1 Differentialgleichungen

1.1 Begriffe

Gewöhnlich: Abhängigkeit von einer Variablen, z.B. $y = y(x)$
Partiell: Abhängigkeit von mehreren Variablen, z.B. $\varphi = \varphi(x, y, z)$
Ordnung: Höchste vorkommende Ableitung.
Linearität: Alle Ableitungen kommen in erster Potenz vor.
Homogenität: Tritt nur bei linearen Differentialgleichungen auf. Eine DGL ist inhomogen, wenn die unabhängige Variable nicht nur in y und dessen Ableitungen vorkommt, sondern auch explizit als $Q(x)$ oder $F(x)$ steht. Die Inhomogenität kann konstant sein.
Integral: Funktion und Lösung der DGL.
Quadratur: Falls die Lösung nicht analytisch ausgedrückt werden kann, heißt die DGL "auf eine Quadratur zurückgeführt."
Allgemeine Lösung: Enthält Integrationskonstanten (Anzahl entsprechend der Ordnung).
Partikulärlösung: Wird auch spezielle Lösung genannt. Entsteht, wenn Konstanten aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden.
Das Richtungsfeld: Eine DGL lösen heißt, einen Weg durch das Richtungsfeld so zu legen, dass die Kurve tangential zu der in jedem Punkt gegebenen Richtung verläuft.

1.2 Separable DGL

Allgemeine Form: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x) \cdot h(y)$

Spezialfall: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x) \cdot y = 0$ mit $g(x) = -P(x)$ und $h(y) = y$

Lösungsverfahren: Trennung der Variablen

$$\frac{1}{h(y)} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x) \Big| \int \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{h(y)} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \, \mathrm{d}x = \int g(x) \, \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{h(y)} \, \mathrm{d}y = \int g(x) \, \mathrm{d}x$$

Orthogonaltrajektorien:
Gegeben: Lineare, homogene, DGL erster Ordnung: $m = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$
Orthogonaltrajektorien $\perp$ auf Tangente: $\Rightarrow m' = -\dfrac{1}{m}$

1.3 Inhomogene, lineare DGL 1. Ordnung

Allgemeine Form: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x) \cdot y = Q(x), \quad Q(x)$ Inhomogenität.

Lösungsverfahren:

1. Schritt: Homogene DGL lösen (setze $Q(x) \equiv 0$)

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x) \cdot y = 0$, separabel

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int P(x) \, \mathrm{d}x$$

$$\ln |y| = -\int P(x) \, \mathrm{d}x + C$$

Homogene Lösung: $y_h = A \cdot \exp\left(-\int P(x) \, \mathrm{d}x\right)$ mit $A = \pm e^c$

2. Schritt: Lösen der inhomogenen DGL durch Variation der Konstanten, dabei wird A zur Funktion $u(x)$. Das Ziel ist es, eine einfach DGL für $u(x)$ zu erhalten:

Konstante variieren: $y = u(x) \cdot \exp\left(-\int P(x) \, \mathrm{d}x\right) = u(x) y_h(x)$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \cdot y_h(x) - u(x) \cdot P(x) \cdot y_h(x)$$

In inhomogene DGL einsetzen:

$$Q(x) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} y_h(x) - \cancel{P(x) \cdot y(x)} + \cancel{P(x) \cdot y(x)}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{Q(x)}{y_h(x)} = Q(x) \exp\left(\int P(x) \, \mathrm{d}x\right)$$

$\Rightarrow u(x)$ bestimmen und in $y(x)$ einsetzen.
Man erhält die allgemeine Lösung einer linearen, inhomogenen DGL 1. Ordnung, indem man zur allgemeinen Lösung der homogenen DGL eine Partikulärlösung der inhomogenen DGL addiert.

1.4 Exakte DGL. Der integrierende Faktor

Allgemeine Form: $A(x, y) \, \mathrm{d}x + B(x, y) \, \mathrm{d}y = 0$

1.4.1 Exakte Differentialgleichungen

Vergleich mit vollständigem Differential einer Fkt. $U(x, y)$.

$$\mathrm{d}U = \frac{\partial U}{\partial x} \, \mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y} \, \mathrm{d}y$$

Das Differential $A(x, y) \, \mathrm{d}x + B(x, y) \, \mathrm{d}y$ ist nur vollständig, wenn:

$\dfrac{\partial A}{\partial y} = \dfrac{\partial B}{\partial x}$ Integrabilitätsbedingung (Satz von Schwarz)

Existiert eine Funktion $U(x, y)$, sodass $A = \frac{\partial U}{\partial x}$ und $B = \frac{\partial U}{\partial y}$, gilt, dann nimmt die DGL die Gestalt $\mathrm{d}U(x, y) = 0$ an und hat die (im Allgemeinen implizite) Lösung $U(x, y) = \text{const.}$
$\Rightarrow$ Solche DGL heißen exakt.

