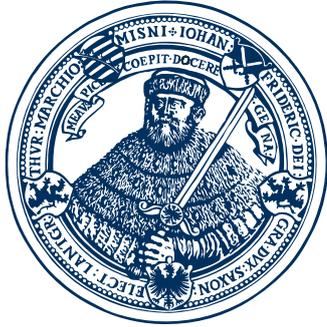


FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA
PHYSIKALISCH-ASTRONOMISCHE-FAKULTÄT



**FRIEDRICH-SCHILLER-
UNIVERSITÄT
JENA**

WINTERSEMESTER 2020 / 2021

Elektrodynamik Tutorium

MARTIN BEYER

Dies ist ein L^AT_EX-Satz zu meinem Tutorium "Elektrodynamik" zur Vorlesung von Professor Fritzsche. Hinweise und Anmerkungen bitte an: m.beyer@uni-jena.de

Inhaltsverzeichnis

1	Tutorium	4
1.1	Wiederholung Indexkalkül	4
1.2	Integralsätze	5
2	Tutorium	6
2.1	Diracsche Delta Distribution	6
2.2	Die Poisson-Gleichung	7
2.3	Potential einer homogen geladenen Kugel	9
3	Tutorium	12
3.1	Elektrostatische Energie	12
3.2	Greensche Funktionen	13
3.3	Randwertprobleme	14
4	Tutorium	16
4.1	Spiegelladungsmethode	16
4.2	Geladener Draht endlicher Länge	17
4.3	Randwertprobleme und Kondensatoren	19
5	Tutorium	22
5.1	Herleitung der Multipolentwicklung	22
5.2	Quadrupolmoment symmetrischer Ladungsverteilungen	24
5.3	Multipolentwicklung des geladenen Drahts endlicher Länge	25
6	Tutorium	27
6.1	Kugelsymmetrische Lösung der Laplace-Gleichung	27
6.2	Die Kugelflächenfunktionen	30
6.3	Sphärische Multipolmomente	31
7	Tutorium	33
7.1	Magnetostatik - Einführung	33
7.2	Die Feldgleichungen der Magnetostatik	34
7.3	Magnetfeld eines geladenen Drahtes	36
8	Tutorium	39
8.1	Magnetische Multipolentwicklung	39
8.2	Rotierende Kugel homogener Ladungsverteilung	42
9	Tutorium	44
9.1	Maxwellgleichungen in Materie	44
9.2	Energiebilanz des EM-Feldes	46
9.3	Magnetfeld einer quadratischen Drahtschleife	47
9.4	Lagrange Funktion des EM-Feldes	48
10	Tutorium	50
10.1	Eichinvarianz der Maxwell-Gleichungen	50

10.2 Kovarianz der Maxwell-Gleichungen	51
11 Tutorium	56
11.1 Ebene Wellen	56
11.2 Bewegter Stab im homogenen Magnetfeld	59
12 Tutorium	61
12.1 Klausurvorbereitung	61

1 Tutorium

1.1 Wiederholung Indexkalkül

$$\text{Kronecker Delta: } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \\ 0 & \text{wenn } i \neq j \end{cases}$$

$$\text{Levi-Civita-Symbol: } \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{wenn } ijk \text{ eine gerade Permutation von } (1,2,3) \text{ ist} \\ -1 & \text{wenn } ijk \text{ eine ungerade Permutation von } (1,2,3) \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Einsteinsche Summenkonvention: über doppelt auftretende Indizes wird summiert. Beachte: Indizes dürfen nicht mehr als zweimal auftreten.

$$\sum_i a_i b_i \equiv a_i b_i \quad (\hat{A} \cdot \hat{B})_{ij} = A_{ik} B_{kj} \quad (1.1)$$

Wir können nun das Kreuzprodukt auf folgende Art und Weise definieren:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \mathbf{e}_i. \quad (1.2)$$

Für das Skalarprodukt gilt folgendes:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_j \delta_{ij}. \quad (1.3)$$

Das Kronecker Delta *wandelt* dabei Indizes um, da bei der auftretenden Summe nur der Index i übrigbleibt.

Eigenschaften des Epsilon-Tensors: ε_{ijk}

Werden die Indizes zyklisch vertauscht, dann ändert sich der Wert des Ergebnisses nicht. Beim Tausch zweier Indizes wechselt das Vorzeichen

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij} = \varepsilon_{jki}, \quad \varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}. \quad (1.4)$$

Weiterhin gilt folgende wichtige Identität:

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}. \quad (1.5)$$

Differentialoperatoren: $\frac{\partial}{\partial x_i} = \partial x_i$

Für Divergenz, Rotation und den Gradienten lassen sich folgende Ausdrucksweisen finden:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \partial_i A_i \quad \nabla \times \mathbf{A} = \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k \mathbf{e}_i \quad \nabla \phi = (\partial_i \phi) \mathbf{e}_i. \quad (1.6)$$

Insbesondere gelten folgende Identitäten:

$$\text{div rot } \mathbf{A} = 0, \quad \text{rot grad } \Phi = 0 \quad (1.7)$$

Übung 1: Zeige die Lagrange-Identität

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}). \quad (1.8)$$

Beweis der Identität:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &\stackrel{(1.3)}{=} (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i (\mathbf{c} \times \mathbf{d})_i \\ &\stackrel{(1.2)}{=} \varepsilon_{ijk} a_j b_k \varepsilon_{ilm} c_l d_m \\ &= \varepsilon_{jki} \varepsilon_{lmi} a_j b_k c_l d_m \\ &\stackrel{(1.5)}{=} (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) a_j b_k c_l d_m \\ &= (a_j c_j)(b_k d_k) - (a_j d_j)(b_k c_k) \\ &\stackrel{(1.3)}{=} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \end{aligned}$$

□

1.2 Integralsätze

Der *Gaußsche Integralsatz* stellt eine Beziehung zwischen der Divergenz eines Vektorfeldes und dem durch das Feld vorgegebenen Flusses durch eine geschlossene Oberfläche her.

Der *klassische Integralsatz von Stokes* besagt, dass das Flächenintegral über die Rotation eines Vektorfeldes gleich der Tangentialkomponente des Feldes entlang des Randes der Fläche ist.

$$\iiint_V dV \operatorname{div} \mathbf{F} = \oiint_{\partial V} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{F} \quad \text{Gaußscher Satz} \quad (1.9)$$

$$\iint_A d\mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \oint_{\partial A} d\mathbf{r} \mathbf{F} \quad \text{Stokesscher Satz.} \quad (1.10)$$

Übung 2:

Die Integralsätze lassen sich nutzen, um aus der bereits aus Experimentalphysik II bekannten integralen Form der *Maxwell-Gleichungen* die differentielle Form abzuleiten:

$$\begin{aligned} \oiint \mathbf{E} d\mathbf{A} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint \rho dV && \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \oiint \mathbf{B} d\mathbf{A} &= 0 && \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \\ \oint \mathbf{E} d\mathbf{r} &= - \iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{A} && \Rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \oint \mathbf{B} d\mathbf{r} &= \mu_0 \iint \mathbf{j} d\mathbf{A} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} d\mathbf{A} && \Rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned}$$

2 Tutorium

2.1 Diracsche Delta Distribution

Zur Motivation der Diracschen Delta Distribution betrachten wir zunächst folgende Funktionenfolge:

$$d_l(x) = \begin{cases} \frac{1}{l} & -\frac{l}{2} \leq x \leq \frac{l}{2} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.1)$$

Im Grenzwert $l \rightarrow 0$ wird daraus formal die folgende Funktion

$$\lim_{l \rightarrow \infty} d_l(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.2)$$

Wir betrachten nun die Wirkung der Funktionenfolge $d_l(x)$ auf ein Integral. Formal führen wir hier eine Faltung einer beliebigen Testfunktion $f(x)$ mit der Funktion $d_l(x)$ aus und bilden anschließend den Grenzwert $l \rightarrow 0$:

$$\lim_{l \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} d_l(x - x_0) f(x) dx = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{l} \int_{x_0 - l/2}^{x_0 + l/2} dx f(x). \quad (2.3)$$

Wir können nun den Mittelwertsatz der Analysis benutzen, nach dem das Integral den Wert $l \cdot f(\bar{x})$ annimmt, wobei \bar{x} ein Element des Integrationsintervalls ist. Es ergibt sich dann

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{l} (l f(\bar{x})) = \lim_{l \rightarrow 0} f(\bar{x}) = f(x_0). \quad (2.4)$$

Wird nun der Grenzwert gebildet, dann schrumpft das Integrationsintervall und es ergibt sich der Funktionswert $f(x_0)$. Fassen wir das zusammen ergibt sich:

$$\lim_{l \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} d_l(x - x_0) f(x) dx \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx, \quad (2.5)$$

das heißt, wir definieren die Delta Distribution über die Auswertung eines Integrals mit anschließender Grenzwertbildung für $l \rightarrow 0$. Daher ist $\delta(x)$ keine Funktion im gewöhnlichen Sinn.

