenflächen)

Paraxiale Wellengleichung und höhere Lasermaden:

$$\left[\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2k}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + k\right] u_G(x,y,z) = 0$$

Annahme schnelle Phasenevolution: $u(x,y,z) = v(x,y,z)\exp(\mathrm{i}\bar{k}z)$

Weitere Lösungen: $u^G_{mm} = \frac{\partial^m \partial^n}{\partial x^m \partial y^n} u_G$

⇒ beugen wie normaler Gaußstrahl, gleiche Phasenkrümmung
⇒ Modifizierung des räumlichen Profils mit Hermite-Polynomen.
⇒ Grundmode favorisiert, weil größter Überlapp mit dem Gainmaterial des Lasers

3.4 Fraunhofer Beugung

Voraussetzungen: $z \gg$ Objektbreite, $x^2 + y^2 \ll z^2$ (Paraxialität)

$$u = \iint_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}\beta\, \bar{U}_0(\alpha,\beta) \exp\left[\mathrm{i}\sqrt{k^2 - \alpha^2 - \beta^2}\, z\right] \exp[\mathrm{i}(\alpha x + \beta y)]$$

$$\approx \exp\left[\mathrm{i}k\left(z + \tfrac{x^2+y^2}{2z}\right)\right] \iint_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}\beta \bar{U}_0 \exp\left\{\frac{z}{2k\mathrm{i}}\left[\left(\alpha - k\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\beta - k\frac{y}{z}\right)^2\right]\right\}$$

⇒ komplexer Gauß der Breite $W_G = \sqrt{2k/z}$, wird für große Ausbreitungslängen beliebig klein.

Fraunhofer Näherung: Zum Integral trägt **nur** die zentrale gaußförmige Komponente mit Amplitude $\bar{U}_0(\alpha = k\frac{x}{z}, \beta = k\frac{y}{z})$ (Amplitude der Welle in Richtung des Beobachtungspunktes) bei, da der Gauß sehr schmal ist ($W_G \ll 1$) und sich Beiträge aus zentrumsfernen Gebieten aufgrund der schnellen Oszillationen gegenseitig kompensieren.

Lösung: $u(x,y,z) \approx \frac{(2\pi)^2}{\mathrm{i}\lambda z} \exp\left[\mathrm{i}k\left(z + \frac{x^2+y^2}{2z}\right)\right] \bar{U}_0\left(\alpha = k\frac{x}{z}, \beta = k\frac{y}{z}\right)$.

Entwicklung für kleine x, y: $r = \sqrt{z^2 + x^2 + y^2} \approx z + \frac{x^2+y^2}{2z}$

allgemein nichtparaxial: $\boxed{u(x,y,z) \approx \frac{(2\pi)^2}{\mathrm{i}\lambda} \frac{e^{\mathrm{i}k}}{r} \quad \bar{U}_0\left(\alpha = k\frac{x}{r}, \beta = k\frac{y}{r}\right)}$

$\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{r}$: Intensitätsabfall & Phasenkrümmung (~ Kugelwelle)

Grenzen der Fraunhofer Näherung:
Breite Gauß ≪ Breite Fourierspektrum Objekt: $\sqrt{2k/z} \ll 2/W_0$
⇒ $z \gg z_R$ (Abstand Objekt-Bild ≫ Beugungsparameter)

Fresnelzahl: $N_F = \frac{a^2}{\lambda z}$ $\quad a$: halbe Objektbreite ⇒ $N_F \ll \frac{1}{4\pi} \approx 0.1$

Beugungsbilder:

Kreisförmiges Feld: $u_0(x,y) = 1$ wenn $x^2 + y^2 \le a^2, \quad 0$ sonst

Airy-Scheibchen: $|u(x,y,z)|^2 \propto \left|\frac{J_1(\eta)}{\eta}^2\right|$ mit $\eta = 2\pi\frac{a}{\lambda}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r}$

Besselfunktion n-ter Ordnung: $J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\varphi - n\varphi)\mathrm{d}\varphi$