Lösungsverfahren:
1. Schritt: $A(x, y) = \dfrac{\partial U}{\partial x}$ integrieren $\Rightarrow \displaystyle\int A(x, y) \mathrm{d}x$
y ist wie const. zu behandeln, Integrationskonstante ist Fkt. $f(y)$.
2. Schritt: Ergebnis differenzieren $\dfrac{\partial U}{\partial y} = ... + \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}$
3. Schritt: $B(x, y) = \dfrac{\partial U}{\partial y}$ $\Rightarrow$ Gleichsetzen beider Ausdrücke.
4. Schritt: $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}$ integrieren $\Rightarrow$ Lösung für $f(y)$
5. Schritt: $U(x, y) = \displaystyle\int A(x, y) \mathrm{d}x + f(y)$

1.4.2 Nicht exakte Differentialgleichungen

Ist die Integrabilitätsbedingung nicht erfüllt, nennt man die Differentialgleichung nicht exakt. Allgemein kann jede DGL der Form (1) exakt gemacht werden. Dazu wird ein integrierender Faktor $\lambda(x, y)$ eingeführt, welcher mit der DGL multipliziert wird.

$$0 = (\lambda A) \; \mathrm{d}x + (\lambda B) \; \mathrm{d}y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}(\lambda A) \overset{!}{=} \frac{\partial}{\partial x}(\lambda B)$$

$$A \frac{\partial \lambda}{\partial y} - B \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}\right) = 0$$

Dies ergibt eine partielle DGL für $\lambda(x, y)$, die im Allgemeinen schwer zu lösen ist. Jedoch reicht, es irgendein λ, welches die Bedingung erfüllt. Manchmal kann man λ auch "erraten".

1.5 Die lineare, homogene DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Allgemeine Form: $a \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + b \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + c \, y = 0$

Lösungsverfahren:

Exponentialansatz: $y = e^{\lambda x}$, $\lambda = \text{const.}$

$\Rightarrow$ Quadratische Gleichung: $y' = \lambda e^{\lambda x}$ und $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$\Rightarrow (a\lambda^2 + b\lambda + c) e^{\lambda x} = 0$

Charakteristisches Polynom: $\lambda^2 + \dfrac{b}{a} \lambda + \dfrac{c}{a} = 0$

Lösung: $\lambda_{1,2} = -\dfrac{b}{2a} \pm \dfrac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac}$

Zwei Partikulärlösungen: $y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}$

Allgemeine Lösung: $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

1.5.1 Die Wronski-Determinante

Voraussetzung für diese Eigenschaft ist Linearität der DGL. Jede Linearkombination zweier Lösungen ist wieder eine Lösung. Dabei ist $y = c_1y_1 + c_2y_2$ die allgemeine Lösung.
Bestimmung von c_1 und c_2 für beliebige Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned}
&(y(x_0) = c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) \mid \cdot y_2'(x_0))\\
&(y'(x_0) = c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) \mid \cdot y_2(x_0)) \quad -\\
&c_1 = \frac{y(x_0)y_2'(x_0) - y_2(x_0)y'(x_0)}{y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_2(x_0)y_1'(x_0)}\\
&c_2 = -\frac{y(x_0)y_1'(x_0) - y_1(x_0)y'(x_0)}{y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_2(x_0)y_1'(x_0)} \text{ analog}
\end{aligned}$$

Die Konstanten sind nur bestimmbar, wenn der Nenner für beliebige x_0 verschieden von Null ist.

Wronski-Determinante: $W(x_0) = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_2(x_0)y_1'(x_0)$

Wenn die *Wronski-Determinante* für zwei Lösungen y_1 und y_2 für beliebige x_0 von Null verschieden ist, dann bilden diese Lösungen ein *Fundamentalsystem* und ihre Linearkombination ist eine allgemeine Lösung, weil c_1 und c_2 für beliebige x_0 bestimmbar sind.

$W(x) = (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}$

Problem: Doppelwurzel $\lambda 1 = \lambda 2 = \dfrac{-b}{2a}$ für $b^2 - 4ac = 0$
Hier ergibt sich als Lösung: $y = c_1e^{\lambda_1 x}$
Zweite Lösung für Fundamentalsystem durch Variation der Konstanten:

$$\begin{aligned}
y &= u(x)e^{\lambda_1 x}\\
y' &= u(x)\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + u'(x)e^{\lambda_1 x}\\
y'' &= u(x)\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + 2u'(x)\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + u''(x)e^{\lambda_1 x}
\end{aligned}$$