Eigenschaften: Im Folgenden wollen wir einige Eigenschaften der Delta-Distribution zeigen:

$$\begin{aligned} \delta(-x) &= \delta(x) \\ \delta(kx) &= \frac{1}{|k|} \delta(x) \\ \delta(g(x)) &= \sum_i \frac{1}{|g'(x_i)|} \delta(x - x_i). \end{aligned}$$

Im letzten Schritt bezeichnen die x_i die einfachen Nullstellen der Funktion $g(x)$ und $g'(x) = \frac{dg}{dx}$. Ein Anwendungsbeispiel für diese Regel ist folgendes:

$$\delta(x^2 - a^2) = \delta[(x - a)(x + a)] = \frac{1}{2|a|}[\delta(x - a) + \delta(x + a)]. \quad (2.6)$$

Wir können zudem über das folgende Integral eine neue Funktion Θ definieren:

$$\Theta(x) = \int_{-\infty}^x \delta(\xi) d\xi = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}. \quad (2.7)$$

Diese Funktion wird *Heaviside'sche Sprungfunktion* genannt. Beachte hierbei, dass der Wert für $x = 0$ nicht bestimmt ist. Konventionshalber wird er meist auf 0, 1 oder 1/2 gesetzt. Es lässt sich mit dem Hauptsatz der Integralrechnung folgern, dass die (unstetige¹) Heaviside Funktion als Ableitung die Delta-Distribution besitzt

$$\frac{d\Theta}{dx} = \delta(x). \quad (2.8)$$

2.2 Die Poisson-Gleichung

Wie aus der Vorlesung bekannt ist, lässt sich die Poisson-Gleichung in der Elektrostatik folgendermaßen formulieren:

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = -\frac{q}{\epsilon_0}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.9)$$

Der zweite Term gilt für eine Punktladung im Punkt \mathbf{r}' . Wir wollen nun diese Beziehung durch Verifizierung des folgenden Ausdrucks herleiten:

$$\Delta\frac{1}{|\mathbf{r}|} = -4\pi\delta(\mathbf{r}). \quad (2.10)$$

Wir einigen uns zunächst auf die Konvention $|\mathbf{r}| = r$. Der Laplace-Operator Δ lässt sich schreiben als $\Delta = \nabla \cdot \nabla$. Wir benutzen im Folgenden die EINSTEINSche Summenkonvention. Deshalb berechnen wir zuerst folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \nabla\frac{1}{r} &= \partial_i\frac{1}{r}\hat{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{\sqrt{x_jx_j}}\hat{\mathbf{e}}_i \\ &= \frac{-1}{r^3}\partial_i(x_jx_j)\hat{\mathbf{e}}_i = -\frac{1}{r^3}2x_j\delta_{ij}\hat{\mathbf{e}}_i \\ &= -\frac{x_i}{r^3}\hat{\mathbf{e}}_i = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

¹Damit ist die Funktion formal nicht analytisch differenzierbar in $x = 0$

Nun bilden wir die Divergenz des entstandenen Vektors:

$$\begin{aligned}
 \Delta \frac{1}{r} &= \nabla \cdot \left(-\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \partial_i \left(\frac{-x_i}{r^3} \right) = -\frac{1}{r^3} \underbrace{\partial_i x_i}_{=3} - x_i \partial_i \frac{1}{r^3} \\
 &= -\frac{3}{r^3} - x_i \frac{-3}{r^4} \partial_i(r) \\
 \text{NR.: } \partial_i(r) &= \partial_i \sqrt{x_j x_j} = \frac{1}{2r} (2x_j \delta_{ij}) = \frac{x_i}{r}. \\
 &= -\frac{3}{r^3} + x_i x_i \frac{3}{r^5} = -\frac{3}{r^5} + \frac{3}{r^5} = 0.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Es zeigt sich somit, dass $\Delta(1/r) = 0$ gilt, vorausgesetzt, $\mathbf{r} \neq 0$, denn im Ursprung weist die Funktion eine Singularität auf und ist nicht differenzierbar. Wir können die Lösung trotzdem retten, indem wir den im letzten Tutorium eingeführten Gaußschen Satz benutzen. Danach folgt nämlich für eine Integration über ein beliebiges Volumen V

$$-\iiint_V \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) dV = -\oiint_{\partial V} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot d\mathbf{A}. \tag{2.13}$$

Wählen wir nun als Integrationsvolumen eine konzentrische Kugel, dann integrieren wir bei der Auswertung des Flächenintegrals über eine Kugelschale mit konstantem Radius, damit lässt sich das Integral einfach berechnen:

$$\begin{aligned}
 -\iiint_V \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) dV &= -\int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \vartheta \frac{\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathcal{r}}{r^3} d\vartheta d\varphi \\
 -\iiint_V \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) dV &= -2\pi [-\cos \vartheta]_0^\pi = -4\pi.
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Da wir bereits wissen, dass der Integrand für alle Werte $r \neq 0$ gleich Null ist, können wir die linke Seite als eine Delta-Distribution auffassen, die dann einen Wert liefert, wenn der Ursprung im Integrationsgebiet liegt. Es folgt dann

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\mathbf{r}). \tag{2.15}$$

Allgemein lässt sich das Volumenintegral über die Delta-Distribution ausdrücken als

$$\iiint_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV = \iiint_V \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') dV = \begin{cases} 1 & \mathbf{r}' \in V \\ 0 & \mathbf{r}' \notin V \end{cases}. \tag{2.16}$$

Die Poisson-Gleichung lässt sich nun für eine Punktladung im Ursprung schreiben zu

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad \Rightarrow \quad \Delta \Phi = -\frac{q}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r}). \tag{2.17}$$

2.3 Potential einer homogen geladenen Kugel

Variante 1: Poisson-Gleichung Wir wollen nun die Poisson-Gleichung benutzen, um aus einer gegebenen (kugelförmigen) Ladungsverteilung das Potential im gesamten Raum zu bestimmen

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0} = \begin{cases} 0 & r > R \\ -\frac{\rho}{\varepsilon_0} & r \leq R \end{cases}. \quad (2.18)$$

Für Kugelsymmetrische Probleme $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(r)$ vereinfacht sich der Laplace-Operator in Kugelkoordinaten zu

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right). \quad (2.19)$$

Somit lässt sich die Poisson-Gleichung in den beiden Raumbereichen innerhalb und außerhalb der Kugel durch elementare Integration lösen.

Betrachten wir zunächst den Fall $r > R$:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi(r) = 0 &\Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 0 \\ &\Rightarrow r^2 \frac{d\Phi}{dr} = C_1 \\ &\Rightarrow \Phi(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Für den Bereich $r < R$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi(r) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} &\Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ &\Rightarrow r^2 \frac{d\Phi}{dr} = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} r^3 + C_3 \\ &\Rightarrow \Phi(r) = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 - \frac{C_3}{r} + C_4. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Zur Bestimmung der Integrationsbedingungen werden verschiedene Randbedingungen betrachtet. Da die Wahl des Potentialnullpunktes für die Feldverteilung keine Rolle spielt, wählen wir die übliche Konvention, dass im Unendlichen das Potential verschwindet

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(r) = 0 \Rightarrow C_2 = 0. \quad (2.22)$$

Weiterhin muss ebenfalls die Konstante C_3 verschwinden. Wenden wir auf die Lösung $r < R$ wieder den Laplace-Operator an, ergibt sich

$$\Delta\Phi(r) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} + C_3 4\pi\delta(\mathbf{r}). \quad (2.23)$$

Der zweite Summand entspricht hier formal einer Punktladung im Ursprung. Betrachten wir jedoch für unsere homogene Ladungsverteilung die Gesamtladung in einer Kugelschale mit Radius r , so stellen wir fest, dass im Grenzwert $r \rightarrow 0$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \iint d\Omega \int_0^r \varrho r'^2 dr = 0 \quad (2.24)$$

die Gesamtladung verschwindet. Die Lösung einer Punktladung im Ursprung entspricht daher nicht der gegebenen Ladungsverteilung.

Weiterhin lassen sich Stetigkeitsbedingungen aufstellen für das Potential und das elektrische Feld im Punkt R . Es bezeichne $\Phi_{<}(r)$ das Potential innerhalb der Kugel und $\Phi_{>}(r)$ das Potential außerhalb der Kugel. Dann gelte

$$\Phi_{<}(R) = \Phi_{>}(R) \quad \Rightarrow \quad -\frac{\rho}{6\epsilon_0}r^2 + C_4 = -\frac{C_1}{r} \quad (2.25)$$

$$\Phi'_{<}(R) = \Phi'_{>}(R) \quad \Rightarrow \quad \frac{C_1}{R^2} = -\frac{\rho}{3\epsilon_0}R. \quad (2.26)$$

Wird jetzt noch die für konstante Ladungsdichte ρ die Gesamtladung q pro Kugelvolumen

$$\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3} \quad (2.27)$$

eingesetzt, ergibt sich

$$C_1 = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad C_4 = \frac{3}{2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (2.28)$$

Damit lässt sich die allgemeine Lösung folgendermaßen formulieren:

$$\Phi(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & r > R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right) & r < R \end{cases}. \quad (2.29)$$

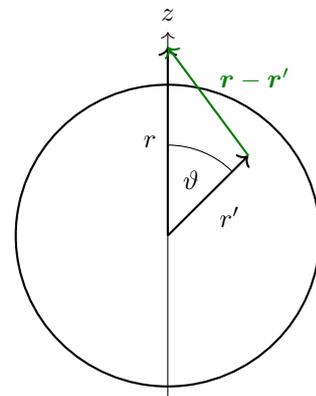
Variante 2: Lösen des Integrals Das Potential der homogen geladenen Kugel lässt sich ebenfalls durch die Lösung des allgemeinen Integrals zur Berechnung des Potentials angeben:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \iiint_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r}' \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(r')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.30)$$

Wir können uns das Problem durch eine geschickte Wahl des Koordinatensystems vereinfachen. Damit legen wir wie rechts dargestellt unser Koordinatensystem so, dass \mathbf{r} in Richtung der z -Achse zeigt. Dann zeigt sich, dass sich der Betrag $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ mithilfe des Kosinussatzes für Dreiecke einfach schreiben lässt als

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta}. \quad (2.31)$$

Damit lässt sich die Integration über den gesamten Raum ausführen, wobei sich die radiale Integration auf



$r \leq R$ beschränkt:

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{r}) &= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \iiint r'^2 \sin \vartheta \, dr' \, d\vartheta \, d\varphi \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta}} \\
&= \frac{2\pi\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_1^{-1} r'^2 \, dr' \, du \frac{-1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'u}} \\
&= \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r'^2}{rr'} \left[\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'u} \right]_1^{-1} dr' \\
&= \frac{\rho}{2\epsilon_0 r} \int_0^R r' (|r + r'| - |r - r'|) dr'. \tag{2.32}
\end{aligned}$$