Beugungsbilder periodischer Strukturen: $u_0(x) = u_0(x+d)$

$$u_0(x) = \sum_m a_m \exp\left(\mathrm{i}m\frac{2\pi}{d}x\right), \quad \overline{u}_0(\alpha) = \sum_m a_m \delta\left(\alpha - m\frac{2\pi}{d}\right)$$

Babinetsches Prinzip: Beugungsbilder inverser Feldverteilungen sind für $x^2 + y^2 \ne 0$ identisch

$$\tilde{u}_0(x,y) = 1 - u_0(x,y) \propto \left|\delta\left(k\frac{x}{r}\right)\delta\left(k\frac{y}{r}\right) - \overline{u}_0\left(k\frac{x}{r}, k\frac{y}{r}\right)\right|^2$$

3.5 Fourier-Optik

Position des Fokuspunktes (Brennebene): $\frac{x}{f} \approx \frac{\alpha}{k}, \quad \frac{y}{f} \approx \frac{\beta}{k}$

Int. Brennebene: $\boxed{|u_f(x,y)|^2 = 2\pi\left|\frac{k}{f}\right|^2 \left|\overline{U}_0\left(\alpha = k\frac{x}{f},\ \beta = k\frac{y}{f}\right)\right|}$

Intensitätsverteilung der Brennebene entspricht Absolutquadrat der FT der Objektverteilung
⇒ Phasenrichtige FT, wenn Gegenstand im Abstand f

4f-Anordnung: Zweifache FT, führt zur seitenverkehrten Originalverteilung, Manipulation des Spektrums durch Filter in Brennebene möglich

1. Begrenzung des Spektrums (Kontrastreduktion)
2. Ausblenden langwelliger Komponenten (Kontrasterhöhung)
3. Optisches Differenzieren: Differentiation nach x entspricht Multiplikation mit α.
   Anwendung: Graukeil mit Transmission $\propto |x| + \pi$-Phasensprung beim Vorzeichenwechsel durch Phasenplatte $d = \frac{\lambda_0}{n_{\text{Filter}} - 1}$

3.6 Auflösungsgrenzen

Teleskope: Rayleigh-Kriterium

Vorauss.: paraxiale ebene Wellen, Blende/Linse mit Radius a

Lichtquelle bildet um $x_0 = \frac{\alpha_0}{k}f$ und $y_0 = \frac{\beta_0}{k}f$ verschobene Airy-Scheibchen

Auflösungsgrenze: die Nullstelle des Airy-Scheibchens der zweiten Lichtquelle fällt mit dem Maximum der Ersten zusammen

$$\boxed{\delta x_0 > 1.22\pi\frac{f}{ka} \approx 0.61\frac{\lambda f}{a}}$$

Minimal aufzulösende Winkeldifferenz: $\delta\varphi_0 > 0.61\frac{\lambda}{a}$

Mikroskope: Abbesche Auflösungsgrenze

Definition: Kleinste, noch abgebildete, periodische Struktur

$$\boxed{d \ge \frac{\lambda_0}{n\sin\varphi} = \frac{\lambda_0}{\mathrm{NA}}}$$

Geköhlertes Licht (schräge Beleuchtung): $d \approx \frac{\lambda_0}{2\mathrm{NA}}$

3.7 Holographie

Durch hohe Frequenz des optischen Feldes ist nur eine Detektion der Intensität und nicht der Phase möglich

Lösung: Überlagerung der Objektwelle durch Referenzwelle u_R

Transmissionsfkt.: $T(x,y) = T_0 - \gamma|u_0(x,y) + u_R|^2$

$$T(x,y)u_R = \underbrace{[T_0 - \gamma|u_0(x,y)|^2 - \gamma|u_R|^2]u_R}_{1} - \underbrace{\gamma u_R^2 u_0^*}_{2} - \underbrace{\gamma|u_R|^2 u_0}_{3}$$

1. Unstrukturierte 0. Beugungsordnung
2. Rekonstruierte Objektwelle, 1. Beugungsordnung
3. Phasenkonjugierte Objektwelle, invertierter Strahlengang

Hinweise an: m.beyer@uni-jena.de