In die Differentialgleichung eingesetzt erhält man:

$$a(u\lambda_1^2 + 2u'\lambda_1 + u'')e^{\lambda_1 x} + b(u\lambda_1 + u')e^{\lambda_1 x} + cue^{\lambda_1 x} = 0$$

$$au'' + u' \cdot \underbrace{(2a\lambda_1 + b)}_{=0 \text{ da } \lambda 1 = \frac{-b}{2a}} + u \cdot \underbrace{(a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c)}_{=0 \text{ (charakt. Gleichung)}} = 0$$

$\Rightarrow au'' = 0$ mit der Lösung $u = c_1 + c_2x$

$\Rightarrow$ Allgemeine Lösung: $y = (c_1 + c_2x)e^{\lambda_1 x}$ mit zwei Konstanten

1.5.2 Begründung des Exponentialansatzes

$$a\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + cy = 0$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda_1\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} - \lambda_2\right)y = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - (\lambda_1 + \lambda_2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \lambda_1\lambda_2 y = 0$$

Der Vergleich zeigt: $\lambda_1 + \lambda_2 = -\dfrac{b}{a}, \quad \lambda_1\lambda_2 = \dfrac{c}{a}$

Nach dem Vièta'schen Wurzelsatz haben Lösungen quadratischer Gleichungen diese Eigenschaften. Ergebnis: 2 DGL 1.Ordnung:

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda_1\right)y = 0 \qquad \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} - \lambda_2\right)y = 0,$$

Dabei ist die Lösung (Fundamentalsystem) durch Trennung der Variablen zu finden. $y_2 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}$.

1.6 Die freie, ungedämpfte Schwingung

NEWTONsches Kraftgesetz (1D Bewegung): $F = m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$

DGL für das HOOKsche Gesetz: $m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x \quad \omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$

DGL der freien ungedämpften Schwingung: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

1.6.1 Systematische Konstruktion der Lösung

Exponentialansatz: $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \;\Rightarrow \lambda_1 = \mathrm{i}\omega_0,\; \lambda_2 = -\mathrm{i}\omega_0$
Allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned}
x &= c_1e^{i\omega t} + c_2e^{-i\omega t} \quad c_1, c_2 \text{ komplex, da } x \text{ reell}\\
&= (c_1 + c_2)\cos(\omega_0 t) + \mathrm{i}(c_1 - c_2)\sin(\omega_0 t)\\
x &= A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t); \quad A, B \text{ reell}
\end{aligned}$$

Bedeutung von A und B:

$x(0) = A \equiv x_0$, Anfangslage (Elongation)

$\ddot{x}(0) = B\,\omega_0 \equiv v_0$, Anfangsgeschwindigkeit

$\Rightarrow x = x_0\cos(\omega_0 t) + \dfrac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$

Andere Darstellung der Lösung:

$$\begin{aligned}
x &= \alpha\cos(\omega_0 t - \vartheta) = \alpha\cos\vartheta \cdot \cos(\omega_0 t) + \alpha\sin\vartheta \cdot \sin(\omega_0 t)\\
&= A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)
\end{aligned}$$

Im Vergleich: α und ϑ sind Polarkoordinaten zu den kartesischen Koordinaten A und B.

Lösung: $x(t) = \alpha\cos\left[\omega_0\left(t - \dfrac{\vartheta}{\omega_0}\right)\right]$

Die Lösung heißt harmonischer Oszillator. "Harmonisch" heißt, dass die Amplitude α nicht von der Kreisfrequenz ω_0 abhängt.

Es gilt: $\omega_0 = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T} \quad f = \text{Frequenz} \quad T = \text{Periodendauer}$

1.6.2 Linearisierte Schwingungen

Newtonsches Grundgesetz in einer Dimension: $m\ddot{x} = F(x)$

Stabile Gleichgewichtslagen $F(x_0) = 0$ und $F'(x_0) < 0$

Lineare Approximation von F an x_0:

$$\begin{aligned}
&F(x) = F(x_0) + F'(x_0) \cdot (x - x_0)\\
&\Rightarrow m\ddot{x} = F'(x_0) \cdot (x - x_0)
\end{aligned}$$

Substitution durch: $\xi = x - x_0 \quad \ddot{\xi} = \ddot{x}$. DGL für den harmonischen Oszillator: $m\ddot{\xi} = F'(x_0)\xi = -k\xi$, mit $k \equiv -F'(x_0) > 0$

Lösung: $x(t) = x_0 + A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \quad$ mit $\quad \omega = \sqrt{-\dfrac{F'(x_0)}{m}}$

Resultat: Die Nullstelle x_0 ist eine stabile Gleichgewichtslage. Wir haben als ein Potentialminimum. (Beachte: $F = -\vec{\nabla}U$)

Instabile Gleichgewichtslagen $F(x_0) = 0$ und $F'(x_0) > 0$

$\Rightarrow m\ddot{\xi} = F'(x_0) \cdot \xi = k\xi, \quad$ mit $\quad k \equiv F'(x_0) > 0$

$$\ddot{\xi} = \omega^2\xi \text{ mit } \omega = \sqrt{\frac{F'(x_0)}{m}}$$

Substitution von ω durch $\mathrm{i}\omega$: $\ddot{\xi} = \omega^2\xi$ geht aus $\ddot{\xi} = -\omega^2\xi$ hervor.