Zur Lösung des verbleibenden Integrals wird wieder zwischen Außen- und Innenbereich unterschieden:

$$\begin{aligned}
r \geq R: \quad \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{\rho}{2\epsilon_0 r} \int_0^R r' (r + r' - (r - r')) dr' \\
&= \frac{\rho}{\epsilon_0 r} \int_0^R r'^2 dr' = \frac{\rho}{3\epsilon_0 r} R^3 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \tag{2.33}
\end{aligned}$$

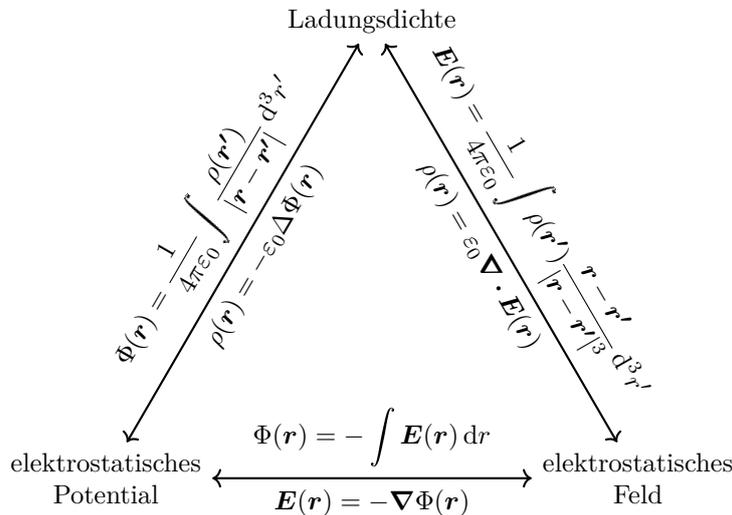
Für den Innenbereich der Kugel muss das Integral in zwei Teile aufgespalten werden, um eine Fallunterscheidung zwischen $r > r'$ und $r < r'$ durchführen zu können:

$$\begin{aligned}
r \geq R: \quad \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{\rho}{2\epsilon_0 r} \int_0^R r' (r + r' + |r - r'|) dr' \\
&= \frac{\rho}{2\epsilon_0 r} \left[\int_0^r 2r'^2 dr' + \int_r^R r' (2r) dr' \right] \\
&= \frac{\rho}{2\epsilon_0 r} \left(\frac{2}{3} r^3 + [rr'^2]_r^R \right) \\
&= \frac{\rho}{2\epsilon_0 r} \left(\frac{2}{3} r^3 + rR^2 - r^3 \right) \\
&= \frac{\rho}{\epsilon_0} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{6} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right). \tag{2.34}
\end{aligned}$$

Damit stimmen die beiden Ergebnisse mit Gleichung (2.29) überein.

3 Tutorium

Wir wollen zunächst nochmal einen kleinen Überblick über die Elektrostatik geben und die Ladungsdichte, das elektrostatische Feld und das elektrostatische Potential miteinander verknüpfen.



3.1 Elektrostatische Energie

Wir wollen im Folgenden den Begriff der elektrostatischen Energie näher beleuchten. Dafür betrachten wir zunächst die potentielle Energie einer Ladung q im äußeren Feld $\Phi(\mathbf{r})$

$$W(\mathbf{r}) = q \cdot \Phi(\mathbf{r}). \tag{3.1}$$

Dabei wird davon ausgegangen, dass die Ladung q nicht selbst zum Feld $\Phi(\mathbf{r})$ beiträgt. Nun wird eine Ladungsverteilung bestehend aus N Punktladungen betrachtet und die *elektrostatische Energie* der Ladungsverteilung in ihrem *eigenen* Feld ($\Phi_{\text{ext}} = 0$) betrachtet. Dafür rücken wir die Ladungen q_i der Reihe nach an ihre Plätze \mathbf{r} . Für die erste Ladung muss keine Arbeit aufgewendet werden, die potentielle Energie einer Punktladung ist Null. Für die Punktladung i ergibt sich die potentielle Energie durch das elektrostatische Potential aller $i - 1$ Punktladungen

$$W_i(\mathbf{r}_i) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \tag{3.2}$$

Dabei kann W_i als die notwendige Arbeit verstanden werden, um q_i vom Unendlichen nach \mathbf{r}_i zu bringen. Die Gesamtenergie der Ladungsverteilung ergibt sich nun durch Summation über alle W_i

$$W = \sum_{i=1}^N W_i(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i \cdot q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^N \frac{q_k \cdot q_j}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j|} (1 - \delta_{kj}). \tag{3.3}$$

Dabei stellt der Term $(1 - \delta_{ij})$ nur sicher, dass nicht über die Werte $i = j$ summiert wird.

Für eine beliebige Ladungsverteilung lässt sich diese in N Teilladungen der Größe Δq_i mit Volumen ΔV_i aufteilen. Wird nun der Grenzwert $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\
 &= \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) \\
 &= -\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r \Delta\Phi(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) \\
 &= -\frac{\epsilon_0}{2} \underbrace{[\nabla\Phi \cdot \Phi]}_{=0} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r (\nabla\Phi)^2 \\
 &= \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Den Integranden können wir nun als die Energiedichte der Ladungsverteilung identifizieren

$$w(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2. \tag{3.5}$$

3.2 Greensche Funktionen

Wir führen das Konzept der GREENSchen Funktion ein, um eine einfache Darstellung für die Lösung von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen zu gewinnen.

Sei nun \hat{L} ein linearer Differentialoperator. Dann definieren wir die GREENSche Funktion $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ als

$$\boxed{\hat{L}G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \tag{3.6}$$

Diese Definition erlaubt uns nun einen Darstellungswechsel von einer Differentialgleichung mit dem Operator \hat{L} zu dessen Lösung

$$\hat{L}\Phi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(\mathbf{r}) = \int_V d^3r' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}'). \tag{3.7}$$

Wir können diese Beziehung zeigen, indem wir auf die rechte Gleichung den Differentialoperator anwenden und die Definition (3.6) unter dem Integral benutzen.

Die GREENSche Funktion selbst gibt Auskunft über die *Antwort* eines Systems auf eine δ -förmige Anregung. $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ enthält Infos über die Geometrie des Problems (Randbedingungen) und den Differentialoperator, jedoch nicht über die Quelle des Feldes $f(\mathbf{r})$.

3.3 Randwertprobleme

Wir wollen uns nun mit der Frage beschäftigen welche physikalischen Randbedingungen sich ergeben, wenn wir in das Feld ein leitendes Material einbringen. Dafür definieren wir zunächst den Begriff des *Leiters*.

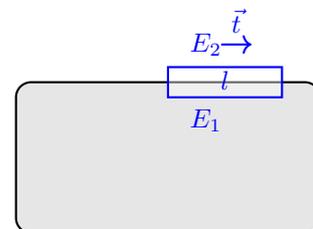
Ein Leiter ist ein Material, in dem sich Elektronen durch Anlegen eines äußeren Feldes verschieben lassen.

Diese Definition impliziert mehrere fundamentale Eigenschaften von Leitern. Nehmen wir nun den statischen Fall eines zeitlich konstanten äußeren elektrischen Feldes an. Dann wird sich ein Gleichgewicht für die Ladungsverteilung im Leiter einstellen (Gleichgewichtszustand). Allerdings lassen sich im Leiter Elektronen durch ein anliegendes Feld verschieben. Wir können somit schlussfolgern, dass in einem Leiter das elektrische Feld verschwinden muss, da sich sonst die Ladungen verschieben würden, was wir zuvor ausgeschlossen haben².

Aus dem Verschwinden des elektrischen Feldes folgt weiterhin, dass im Leiter das elektrische Potential einen konstanten Wert aufweist und die Ladungsdichte $\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}$ ebenfalls verschwindet. Somit sitzen Ladungen nur auf der Oberfläche des Leiters.

Elektrisches Feld an Grenzflächen:

Wir überlegen uns nun, wie sich das elektrische Feld an der Außenseite des Leiters verhält. Dafür benutzen wir zunächst die STOKESSche Integralformel und die Bedingung, dass für eine statische Ladungsverteilung $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ gilt. Wir integrieren nun über eine Fläche ΔA , die sich zur Hälfte im Metall und zur anderen Hälfte außerhalb befindet und parallel zur Oberfläche verläuft.



$$\begin{aligned}
 0 &= \iint_{\Delta A} \nabla \times \mathbf{E} \, d\mathbf{A} = \oint_{\partial \Delta A} \mathbf{E} \, d\mathbf{s} \\
 &= l \cdot \mathbf{t} (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = l \mathbf{t} \cdot \mathbf{E}_2.
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

Das führt zur Randbedingung für die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes an der Oberfläche

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \Big|_{\text{Rand}} = 0.
 \tag{3.9}$$

²Eine andere Herangehensweise ist folgende: Stellen wir uns vor, in unserem Leiter existiere ein elektrisches Feld, dann würde auf die Ladungsträger eine Kraft wirken, was die Ladungsträger beschleunigt. Das Beschleunigen und Abbremsen im Leiter würde zu einer Erwärmung des Leiters führen, was der experimentellen Beobachtung widerspricht.

Wir können nun analog die eingeschlossene Ladung in einem Zylinder ΔV , welcher ein Oberflächenstück des Leiters einschließt, mit dem Gaußschen Satz schreiben als

$$\frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{\Delta V} \varrho \, dV = \oiint_{\partial(\Delta V)} \mathbf{E} \, d\mathbf{A} = a \cdot \mathbf{n}(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1). \quad (3.10)$$

Dabei bezeichnet a die Deckelfläche parallel zum Leiter. Der Fluss des elektrischen Feldes verschwindet, da das elektrische Feld keine Tangentialkomponente aufweist. Mit $\mathbf{E}_1 = 0$ folgt nun für die Normalkomponente des elektrischen Feldes

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \Big|_{\text{Rand}} = \frac{q}{a\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \quad (3.11)$$

wobei wir mit $\sigma = \rho/a$ die Flächenladungsdichte eingeführt haben.