$\Rightarrow \xi = A\cosh(\omega t) + \mathrm{i}B\sinh(\omega t)$

$$\xi = Ce^{\omega t} + De^{-\omega t} \text{ mit } C = \frac{1}{2}(A + \mathrm{i}B),\; D = \frac{1}{2}(A - \mathrm{i}B)$$

Diskussion:
$C \neq 0, D \neq 0 : \lim\limits_{t\to\infty} \xi = \infty$ Runaway-Lösung
$C = 0, D = 0 : \lim\limits_{t\to\infty} \xi = 0$ Kriechbewegung
Resultat: Die Extremstelle x_0 ist eine instabile Gleichgewichtslage.

1.7 Freie, gedämpfte Schwingung

DGL mit geschwindigkeitsproportionaler Reibung:

$$\begin{aligned}
&m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} && \omega_0^2 = \frac{k}{m} \text{ Eigenfrequenz}\\
&0 = \ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega_0^2 x && \beta = \frac{\gamma}{m} \text{ Reibungskoeffizient}\\
&0 = \lambda^2 + \beta\lambda + \omega_0^2
\end{aligned}$$

$\lambda_{1/2} = -\dfrac{\beta}{2} \pm \sqrt{\beta^2 - 4\omega_0^2}$

1.7.1 Schwingfall: $\beta^2 - 4\omega_0^2 < 0$

λ_1 und λ_2 komplex $\Rightarrow \lambda_{1/2} = -\dfrac{\beta}{2} \pm i\Omega$

$$\Omega = \frac{1}{2}\sqrt{4\omega_0^2 - \beta^2} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{\beta^2}{4\omega_0^2}} < \omega_0$$

$$\begin{aligned}\text{Lösung: } x &= e^{-\frac{\beta}{2}t}\left(c_1 e^{i\Omega t} + c_2 e^{-i\Omega t}\right) = e^{-\frac{\beta}{2}t}(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)\\ &= e^{-\frac{\beta}{2}t}\cdot\alpha\cos(\Omega t - \vartheta)\end{aligned}$$

Periodische Schwingung mit exponentiell gedämpfter Schwingunsamplitude. Es tritt eine schwache, unkritische Dämfpung auf.

$T = \dfrac{2\pi}{\Omega}$ Amplitude: $\alpha e^{-\frac{\beta}{2}t}$

1.7.2 Kriechfall: $\beta^2 - 4\omega_0^2 > 0$

λ_1 und λ_2 reell $\Rightarrow \lambda_{1/2} = -\dfrac{\beta}{2} \pm \Omega$

$\Omega = \dfrac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4\omega_0^2}$ und $\omega_0 < \dfrac{\beta}{2}$

$$\begin{aligned}\text{Allgemeine Lösung: } x &= e^{-\frac{\beta}{2}t}\left(c_1 e^{\Omega t} + c_2 e^{-\Omega t}\right)\\ &= e^{-\frac{\beta}{2}t}(A\cosh\Omega t + B\sinh\Omega t)\end{aligned}$$

Es findet keine Schwingung mehr statt, nicht-periodischer Vorgang. Da die Auslenkung zur Ruhelage "kriecht", nennt man diesen Fall mit überkritischer Dämpfung ($\beta > 2\omega_0$) auch Kriechfall.

1.7.3 Aperiodischer Grenzfall: $\beta^2 - 4\omega_0^2 = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = -\dfrac{\beta}{2}$(reelle Doppelwurzel)

Allgemeine Lösung: $x = (c_1 + c_2 t)e^{-\frac{\beta}{2}t}$

Es findet ebenfalls keine Schwingung statt, nicht-periodischer Vorgang. Qualitativer Verlauf ähnlich dem Kriechfall. Es findet ein aperiodischer Grenzfall mit kritischer Dämpfung ($\beta = 2\omega_0$) statt.

1.8 Die lineare, inhomogene DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Allgemeine Form: $a\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + b\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + cy = F(x)$ (Inhomogenität.)

$y_h = c_1y_1 + c_2y_2$ ist die allgemeine Lösung der homog. Gleichung und y_p die spezielle (Partikulär-) Lösung der inhomog. DGL.

Allgemeine Lösung: $y = y_h + y_p = (c_1y_1 + c_2y_2) + y_p$

Zu zeigen: $y = y_h + y_p$ ist eine Lösung:

$$\begin{aligned}&a(y_h'' + y_p'') + b(y_h' + y_p') + c(y_h + y_p)\\ =&\underbrace{(ay_h'' + by_h' + cy_h)}_{=0} + \underbrace{(ay_p'' + by_p' + cy_p)}_{=F(x)} = F(x) \quad q.e.d.\end{aligned}$$

1.8.1 Lösen zweier DGL 1. Ordnung

1.Schritt: Faktorisierung der DGL

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda_1\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda_2\right)y = \frac{1}{a}F(x) \text{ mit: } \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{b}{a},\ \lambda_1\lambda_2 = \frac{c}{a}$$

Zunächst wird durch Koeffizienten der 2. Ableitung dividiert $a \neq 0$. Beide Differentialoperatoren sind vertauschbar, da $\lambda_1, \lambda_2 = \text{const.}$

2. Schritt: $\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda_2\right)y = y' - \lambda_2 y = u(x)$

$$\Rightarrow \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda_1\right)u = \frac{1}{a}F(x)$$

3. Schritt: $u' - \lambda_1 u = \dfrac{1}{a}F(x)$ durch Variation der Konstanten lösen.

4. Schritt: $y' - \lambda_2 y = u(x)$ inhomogene DGL 1. Ordnung
$\Rightarrow$ Lösung durch Variation der Konstanten.

1.8.2 Variation der Konstanten

1. Schritt: Zunächst homogene DGL lösen $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$
2. Schritt: Variation der Konstanten

$$\begin{aligned}y_p &= u(x)y_1 + v(x)y_2 \quad \text{(Ansatz)}\\ y_p' &= u'y_1 + uy_1' + v'y_2 + vy_2'\\ y_p'' &= u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' + v''y_2 + 2v'y_2' + vy_2''\end{aligned}$$

Damit erhält man eingesetzt in die DGL:

$$\begin{aligned}&a(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' + v''y_2 + 2v'y_2' + vy_2'')\\ +&b(u'y_1 \quad + uy_1' + v'y_2 \quad + vy_2')\\ +&c(\quad \underbrace{uy_1}_{=0} \quad \underbrace{+vy_2}_{=0}) = F(x)\end{aligned}$$

Es bleibt nun folgendes übrig:

$$a(u''y_1 + 2u'y_1' + v''y_2 + 2v'y_2') + b(u'y_1 + v'y_2) = F(x)$$

Da nur eine spezielle Lösung gesucht ist, können wir fordern:
$u'y_1 + v'y_2 \overset{!}{=} 0$
Nach dem Ableiten erhält man: $u''y_1 + u'y_1' + v''y_2 + v'y_2' = 0$
Damit bleibt: $u'y_1' + v'y_2' = \frac{1}{a}F(x)$

$$u' = -\frac{1}{a}F(x)\frac{y_2}{y_1y_2' - y_2y_1'} \text{ und } v' = \frac{1}{a}F(x)\frac{y_1}{y_1y_2' - y_2y_1'}$$

Dabei steht im Nenner jeweils die Wronski-Determinante. Somit sind $u(x)$ und $v(x)$ zumindest bis auf Quadraturen bestimmt.

1.8.3 Methode der unbestimmten Koeffizienten

Idee: Bei bestimmten Inhomogenitäten kopiert man die Form von $F(x)$ für den Ansatz y_p.

a) Inhomogenität ist Polynom: $F(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$
Ansatz: $y_p = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ mit unbestimmten Koeffizienten a_k, aber gleichem Exponenten n
Koeffizientenvergleich gleicher x-Potenzen zur Bestimmung der a_k

b) Inhomogenität ist Exponentialfunktion: $F(x) = Ae^{\rho x}$
Ansatz: $y_p = \alpha e^{\rho x}$ mit unbestimmtem Koeffizienten α, aber gleichem Faktor ρ im Exponenten.
Ableitung: $y_p' = \alpha\rho e^{\rho x}$ und $y_p'' = \alpha\rho^2 e^{\rho x}$
Ergbenis: $(a\cdot\alpha\rho^2 + b\cdot\alpha\rho + c\cdot\alpha)e^{\rho x} = Ae^{\rho x}$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{A}{\alpha\rho^2 + b\rho + c}$$

c) Inhomogenität ist Winkelfunktion: $F(x) = a_1\cos(\rho x) + a_2\sin(\rho x)$
Ansatz: $y_p = \alpha_1\cos(\rho x) + \alpha_2\sin(\rho x)$ mit unbestimmten Koeffizienten α_1 und α_2, aber gleichem ρ.

$$\begin{aligned}\text{Ableitung : } y_p' &= -\alpha_1\rho\sin(\rho x) + \alpha_2\rho\cos(\rho x)\\ y_p'' &= -\alpha_1\rho^2\cos(\rho x) - \alpha_2\rho^2\sin(\rho x)\end{aligned}$$