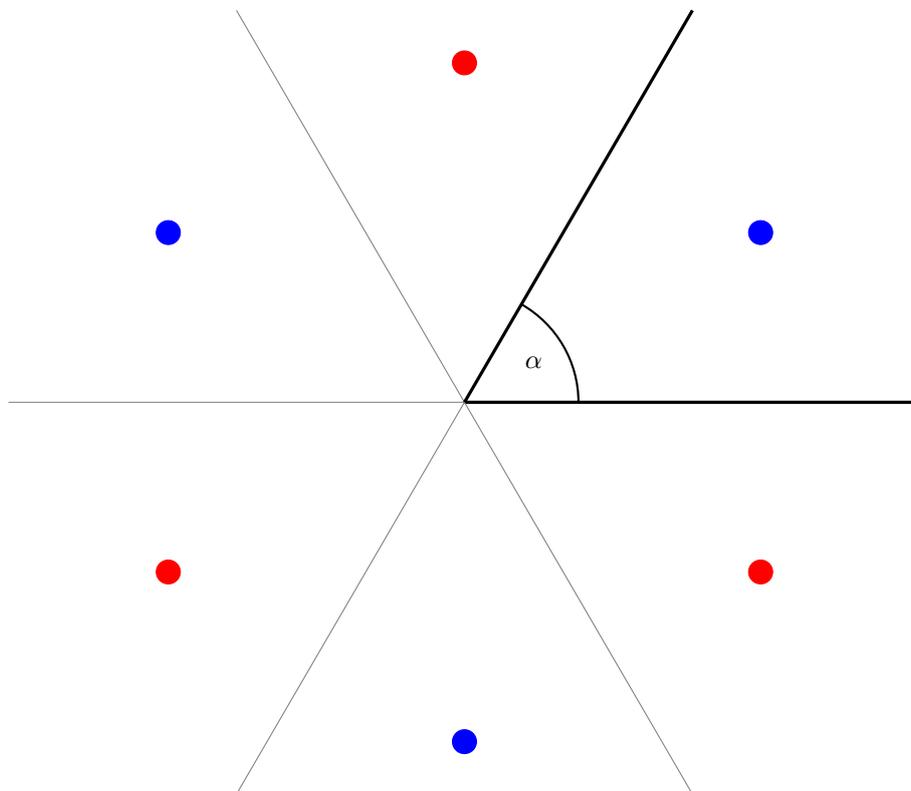
4 Tutorium

4.1 Spiegelladungsmethode

Für ein paar leitende Platten, die einen Winkel α miteinander einschließen sind nur folgende Winkel erlaubt:

$$\alpha = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ. \quad (4.1)$$

Alle anderen Winkel sind verboten, da nach der Spiegelladungsmethode virtuelle Ladungen im Außenraum auftreten würden. Für den Winkel $\alpha = 60^\circ$ ist die Spiegelladungsverteilung beispielhaft dargestellt ³:

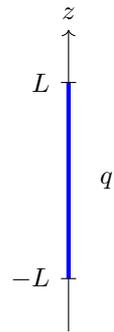


³Eine Animation dafür findet sich unter: <http://www.tet.ovgu.de/Lehre/Feldanimationen.html>

4.2 Geladener Draht endlicher Länge

Wir betrachten einen homogen geladenen Draht der Länge $2L$ und Gesamtladung q und wollen das Potential, elektrische Feld und die Äquipotentialflächen bestimmen. Dann können wir entlang des Drahtes eine Linienladungsdichte $\lambda = q/2L$ angeben. Für die gesamte Ladungsdichte im Raum gilt nun

$$\varrho(\mathbf{r}) = \frac{q}{2L} \Theta(L - z) \cdot \Theta(L + z) \cdot \delta(x)\delta(y). \quad (4.2)$$



Dabei bezeichnet $\Theta(x)$ die HEAVISIDESche Stufenfunktion.

Wir können das Potential allgemein über folgendes Integral bestimmen:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\varrho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q}{2L} \Theta(L - z') \cdot \Theta(L + z') \cdot \delta(x')\delta(y') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dx' dy' dz' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{q}{2L} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}} dz' \quad u = z - z', \quad du = -dz' \\ &= \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2L} \int_{z'=-L}^L \frac{du}{\sqrt{\rho^2 + u^2}}, \quad \text{mit } \rho^2 = x^2 + y^2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Wir berechnen hier an dieser Stelle folgendes Hilfsintegral:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx &= \frac{1}{a} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx, \quad \frac{x}{a} = u, \quad dx = a du \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} du \quad u = \sinh(z) \quad du = \cosh(z) dz \\ &= \int \frac{\cosh(z)}{\sqrt{1 + \sinh^2(z)}} dz = \int \frac{\cosh(z)}{\cosh(z)} dz \\ &= \operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right) + C = \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}\right) + C \\ &= \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + \tilde{C} \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2L} \ln\left(z - z' + \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}\right) \Big|_{-L}^L \\ &= \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2L} \ln\left[\frac{z - L + \sqrt{\rho^2 + (z - L)^2}}{z + L + \sqrt{\rho^2 + (z + L)^2}}\right]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Wir können nun das elektrische Feld durch Gradientenbildung $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r})$ berechnen. In Zylinderkoordinaten ergibt sich

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial\rho}\Phi\hat{\mathbf{e}}_\rho - \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{e}}_z, \quad (4.6)$$

da das Potential nicht vom Azimuthalwinkel abhängt. Wir geben die Lösung im Folgenden nur an:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2L} \left[\left(\frac{z+L}{\sqrt{\rho^2+(z+L)^2}} - \frac{z-L}{\sqrt{\rho^2+(z-L)^2}} \right) \hat{\mathbf{e}}_\rho + \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z+L)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z-L)^2}} \right) \hat{\mathbf{e}}_z \right]. \quad (4.7)$$

Wir wollen die Lösung für das elektrische Feld noch diskutieren und auf Plausibilität überprüfen. In der x - y -Ebene muss aus Symmetriegründen der z -Anteil des elektrischen Feldes verschwinden. Tatsächlich ergibt sich

$$\mathbf{E}(\rho, z=0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2L} \frac{1}{\sqrt{\rho^2+L^2}} \hat{\mathbf{e}}_\rho. \quad (4.8)$$

Betrachten wir nun noch die Grenzfälle $\rho \gg L$ und $\rho \ll L$. Es ergibt sich

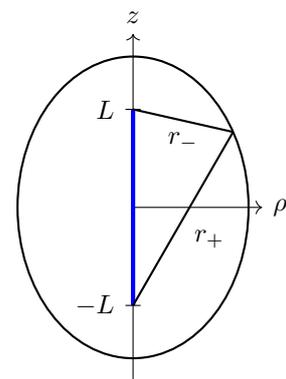
$$\begin{aligned} \rho \gg L \quad \mathbf{E}(\rho, z=0) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\rho^2} \hat{\mathbf{e}}_\rho \quad \text{Punktladung} \\ \rho \ll L \quad \mathbf{E}(\rho, z=0) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\rho L} \hat{\mathbf{e}}_\rho \quad \text{unendlich langer Draht.} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Tatsächlich ergeben sich die beiden Spezialfälle einer Punktladung q und die Lösung des elektrischen Feldes eines unendlich langen Drahtes aus der Grenzwertbildung.

Äquipotentialflächen

Wir wollen im Folgenden noch zeigen, dass die Äquipotentialflächen dieser Ladungsverteilung konfokale Rotationsellipsoide sind. Dafür müssen wir nur zeigen, Annahme eines konstanten Arguments von (4.5)

$$\frac{z-L + \overbrace{\sqrt{\rho^2+(z-L)^2}}^{r_-}}{z+L + \underbrace{\sqrt{\rho^2+(z+L)^2}}_{r_+}} = \text{const.}, \quad (4.10)$$



folgt, dass die Summe der Größen $r_+ + r_-$ eine Konstante ergibt. Dann ist nämlich die definierende Bedingung einer Ellipse⁴ erfüllt. Um das zu zeigen, müssen wir aus (4.10)

⁴Eine Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte, der Abstand zu zwei Fokuspunkten in Summe konstant ist.

noch die Abhängigkeit von z eliminieren. Dafür betrachten wir zunächst

$$r_+^2 - r_-^2 = (z + L)^2 - (z - L)^2 = 4zL \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{4L}(r_+^2 - r_-^2). \quad (4.11)$$

Wird diese Erkenntnis in (4.10) eingesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{4\mathcal{E}}(r_+^2 - r_-^2) - 4L^2 + 4Lr_-}{\frac{1}{4\mathcal{E}}(r_+^2 - r_-^2) + 4L^2 + 4Lr_+} &= \frac{r_+^2 - r_-^2 - (2L)^2 + 4r_-L}{r_+^2 - r_-^2 + (2L)^2 + 4r_+L} \\ &= \frac{r_+^2 - (r_- - 2L)^2}{(r_+ + 2L)^2 - r_-^2} \\ &= \frac{(r_+ + r_- - 2L)(r_+ + 2L - r_-)}{(r_+ + r_- + 2L)(r_+ + 2L - r_-)} \\ &= \frac{r_+ + r_- - 2L}{r_+ + r_- + 2L} = \text{const.} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Damit der Ausdruck für beliebige ρ, z konstant ist, muss $r_+ + r_-$ eine Konstante sein.