Einsetzen in DGL:

$$\begin{aligned}&\alpha_1\cos(\rho x) + \alpha_2\sin(\rho x)\\ =&(-a\alpha_1\rho^2 + b\alpha_2\rho + c\alpha_1)\cos(\rho x) + (-a\alpha_2\rho^2 - b\alpha_1\rho + c\alpha_2)\sin(\rho x)\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich der sin- und cos. Funktionen liefert Gleichungssystem zur Bestimmung von α_1 und α_2:

$$\alpha_1 = \alpha_1(c - a\rho^2) + \alpha_2\cdot b\rho$$

$$\alpha_2 = \alpha_2(c - a\rho^2) - \alpha_1\cdot b\rho$$

Es funktionieren nur Inhomogenitäten, die sich beim Ableiten reproduzieren (bspw. $\sinh x, \cosh x$).
Das Verfahren funktioniert ebenfalls für Linearkombinationen.

d) Resonanzfall:
Wenn die Inhomogenität $F(x)$ die homogene Gleichung löst, versagt das Lösungsverfahren ($a\rho^2 + b\rho + c = 0 \Rightarrow \rho$ ist Nullstelle der charakteristischen Gleichung).
Ausweg: $y_p = a\cdot x\cdot e^{\rho x}$

1.9 Erzwungene Schwingungen (Zusatz)

DGL: $\ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t)$
$\omega_0 =$ Eigenfrequenz, $\omega =$ Erregerfrequenz
Gewinnung der Partikulärlösung: Koeffizientenvergleich.

1.9.1 Ungedämpfte, erzwungene Schwingung ($\beta = 0$)

DGL: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t)$

(1.8.3) $\Rightarrow$ Gleichungen: $\alpha_1(\omega_0^2 - \omega^2) = f_0 \Rightarrow \alpha_1 = \dfrac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$

$$\alpha_2(\omega_0^2 - \omega^2) = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \quad (\omega \neq \omega_0)$$

Spezielle Lösung: $x_p = \dfrac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos(\omega t)$

Diskussion der Amplitude von x_p als Funktion von ω:

$\omega \ll \omega_0: \quad x_p \approx \dfrac{f_0}{\omega_0^2}\cos(\omega t)$ Elastische Bindung entscheidend

$\omega \gg \omega_0: \quad x_p \approx -\dfrac{f_0}{\omega^2}\cos(\omega t)$ Elastische Bindung egal

$\omega = \omega_0:$ Das Lösungsverfahren versagt.

Allgemeine Lösung: $A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \dfrac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos(\omega t)$

Spezielle Anfangsbedingungen:

$$x(0) \overset{!}{=} 0 = A + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \Rightarrow A = -\frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\dot{x}(0) \overset{!}{=} 0 = B\omega_0 \Rightarrow B = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}(\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t))$$

$$= \underbrace{\left[\frac{2f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin\frac{\omega_0 - \omega}{2}t\right]}_{\text{langsam veränderliche Amplitude}} \underbrace{\sin\frac{\omega_0 + \omega}{2}t}_{\text{hochfrequente Schwingung}}$$

$\Rightarrow$ Modulation oder Schwebung, $\dfrac{\omega_0 - \omega}{2} =$ Dissonanz

1.9.2 Gedämpfte, erzwungene Schwingung

Gleichungssystem: $\alpha_1(\omega_0^2 - \omega^2) + \alpha_2\beta\omega = f_0$

$$-\alpha_1\beta\omega + \alpha_2(\omega_0^2 - \omega^2) = 0$$

Lösungen: $\alpha_1 = \dfrac{f_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2}, \quad \alpha_2 = \dfrac{f_0\beta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2}$

Spezielle Lösung:

$$x_p = \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2}[(\omega_0^2 - \omega^2)\cos(\omega t) + \beta\omega\sin(\omega t)]$$

Die allg. Lösung setzt sich aus homogener und partikulärer Lösung zusammen. x_h ist nur für den Einschwingungsvorgang relevant (ist beendet, wenn $x_h < \frac{1}{e}x_{h0}$). Anschließend ist nur noch x_p relevant und das System schwingt mit ω wie ein harmonischer Oszillator.

$$x_p = \underbrace{\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2}}}_{\alpha(\omega)} \underbrace{(\cos\vartheta\cos(\omega t) + \sin\vartheta\sin(\omega t))}_{\cos(\omega t - \vartheta)}$$

$$\sin\vartheta = \frac{\beta\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2}}, \quad \cos\vartheta = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2}}$$

$\tan\vartheta = \dfrac{\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ Phasenverschiebung

Maximum: $\omega^2 = \omega_0^2 - \dfrac{\beta^2}{2} \overset{!}{\geq} 0 \quad \Rightarrow \beta \leq \sqrt{2}\omega_0$

Resonanzfrequenz: $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \dfrac{\beta^2}{2}} \quad (\omega_R < \Omega < \omega_0)$

Amplitudenmaximum: $\alpha(\omega_R) = \dfrac{f_0}{\beta\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{4}}} \xrightarrow[\beta \to 0]{} \infty$

2 Vektoranalysis

2.1 Gradient, Rotation, Divergenz

Seien folgende Funktionen gegeben: (fettgedruckte Größen sind vektorwertig!)