4.3 Randwertprobleme und Kondensatoren

Dieser Abschnitt dient als Fortsetzung von Kapitel 3.3. Wir fassen das Ergebnis aus Gleichung (3.9) und (3.11) nochmal zusammen:

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \Big|_{\text{Rand}} = 0 \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \Big|_{\text{Rand}} = \frac{q}{a\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (4.13)$$

Aus diesen Ergebnissen lassen sich direkt die Randbedingungen der Elektrostatik ableiten:

$$\Phi(\mathbf{r}) \Big|_{\text{R}} = \text{konst.} \quad \text{Dirichlet Randbedingung} \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\text{R}} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{Neumannsche Randbedingung} \quad (4.15)$$

Anmerkung: Es lässt sich zeigen, dass für gegebene Randbedingungen die Lösung $\Phi(\mathbf{r})$ (numerisch) existiert und zudem *eindeutig* ist.

Faraday-Käfig

Die Bedingung der Eindeutigkeit der Lösung lässt sich benutzen, um die Eigenschaften eines Faraday-Käfigs herzuleiten. Dafür betrachten wir ein Volumen V , was durch eine leitende Fläche vollständig umschlossen ist. Innerhalb von V sollen sich keine Ladungen befinden. Das Randwertproblem mit der Dirichlet-Randbedingung lautet nun:

$$\Delta \Phi(\mathbf{r}) = 0 \quad \Phi(\mathbf{r}) \Big|_{\text{R}} = \Phi_0. \quad (4.16)$$

Eine triviale Lösung der Laplace-Gleichung ist $\Phi(\mathbf{r}) = \text{konst.}$. Diese Lösung erfüllt ebenfalls die Randbedingung eines konstanten Potentials am Rand des Volumens. Da unsere Lösung eindeutig ist, haben wir somit direkt die allgemeine Lösung des Potentialproblems gefunden. Für ein konstantes Potential in V gilt nun

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{in } V. \quad (4.17)$$

In einem Faraday-Käfig verschwindet somit das elektrische Feld unabhängig von den Bedingungen außerhalb der Metallumhüllung.

Der Kondensator

Betrachten wir nun das Randwertproblem für N Metallkörpern mit den Rändern $R_i, i = 1, \dots, N$. Zudem sollen sich keine freien Ladungen im Raum aufhalten, diese dürfen nur auf den Metalloberflächen der Leiter sitzen. Wir erhalten folgendes Randwertproblem

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = 0 \quad \Phi(\mathbf{r}) \Big|_{R_i} = \Phi_i \quad \Phi(\mathbf{r} \rightarrow \infty) = 0. \quad (4.18)$$

Nehmen wir nun an eine Lösung $\Phi(\mathbf{r})$ des Randwertproblems zu kennen. Wir sehen, dass sie für eine Lösung $\Phi \rightarrow \alpha\Phi$ mit $\alpha = \text{konst.}$ folgendes neues Randwertproblem ergibt:

$$\Phi \rightarrow \alpha\Phi \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} \sim Q_i \rightarrow \alpha \frac{\partial\Phi}{\partial n} \sim \alpha Q_i. \quad (4.19)$$

Somit verändert sich die Ladung auf den Metallkörpern ebenfalls um den Faktor α . Dies führt auf einen *linearen* Zusammenhang zwischen Φ_i und Q_i , den wir folgendermaßen beschreiben

$$Q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} \Phi_j. \quad (4.20)$$

Die Koeffizienten C_{ij} sind dabei nur von der vorliegenden Geometrie bestimmt.

Wir spezifizieren uns nun auf den Spezialfall $N = 2$ und definieren den *Kondensator* als eine Anordnung zweier Metallkörper, die entgegengesetzt gleich große Ladungen tragen:

$$N = 2 \quad Q_1 = -Q_2. \quad (4.21)$$

Die Einschränkung $Q_1 = -Q_2$ stellt eine Zwangsbedingung an unser System dar. Somit ist die Lösung unseres Randwertproblems von nur einer einzigen Größe abhängig. Wir definieren dafür die *Spannung* mit $U = \Phi_1 - \Phi_2$ als die abhängige Größe. Da Q_i und Φ_i linear voneinander abhängen ergibt sich auch für die Spannung

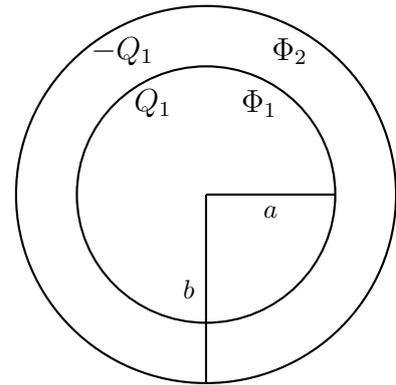
$$Q = C \cdot U \quad \Rightarrow \quad C = \frac{Q}{U}, \quad (4.22)$$

wobei wir die Proportionalitätskonstante C als *Kapazität* bezeichnen.

Kapazität konzentrischer Kugelschalen

Wir wollen nun die Kapazität einer Kondensatoranordnung bestehend aus zwei konzentrischen Kugelschalen berechnen. Um das Potential zwischen den Kugelschalen zu bestimmen berechnen wir das elektrische Feld mithilfe des Gaußgesetzes

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{Q}{r^2} & a \leq r \leq b \\ 0 & r > b \end{cases} \quad (4.23)$$



Wir sehen, dass hier auf der inneren Kugelschale im Punkt $r = a$ die NEUMANNsche Randbedingung auftritt. Das Feld berechnet sich durch die negative Ableitung des Potentials in radialer Richtung und hat im Punkt a den Betrag

$$\mathbf{E}(r = a) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{4\pi a^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (4.24)$$

was genau der NEUMANNschen Randbedingung entspricht.

Unter der zusätzlichen Forderung, dass im Unendlichen das Potential verschwindet $\Phi(r \rightarrow \infty) = 0$ lässt sich unter Annahme der Stetigkeit des Potentials im Abstand a und b das Potential allgemein bestimmen

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{Q}{a} - \frac{Q}{b} & r < a \\ \frac{Q}{r} - \frac{Q}{b} & a \leq r \leq b \\ 0 & r > b \end{cases} \quad (4.25)$$

Wir können nun die Kapazität mithilfe von (4.22) berechnen als

$$C = \frac{Q}{\Phi(a) - \Phi(b)} = 4\pi\epsilon_0 \frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b - a}. \quad (4.26)$$

Wir sehen hier ein interessantes Ergebnis. In Gaußeinheiten wird der Vorfaktor $4\pi\epsilon_0$ gleich eins gesetzt. Damit ergibt sich die Einheit der Kapazität zu $[C] = \text{cm}$, was die Tatsache widerspiegelt, dass die Kapazität eines Kondensators nur von der Geometrie der Metallflächen abhängig ist. Es lässt sich mit der Einheit der Kapazität ebenfalls ein Ausdruck für die Einheit der Dielektrizitätskonstante ϵ_0 des Vakuums finden

$$[C] = \frac{\text{C}}{\frac{\text{Nm}}{\text{C}}} = \frac{\text{A}^2 \text{s}^4}{\text{kg m}^2} \Rightarrow [\epsilon_0] = \frac{[C]}{[L]} = \frac{\text{A}^2 \text{s}^4}{\text{kg m}^3}. \quad (4.27)$$

5 Tutorium

5.1 Herleitung der Multipolentwicklung

Für beliebig komplizierte Ladungsverteilung ist die exakte Berechnung des elektrostatischen Potentials oftmals nur mithilfe numerischer Verfahren möglich. Will man jedoch das Potential nur für große Abstände zur Ladungsverteilung betrachten, ist eine Taylorentwicklung des elektrostatischen Potentials oftmals ausreichend.

Die Multipolentwicklung wollen wir nun im Folgenden für das kartesische Koordinatensystem explizit herleiten. Dafür nehmen wir an, dass die Ladungsverteilung $\varrho(\mathbf{r})$ räumlich lokalisiert ist. Wir können also eine Länge R_0 finden, für die gilt:

$$\varrho(\mathbf{r}) = \begin{cases} \text{beliebig} & r \leq R_0 \\ 0 & r > R_0 \end{cases}, \quad (5.1)$$

das heißt, die Ladungsverteilung verschwindet völlig für $r > R_0$. Für genügend große Abstände $r \gg R_0$ können wir das Potential in Potenzen von r' um den Wert $\mathbf{r}' = 0$ entwickeln. Die mehrdimensionale Taylorentwicklung lautet dabei im Allgemeinen

$$f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}_0) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{r})(x_i - x_i^0) \Big|_{\mathbf{r}_0} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(\mathbf{r})(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) \Big|_{\mathbf{r}_0} + \dots \quad (5.2)$$

Für können nun den im Potential auftretenden Integrationsterm $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ in eine mehrdimensionale Taylorreihe entwickeln. Dabei ergibt sich ($|\mathbf{r}| \equiv r$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} &\stackrel{r'=0}{=} \frac{1}{r} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x'_i} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \Big|_{\mathbf{r}'=0} x'_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x'_i} \frac{\partial}{\partial x'_j} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \Big|_{\mathbf{r}'=0} x'_i x'_j + \dots \\ &= - \frac{\frac{\partial}{\partial x_i} 1}{\partial x_i |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \Big|_{\mathbf{r}'=0} = - \frac{\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} 1}{\partial x_i \partial x_j |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \Big|_{\mathbf{r}'=0} x'_i x'_j + \dots \end{aligned}$$

Hierbei wurde die Ableitung nach den *gestrichenen* Koordinaten x'_i durch die Ableitung nach x_i ersetzt. Das hat den Vorteil, dass der Wert $\mathbf{r}' = 0$ direkt eingesetzt werden kann.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{r} - \sum_{i=1}^3 x'_i \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r}}_{\frac{x_i}{r^3}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(x'_i x'_j - r'^2 \frac{\delta_{ij}}{3} \right) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r}}_{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_j}{r^3} \right) = 3 \frac{x_i x_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3}} \\ \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} &= \frac{1}{r} + \sum_i x'_i \frac{x_i}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(x'_i x'_j - r'^2 \frac{\delta_{ij}}{3} \right) \frac{3x_i x_j}{r^5}. \quad (5.3) \end{aligned}$$

Wir bedienen uns hier eines hilfreichen Rechenricks. Da wir uns außerhalb des Koordinatenursprungs befinden $r \gg R_0$ können wir (noch bevor wir die Ableitungen nach den gestrichenen Koordinaten ersetzen) einen beliebigen Term $\Delta \frac{1}{r} = 0$ hinzufügen. Dies hat den

Vorteil, dass der in der Klammer stehende Term bei der Summation über $i = j$ wegfällt⁵. Damit können wir den Term $\frac{\delta_{ij}}{r^3}$, welcher der Ableitung von $\frac{1}{r}$ auftaucht, wegstreichen. Wir erhalten damit das Ergebnis (5.3).

Nun müssen wir das Ergebnis nur noch mit $\varrho(\mathbf{r}')$ multiplizieren und über \mathbb{R}^3 integrieren:

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\varrho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\underbrace{\int \varrho(\mathbf{r}') d^3r'}_{=: q \text{ Ladung}} \frac{1}{r} + \sum_{i=1}^3 \underbrace{\int x'_i \varrho(\mathbf{r}') d^3r'}_{=: p_i \text{ Dipolmoment}} \frac{x_i}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \underbrace{\int (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \varrho(\mathbf{r}') d^3r'}_{=: Q_{ij} \text{ Quadrupolmoment}} \frac{x_i x_j}{r^5} \right) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} + \sum_i \frac{p_i x_i}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} \right) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\mathbf{r}^\top \hat{Q} \mathbf{r}}{r^5} \right). \tag{5.4}
\end{aligned}$$

Die dabei eingeführte Ladung q entspricht hierbei der Gesamtladung unserer Ladungsverteilung. In erster Näherung betrachten wir die Ladungsverteilung als eine Punktladung im Ursprung. Die nächsthöhere Ordnung der Taylorentwicklung beschreibt ein mögliches Dipolverhalten der Ladungsverteilung und die zweite Ordnung ein Quadrupolverhalten.

Das Quadrupolmoment wird definiert als ein Tensor Q_{ij} zweiter Stufe mit besonderen Eigenschaften. Wir erkennen leicht an der Konstruktion, dass er symmetrisch gegenüber Vertauschung zweier Indices $i \leftrightarrow j$ ist. Ebenfalls lässt sich leicht verifizieren

$$\sum_{i=1}^3 Q_{ii} = 0 \quad \text{Spurfreiheit.} \tag{5.5}$$

Somit enthält das Quadrupolmoment nur fünf voneinander unabhängige Einträge statt neun.

Wir wollen noch auf eine weitere wichtige Sache aufmerksam machen. Es lässt sich zeigen, dass das niedrigste nicht-verschwindende Multipolmoment stets *koordinatenunabhängig* ist. Speziell für die Nullte Ordnung bedeutet dies (nicht überraschenderweise) Ladungserhaltung in allen Koordinatensystemen. Betrachten wir aber einen reinen Dipol mit $q = 0$ mit zwei Ladungen $+q$ bei \mathbf{r}_1 und $-q$ bei \mathbf{r}_2 . Dann ergibt sich das Dipolmoment zu

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r} \left(q \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) + (-q) \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \right) d^3r = q(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \tag{5.6}$$

Wir sehen, dass \mathbf{p} , nur vom Abstand beider Ladungen abhängt, welcher wiederum eine koordinatenunabhängige Größe ist. Allerdings ist für eine Punktladung das Dipolmoment sehr wohl vom gewählten Koordinatenursprung abhängig.

⁵Das ist die Eigenschaft der Spurfreiheit des noch zu definierenden Quadrupoltensors

5.2 Quadrupolmoment symmetrischer Ladungsverteilungen

Zeige, dass das Quadrupolmoment einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung null ist.

Lösung: Für eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung gilt immer $\varrho(\mathbf{r}) = \varrho(r)$. Damit ist die Ladungsdichte eine gerade Funktion mit $\varrho(-\mathbf{r}) = \varrho(\mathbf{r})$. Das Quadrupolmoment ergibt sich dann für kugelsymmetrische Verteilungen zu

$$Q_{ij} = \iiint_{\mathbb{R}^3} \varrho(r)(3x_i x_j - \delta_{ij} r^2) d^3r. \quad (5.7)$$

Für alle Elemente außerhalb der Diagonalen ($i \neq j$) vereinfacht sich die Gleichung zu

$$Q_{ij} = \iiint_{\mathbb{R}^3} 3\varrho(r)x_i x_j d^3r. \quad (5.8)$$

Die Funktionen x_i und x_j sind jeweils ungerade Funktionen der jeweiligen Koordinate und das symmetrische Integral muss Null ergeben. Somit verschwinden alle Elemente außerhalb der Diagonalen. Für die Diagonalelemente gilt dann

$$Q_{ij} = \iiint_{\mathbb{R}^3} \varrho(r)(3x_i^2 - r^2) d^3r. \quad (5.9)$$

Für die Komponente $i = j = x$ ergibt sich das Integral in Kugelkoordinaten mit $x = r \sin \vartheta \cos \varphi$ zu

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= \iiint_{\mathbb{R}^3} \varrho(r)(3 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi - 1)r^4 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi \\ &= \int_0^\infty \int_{\vartheta=0}^\pi \varrho(r) \sin \vartheta (3\pi \sin^2 \vartheta - 2\pi)r^4 dr d\vartheta \\ &= \int_0^\infty \varrho(r)(4\pi - 4\pi)r^4 dr = 0, \end{aligned} \quad (5.10)$$

wobei folgende Hilfsintegrale verwendet wurden:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi &= \left[\frac{\varphi}{2} (1 - \sin \varphi \cos \varphi) \right]_0^{2\pi} = \pi \\ \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta &= \int_0^\pi \sin \vartheta - \sin \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta = - \left[\cos \vartheta - \frac{1}{3} \cos^3 \vartheta \right]_0^\pi = \frac{4}{3}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Wird die Integration über ϑ ausgeführt, verschwindet das Integral. Da die Verteilung kugelsymmetrisch ist, sind alle drei Raumrichtungen äquivalent und die Integrale Q_{yy} und Q_{zz} verschwinden ebenfalls.

Wir erhalten das Ergebnis noch schneller, wenn wir die Tatsache benutzen, dass der Quadrupoltensor spurfrei ist. Aufgrund der Symmetrie muss $Q_{xx} = Q_{yy} = Q_{zz}$ gelten, womit direkt $Q_{xx} = 0$ folgt.

5.3 Multipolentwicklung des geladenen Drahts endlicher Länge

Wir betrachten analog zu 4.2 abermals einen homogen geladenen Draht der Länge $2L$ und Linienladungsdichte λ und wollen das Potential mithilfe der Multipolentwicklung approximieren. Analog zu (4.2) lässt sich die Ladungsdichte angeben als

$$\varrho(\mathbf{r}) = \lambda \Theta(L - z) \cdot \Theta(L + z) \cdot \delta(x) \delta(y). \quad (5.12)$$

Wir bestimmen nun im Folgenden die einzelnen Ordnungen der Multipolentwicklung und beginnen mit der Ladung q



$$\begin{aligned} q &= \iiint_{\mathbb{R}^3} \varrho(\mathbf{r}) \, d^3r = \iiint_{\mathbb{R}^3} \lambda \Theta(L - z) \cdot \Theta(L + z) \cdot \delta(x) \delta(y) \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_{-L}^L \lambda \, dz = 2L\lambda. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Nun betrachten wir komponentenweise das Dipolmoment p_i und beginnen mit

$$p_x = \iiint_{\mathbb{R}^3} x \varrho(\mathbf{r}) \, d^3r = \iiint_{\mathbb{R}^3} x \lambda \Theta(L - z) \cdot \Theta(L + z) \cdot \delta(x) \delta(y) \, dx \, dy \, dz = 0. \quad (5.14)$$

Die Delta-Distribution liefert uns sofort den Integralwert Null. Das gleiche Ergebnis erhält man für $p_y = 0$.

Für die z -Komponente ergibt sich

$$p_z = \iiint_{\mathbb{R}^3} z \varrho(\mathbf{r}) \, d^3r = \int_{-L}^L z \lambda \, dz = \frac{\lambda}{2} z^2 \Big|_{-L}^L = 0. \quad (5.15)$$

Damit verschwindet das gesamte Dipolmoment $\mathbf{p} = 0$.