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$

Nabla-Operator: $\boldsymbol{\nabla} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$

Gradient: $\text{grad} f := \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right) = \vec{\boldsymbol{\nabla}} f$

Ein Vektorfeld $\boldsymbol{v} = \text{grad} f$ heißt Gradientenfeld oder Potentialfeld. Das Gradientenfeld beschreibt Änderungen des Skalarfeldes. Die Länge der Vektoren entspricht der Änderungsrate. Die Richtung zeigt entlang des stärksten Anstiegs.

Rotation: $\text{rot}\boldsymbol{F} := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_x & \hat{\mathbf{e}}_y & \hat{\mathbf{e}}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \boldsymbol{F}.$

Die Rotation beschreibt, ob in einem Vektorfeld *Wirbel* vorhanden sind. Beachte: Konservative Kraftfelder sind stets wirbelfrei.

Divergenz: $\text{div}\boldsymbol{F} = \dfrac{\partial F_x}{\partial x} + \dfrac{\partial F_y}{\partial y} + \dfrac{\partial F_z}{\partial z} = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \boldsymbol{F}.$

Die Divergenz beschreibt die Quellstärke (Quellen für $\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \boldsymbol{F} > 0$ und Senken für $\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \boldsymbol{F} < 0$) eines Vektorfeldes.

Laplace-Operator: Wichtigster Differentialoperator der Physik

$$\Delta f = \text{div}(\text{grad} f) = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

D'Alembert-Operator: $\Box = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$

2.2 Kurvenintegrale

2.2.1 Kurvenintegrale 1. Art

Integral einer Funktion f entlang eines stetig differenzierbaren Weges $C : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^3$.

$$W = \int_C f(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}r = \int_{t_1}^{t_2} f(\boldsymbol{r}(t))\sqrt{\dot{r}_x(t)^2 + \dot{r}_y(t)^2 + \dot{r}_z(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

wobei $\boldsymbol{r}(t) = (r_x, r_y, r_z)$ und $\dot{\boldsymbol{r}}(t) = (\dot{r}_x, \dot{r}_y, \dot{r}_z)$

2.2.2 Kurvenintegrale 2. Art

Integral einer vektorwertigen Funktion $\boldsymbol{F}$ entlang eines stetig differenzierbaren Weges $C : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^3$.

$$W = \int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}r = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \dot{\boldsymbol{r}}(t)\,\mathrm{d}t$$

Lösungsverfahren: Das Linienintegral ist die Summe aller Skalarprodukte $\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ über alle Punkte der Kurve C mit Vektoren $\boldsymbol{F}$.
$\Rightarrow$ Kurve C durch Zeit t parametrisieren.
$\Rightarrow$ Massenpunkt ist zur Zeit $t_1 \leq t \leq t_2$ am Ort $\boldsymbol{r}(t)$ und erfährt dort die Kraft $\boldsymbol{F}(x(t), y(t), z(t))$.

Ein Zentralkraftfeld hat immer folgende Form: $\boldsymbol{F} = \alpha \cdot \dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$

2.2.3 Differentielles Kriterium der Wegunabhängigkeit

Existiert für alle Geschwindigkeiten eine skalare Funktion $U(\boldsymbol{r})$:

$$\boldsymbol{F} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} \Rightarrow W = \int_{t_1}^{t^2} \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = -\int_{P_1}^{P^2} \mathrm{d}U = -(U_2 - U_1)$$

$\Rightarrow$ Arbeit nur abhängig vom Wert der skalaren Funktion $U(\boldsymbol{r})$ am Anfangs- und Endpunkt.

$$W = -\oint_C \mathrm{d}U = -\left(\int_{P_1}^{P_2} \mathrm{d}U + \int_{P_2}^{P_1} \mathrm{d}U\right) = 0$$

Nach der Kettenregel ("Reisegleichung"): $\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v} \cdot \nabla U$

Vergleich mit: $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = -\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \boldsymbol{F} = -\nabla U$

Komponentenweise: $F_1 = -\dfrac{\partial U}{\partial x} \quad F_2 = -\dfrac{\partial U}{\partial y} \quad F_3 = -\dfrac{\partial U}{\partial z}$