Betrachten wir nun das Quadrupolmoment dieser Ladungsverteilung zunächst für den Fall $i \neq j$:

$$Q_{ij} = \iiint_{\mathbb{R}^3} 3x_i x_j \varrho \, d^3r. \quad (5.16)$$

Egal für welche Kombinationen das Integral berechnet wird, eine der zwei Komponenten xy, xz, yz enthält entweder x oder y , wodurch die im Integral auftretende Delta-Distribution sofort den Wert Null liefert. Es gilt also

$$Q_{ij} = 0, \quad \forall i \neq j. \quad (5.17)$$

Für den Fall $i = j$ betrachten wir exemplarisch Q_{zz}

$$\begin{aligned}
 Q_{zz} &= \iiint_{\mathbb{R}^3} (3z^2 - r^2) \lambda \delta(x) \delta(y) \, dx \, dy \, dz \\
 &= \iiint_{\mathbb{R}^3} (2z^2 - x^2 - y^2) \lambda \delta(x) \delta(y) \, dx \, dy \, dz \\
 &= \int_{-L}^L 2z^2 \lambda \, dz = \lambda \left[\frac{2}{3} z^3 \right]_{-L}^L = \lambda \frac{4}{3} L^3.
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Die anderen beiden Komponenten Q_{xx} und Q_{yy} lassen sich nun mithilfe der Spurfreiheit des Quadrupoltensors bestimmen. Aus Symmetriegründen müssen beide Komponenten gleich sein $Q_{xx} = Q_{yy}$ womit dann folgt

$$2Q_{xx} + Q_{zz} = 0, \quad \Rightarrow \quad Q_{xx} = -\lambda \frac{2}{3} L^3. \tag{5.19}$$

Damit können wir die kartesische Darstellung des Quadrupoltensors in Matrixschreibweise angeben

$$\hat{Q} = \lambda \frac{4}{3} L^3 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.20}$$

Wir können nun das Potential mithilfe von Gleichung (5.4) in Multipolentwicklung angeben

$$\begin{aligned}
 \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\underbrace{\frac{q}{r}}_{\frac{2\lambda L}{r}} + \underbrace{\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}}_{=0} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{\mathbf{r}^\top \hat{Q} \mathbf{r}}{r^5} \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2\lambda L}{r} + \frac{\lambda}{3} L^3 \frac{-x^2 - y^2 + 2z^2}{r^5} \right).
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

6 Tutorium

6.1 Kugelsymmetrische Lösung der Laplace-Gleichung

Der Laplace Operator taucht in vielen Gleichungen in der Physik vor. Wir haben ihn bereits bei der Poisson-Gleichung kennengelernt, aber auch außerhalb der Elektrodynamik spielt er eine große Rolle beispielsweise in der Schrödinger-Gleichung, der klassischen Wellengleichung oder der Wärmeleitungsgleichung.

Wir suchen daher nach einer allgemeinen Lösung von

$$\Delta\Psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (6.1)$$

in Kugelkoordinaten. Dafür stellen wir zunächst den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten auf. Es ergibt sich hierbei

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (6.2)$$

Wir nehmen nun an, dass sich die Lösung der Differentialgleichung (6.1) schreiben lässt als ein Produkt von drei Funktionen:

$$\Psi(r, \vartheta, \varphi) = R(r)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi). \quad (6.3)$$

Dieser Ansatz schränkt zunächst die Form der Lösung ein. Die allgemeine Lösung kann jedoch aus einer Linearkombination aller Lösungen aufgebaut werden, die wir mit dem Ansatz (6.3) erhalten. Die Laplace-Gleichung lässt sich ausdrücken als

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \Psi &= 0 \\ \frac{\Theta\Phi}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R\Phi}{r^2 \sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) + \frac{R\Theta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} &= 0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Beide Seiten können mit $r^2 \sin^2 \vartheta / \Psi(r, \vartheta, \varphi)$ multipliziert und durch $R(r)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi)$ dividiert werden:

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 \vartheta}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin \vartheta}{\Theta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} &= 0 \\ \underbrace{\frac{\sin^2 \vartheta}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin \vartheta}{\Theta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right)}_{\text{Funktion von } r, \vartheta} &= \underbrace{-\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}}_{\text{Funktion von } \varphi}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Da die linke Seite der Gleichung nur von r, ϑ abhängt und die rechte Seite nur von φ , müssen beide Seiten (da die Gleichheit für alle beliebigen Werte r, ϑ, φ gültig sein muss) gleich einer Separationskonstanten sein, die wir mit m^2 bezeichnen wollen. Dies führt auf

$$-m^2 = \frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} \quad \Rightarrow \quad \Phi(\varphi) = A \cdot \exp(im\varphi). \quad (6.6)$$

Weil $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$ periodisch ist, folgt

$$\exp(im\varphi) = \exp(im(\varphi + 2\pi)) = \exp(im\varphi) \underbrace{\exp(im2\pi)}_{=1} \Rightarrow m \in \mathbb{Z}. \quad (6.7)$$

Die Funktion $\Phi(\varphi)$ lässt sich auf folgende Weise normalisieren:

$$\int_0^{2\pi} \Phi(\varphi) \Phi^*(\varphi) d\varphi = A^2 \cdot 2\pi \stackrel{!}{=} 1, \quad (6.8)$$

was auf folgende Lösung führt.

$$\boxed{\Phi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(im\varphi)}. \quad (6.9)$$

Die linke Seite von (6.5) lässt sich wieder in zwei unabhängige Teile separieren, die nur von r oder ϑ abhängen, in wir durch $\sin^2 \vartheta$ dividieren

$$\underbrace{\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right)}_{\text{Funktion von } r} = - \underbrace{\frac{1}{\Theta \sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right)}_{\text{Funktion von } \vartheta} + \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta}. \quad (6.10)$$

Beide Seiten der Gleichung werden wieder einer Separationskonstanten gesetzt, die wir durch folgenden Ausdruck definieren: $\lambda = l(l+1)$.

Betrachten wir zunächst die lineare Differentialgleichung für $R(r)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) &= l(l+1) \\ 2r \frac{dR}{dr} + r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} &= l(l+1)R. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lässt sich mithilfe eine Potenzreihenansatzes finden. Wir nehmen dabei an, dass sich die Lösung auf folgende Weise darstellen lässt (FROBENIUS Methode)

$$R(r) = \sum_n a_n r^n. \quad (6.12)$$

Wir erhalten damit die allgemeine Lösung für den Radialteil der Laplace-Gleichung zu

$$\boxed{R(r) = A \cdot r^l + \frac{B}{r^{l+1}}} \quad (6.13)$$

welche durch einsetzen in (6.11) leicht verifiziert werden kann.

Für die Lösung der Polargleichung $\Theta(\vartheta)$ schreiben wir (6.10) um, indem wir mit Θ multiplizieren und alle Terme auf die linke Seite bringen.

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right) \Theta = 0. \quad (6.14)$$

Eine einfache Variablensubstitution mit $x = \cos \vartheta$ und folglich

$$\sin^2 \vartheta = 1 - \cos^2 \vartheta, \quad \frac{d}{dx} = -\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \quad (6.15)$$

führt auf die Form $(1 - x^2 = \sin^2 \vartheta)$

$$\frac{d}{dx} \left((1 - x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) \Theta(x) = 0. \quad (6.16)$$

Diese Differentialgleichung entspricht exakt der LEGENDRE-Gleichung⁶. Hier wird auch klar, warum die Wahl der Separationskonstanten $\lambda = l(l+1)$ sinnvoll ist. Die Lösung dieser Differentialgleichung sind die *zugeordneten Legendrepolynome*

$$\begin{aligned} P_l^{(m)}(x) &= (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x), & P_l(x) &= \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l \\ &= \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{m+l}}{dx^{m+l}} (x^2-1)^l, \end{aligned} \quad (6.17)$$

wobei $P_l(x)$ die *Legendrepolynome* bezeichnet. Die Lösungen sind nur dann nicht singulär, wenn für die Separationskonstanten l, m die Bedingung $0 \leq m \leq l$ mit $l \in \mathbb{Z}$ gilt. Die Normierungskonstante der Lösung ergibt sich durch die Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-1}^1 P_l^{(m)}(x) P_k^{(m)}(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{lk}. \quad (6.18)$$

Somit ergibt sich die Lösung der Polargleichung zu

$$\Theta_l^{(m)}(\vartheta) = \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \vartheta). \quad (6.19)$$

Die Gesamtlösung der Laplace-Gleichung lässt sich nun folglich durch Linearkombination aller Lösungen $R(r)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi)$ schreiben als

$$\Psi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(a_{lm} r^l + \frac{b_{lm}}{r^{l+1}} \right) P_{lm}(\cos(\vartheta)) e^{im\varphi}, \quad (6.20)$$

wobei die Normierungskonstanten von $\Phi(\varphi)$ und $\Theta(\vartheta)$ in die Konstanten a_{lm} und b_{lm} gewälzt wurden.

⁶https://de.wikipedia.org/wiki/Zugeordnete_Legendrepolynome

6.2 Die Kugelflächenfunktionen

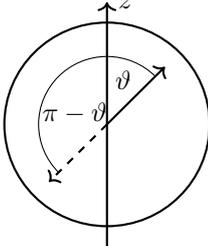
Interessieren wir uns nur für die Lösung der Winkelanteile der Laplace-Gleichung, dann erhalten wir durch Kombination von (6.19) und (6.9) direkt die Kugelflächenfunktionen:

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \vartheta) \exp(im\varphi). \quad (6.21)$$

Da die Kugelflächenfunktionen in der Physik sehr häufig auftreten (besonders in der Quantenmechanik), wollen wir im Folgenden ohne Beweis einige Eigenschaften diskutieren. Die Kugelflächenfunktionen sind nach Konstruktion normiert und stehen orthogonal aufeinander:

$$\int Y_{l' m'}^*(\vartheta, \varphi) Y_l^{(m)}(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \delta_{l'l} \delta_{m'm}. \quad (6.22)$$

Weiterhin gelten für die Kugelflächenfunktionen bestimmte Paritätsregeln $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$. Bei einer Punktspiegelung transformieren sich die Kugelkoordinaten folgendermaßen:

$$\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r} : \begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} r \\ \pi - \vartheta \\ \varphi + \pi \end{pmatrix} \quad (6.23)$$


Dann ergibt sich folgende Beziehung:

$$Y_l^{(m)}(\pi - \vartheta, \varphi + \pi) = (-1)^l Y_l^m(\vartheta, \varphi). \quad (6.24)$$

Für eine Transformation $m \rightarrow -m$ ergibt sich außerdem folgendes:

$$Y_l^{(-m)} = (-1)^m Y_l^{* (m)}. \quad (6.25)$$

Wir wollen im Folgenden noch eine die ersten Kugelflächenfunktionen auflisten:

Tabelle 6.1: Liste der ersten Kugelflächenfunktionen für $l = 0, 1, 2$.