$\Rightarrow \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial F_1}{\partial z} = \dfrac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial F_2}{\partial z} = \dfrac{\partial F_3}{\partial y}$ Satz von Schwarz

Gilt also $\boldsymbol{F} = -\nabla U$, ist das Linienintegral für alle Wege wegunabhängig. Die Arbeit entlang eines geschlossenen Weges ist immer Null. Solche Vektorfelder heißen konservativ. Die skalare Größe U nennt man Potential.

$$U = -\int_{x_0}^{x} F_1(\alpha, y_0, z_0)\,\mathrm{d}\alpha - \int_{y_0}^{y} F_1(x, \beta, z_0)\,\mathrm{d}\beta - \int_{z_0}^{z} F_1(x, y, \gamma)\,\mathrm{d}\gamma$$

2.3 Flächen- und Volumenberechnung

Formel für die Fläche unter der Kurve $f(x)$ lässt sich als Doppelintegral schreiben:

Doppelintegral: $A = \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} \left[\int_{y=0}^{y=f(x)} \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x = \int_{x=a}^{x=b}\int_{y=0}^{y=f(x)} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

2.3.1 Polarkoordinaten/Zylinderkoordinaten (ϱ, φ, z)

$x = \rho\cos(\varphi)$ mit $\varrho \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$
$y = \rho\sin(\varphi)$

Flächenelement: $\mathrm{d}A = \varrho\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\varphi$

Volumenelement: $\mathrm{d}V = \varrho\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$

Kreisfläche: $A = \displaystyle\int_{r=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{2\pi} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \frac{R^2}{2}\cdot 2\pi = \pi r^2$

2.3.2 Kugelkoordinaten (r, φ, z)

$x = r\sin(\vartheta)\cos(\varphi)$ mit $r \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$
$y = r\sin(\vartheta)\sin(\varphi)$
$z = r\cos(\vartheta)$

Volumenelement: $\mathrm{d}V = r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$

Kugelvolumen: $V = \displaystyle\int_0^R r^2\,\mathrm{d}r \int_0^\pi \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \frac{4\pi}{3}\cdot R^3$

Volumenelement: $\mathrm{d}V = r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$

2.3.3 Jacobi-Determinante

Sei $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Transformation zwischen zwei Koordinatensystemen $f(u_1, u_2, u_3) = (x_1, x_2, x_3)$.

Jacobi-Matrix von f: $\quad J_{f,ij} := \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial u_j}\right) = \left(\dfrac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_n)}\right).$

Transformation des Volumenelements:

$$\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 = \det\left(\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_n)}\right)\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3$$

3 Hilfreiche Formeln

Winkelfunktionen:
Symmetrie: $\sin(-x) = -\sin(x), \cos(-x) = \cos(x)$
Verschiebung: $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x), \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$

Additionstheoreme:
$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$
$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$

Doppelwinkelfunktionen:
$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$

Trigonometrischer Pythagoras:
$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad$ und $\quad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

Komplexe Zahlen:
$z = x + \mathrm{i}y = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))$
mit $r = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

Taylorreihenentwicklung and der Stelle x_0:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}\left(x^5\right)$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}\left(x^4\right)$$

Hilfreiche Integrale

$$\int \sin^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x)) + C$$

$$\int \cos^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x)) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin(x) + C$$

$$\int \frac{1}{1 + x^2}\mathrm{d}x = \arctan(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x = \tan(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C \quad \text{logarithmische Integration}$$

$$\int f'(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{P.I.}$$

Vektoranalysis

$\mathrm{rot}(\mathrm{grad})U = 0 \quad$ und $\quad \mathrm{div}(\mathrm{rot})\boldsymbol{A} = 0$
$\mathrm{div}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\,\mathrm{rot}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\,\mathrm{rot}\boldsymbol{B}$
$\mathrm{grad}(UV) = U\,\mathrm{grad}V + V\,\vec{\boldsymbol{\nabla}}U$
$\mathrm{rot}(\lambda\boldsymbol{A}) = \lambda\,\mathrm{rot}\boldsymbol{A} + (\mathrm{grad}\lambda) \times \boldsymbol{A}$
$\mathrm{div}(\lambda\boldsymbol{A}) = \lambda\,\mathrm{div}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{grad}\lambda$
$\mathrm{rot}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\mathrm{grad})\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\mathrm{grad})\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\,\mathrm{div}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}\,\mathrm{div}\boldsymbol{A}$
$\mathrm{grad}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\mathrm{grad})\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A}\mathrm{grad})\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \times \mathrm{rot}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B} \times \mathrm{rot}\boldsymbol{A}$

φ	φ [rad]	$\sin(\varphi)$	$\cos(\varphi)$	$\tan(\varphi)$
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\pm\infty$