	$l = 0$	$l = 1$	$l = 2$
$m = 1$		$-\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{+i\varphi}$	$-\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \vartheta \cos \vartheta e^{+i\varphi}$
$m = 0$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta$	$\sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \vartheta - 1)$
$m = -1$		$\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{-i\varphi}$	$\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \vartheta \cos \vartheta e^{-i\varphi}$

6.3 Sphärische Multipolmomente

Wir können die Kugelflächenfunktionen nutzen, um die Multipolentwicklung ebenfalls für Kugelkoordinaten zu berechnen. Dabei lautet die Taylor-Entwicklung des Potentials in Kugelkoordinaten folgendermaßen:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{Q_{lm}}{r^{l+1}} Y_l^{(m)}(\vartheta, \varphi), \quad (6.26)$$

wobei die sphärischen Multipolmomente gegeben sind als

$$Q_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int d^3r \varrho(r) r^l Y_l^{*(m)}(\vartheta, \varphi). \quad (6.27)$$

Mithilfe von Tabelle 6.1 können wir die sphärischen Multipolmomente ausrechnen. Beginnen wir mit Q_{00}

$$Q_{00} = \sqrt{4\pi} \int d^3r \varrho(r) \underbrace{Y_0^{*(0)}(\vartheta, \varphi)}_{\frac{1}{\sqrt{4\pi}}} = \int d^3r \varrho(r) = q. \quad (6.28)$$

Wir sehen, dass für die Nullte Ordnung, kartesisches und sphärisches Multipolmoment übereinstimmen.

Berechnen wir nun die erste Ordnung, also $Q_{1,0}, Q_{1,\pm 1}$:

$$Q_{10} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \int d^3r \varrho(r) r \underbrace{Y_1^{*(0)}(\vartheta, \varphi)}_{\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta} = \int d^3r \varrho(r) \underbrace{r \cos \vartheta}_{=z} = p_z \quad (6.29)$$

$$\begin{aligned} Q_{1,\pm 1} &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \int d^3r \varrho(r) r \underbrace{Y_1^{*(\pm 1)}(\vartheta, \varphi)}_{\mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{\mp i\varphi}} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \int d^3r \varrho(r) r \sin \vartheta e^{\mp i\varphi} \\ &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \int d^3r \varrho(r) r \sin \vartheta (\cos \varphi \mp i \sin \varphi) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \int d^3r \varrho(r) (x \mp iy) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (ip_y \mp p_x). \end{aligned} \quad (6.30)$$

Wir sehen also, dass die Multipolmomente nicht mehr gleich sind, sondern sich die sphärischen Multipolmomente als Linearkombination der kartesischen Multipolmomente ergeben.

Berechnen wir zum Schluss noch Q_{20}

$$\begin{aligned}
 Q_{20} &= \sqrt{\frac{4\pi}{5}} \int d^3r \varrho(r) r^2 \underbrace{Y_2^{*(0)}(\vartheta, \varphi)}_{\sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\vartheta - 1)} \\
 &= \frac{1}{2} \int d^3r \varrho(r) (3 \underbrace{r^2 \cos^2\vartheta}_{=z^2} - r^2) = \frac{1}{2} Q_{zz}.
 \end{aligned} \tag{6.31}$$

Wir können uns die Frage stellen, warum wir überhaupt sphärische Multipolmomente ausrechnen wollen?

Es zeigt sich, dass sphärische Multipolmomente besonders für höhere Multipolordnungen einfacher zu berechnen sind, als kartesische Multipolmomente. Außerdem liefert die Darstellung in Kugelkoordinaten eine minimale Anzahl an Komponenten für die jeweilige Multipolordnung. Für eine Multipolordnung l gibt es in Kugelkoordinaten

$$-l \leq m \leq l \quad \rightarrow \quad 2l + 1 \text{ Komponenten.} \tag{6.32}$$

Es ergeben sich damit für die zweite Multipolordnung fünf unabhängige sphärische Komponenten, während das kartesische Quadrupolmoment neun Komponenten enthält. Aufgrund der Symmetrie und Spurfreiheit des Quadrupoltensors reduziert sich dies auf 5 unabhängige Komponenten.

Für einen Oktupol besitzt der kartesische Tensor bereits $3^3 = 27$ Komponenten, wobei davon nur $2 \cdot 3 + 1 = 7$ Komponenten unabhängig sind. Die sphärische Darstellung liefert direkt unabhängige Multipolkomponenten.

7 Tutorium

7.1 Magnetostatik - Einführung

Wir gehen nun über von dem Modell der Elektrostatik, welche Systeme stationärer Ladungsverteilungen beschreibt, zur einem Modell von stationären Strömen. Dafür definieren wir zunächst erstmal den Begriff des Stroms I als die zeitliche Änderung der Ladung und die zugehörige Stromdichte \mathbf{j}

$$I = \frac{dQ}{dt}, \quad \mathbf{j} = \frac{\text{Strom}}{\text{Fläche}} = \frac{\Delta I}{\Delta A}. \quad (7.1)$$

In der Magnetostatik gehen wir nun davon aus, dass sich die Ladungen mit einer zeitlich (nicht räumlich) konstanten Geschwindigkeit v bewegen. Damit legen die Ladungen in der Zeit Δt eine Strecke $\Delta l = v\Delta t$ zurück. Nutzen wir noch $\Delta Q = \rho\Delta V = \rho\Delta A \cdot \Delta l$, dann ergibt sich für die Stromdichte

$$\mathbf{j} = \frac{\rho\Delta V}{\Delta A\Delta t} = \frac{\rho\Delta l}{\Delta t}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})\mathbf{v}(\mathbf{r}). \quad (7.2)$$

Wollen wir Ladungsdichten und Ströme auf mikroskopischer Ebene beschreiben, dann können wir dies auf folgende Weise tun:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{mik}} &= \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \\ \mathbf{j}_{\text{mik}} &= \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \end{aligned} \quad (7.3)$$

Dabei setzt sich die Stromdichte als Summe des Produkts aller mikroskopischen Ladungen und ihrer Geschwindigkeiten zusammen⁷.

Kraftgesetz Analog zur Elektrostatik können wir den die Kraft auf einen Strom mithilfe eines Vektorfeldes definieren. Dieses Feld nennen wir das \mathbf{B} -Feld. Führen wir nun ein Experiment durch und messen, wie sich diese Kraft auf einen Leiter mit Stromdichte $\mathbf{j} \sim d\mathbf{l}$ auswirkt stellen wir fest, dass die Kraft senkrecht zu $d\mathbf{l}$ gerichtet ist und proportional zum angelegten Strom I wächst. Wir können diese beiden Fakten direkt in die Definition der Kraft einbauen:

$$d\mathbf{F}(\mathbf{r}) = I \cdot d\mathbf{l} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}). \quad (7.4)$$

Das ist das allgemeine Kraftgesetz der Magnetostatik. Für eine Punktladung ergibt sich dann $I d\mathbf{l} = q \frac{d\mathbf{l}}{dt} = q \cdot \mathbf{v}$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}), \quad \text{LORENTZkraft.} \quad (7.5)$$

⁷Beachte hier wieder, dass die Delta-Distributionen selbst noch inverse Volumeneinheit besitzen, wodurch diese Formulierung gerechtfertigt wird.

In einem weiteren Experiment lässt sich untersuchen (Ørsted-Versuch), dass ein stromdurchflossener Leiter seinerseits ebenfalls ein Magnetfeld erzeugt. Wir sehen im Experiment folgende Zusammenhänge zwischen \mathbf{B} -Feld und den anderen Größen des Versuchsaufbaus:

$$\begin{aligned} dB &\propto I dl, & d\mathbf{B} &\perp (\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ dB &\propto \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} & d\mathbf{B} &\perp d\mathbf{l}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Wir können aus den experimentellen Erkenntnissen direkt eine Gleichung für das Differential $d\mathbf{B}$ aufstellen:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\mathbf{l} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (7.7)$$

Dabei taucht noch eine Konstante $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$ auf. Integrieren wir nun über den gesamten Raum, erhalten wir mit $I d\mathbf{l} = \mathbf{j} dA dl$

$$\boxed{\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}} \quad \text{Gesetz von Biot-Savart.} \quad (7.8)$$

Wir weisen an dieser Stelle darauf hin, dass (7.8) eine große Ähnlichkeit zur Definition des elektrischen Feldes in der Elektrostatik aufweist:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \varrho(\mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (7.9)$$

wobei das Kreuzprodukt durch ein Skalarprodukt ersetzt, die Konstante getauscht und an die Stelle des Stroms die stationäre Ladungsverteilung tritt.

7.2 Die Feldgleichungen der Magnetostatik

Ausgehend von dem Gesetz von BIOT-SAVART möchten wir nun die Quellen und Wirbel des \mathbf{B} -Feldes beschreiben. Dafür formen wir (7.8) auf geeignete Weise um:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \underbrace{\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}}_{-\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}$$

Wir wollen nun den Gradienten (der nur auf die Koordinate \mathbf{r} wirkt) aus dem Integral herausziehen. Wir begründen diesen Schritt durch folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= \varepsilon_{ikl} j_k(\mathbf{r}') \partial_{x_l} f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\mathbf{e}}_i \\ &= \varepsilon_{ikl} \partial_{x_l} (j_k(\mathbf{r}') f(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) \hat{\mathbf{e}}_i \\ &= -\varepsilon_{ilk} \partial_{x_l} (j_k(\mathbf{r}') f(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) \hat{\mathbf{e}}_i \\ &= -\nabla \times (\mathbf{j} f(\mathbf{r} - \mathbf{r}'))\end{aligned}\quad (7.10)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \nabla \times \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}_{\mathbf{A}(\mathbf{r})} \\ &=: \mathbf{A}(\mathbf{r}) \text{ Vektorpotential}\end{aligned}\quad (7.11)$$

Wir nennen das Vektorfeld, auf das die Rotation wirkt das *Vektorpotential*. Auffällig ist hier wieder die Ähnlichkeit zum elektrostatischen Potential. Es lässt sich für das Vektorpotential direkt folgender Zusammenhang ablesen:

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r})}.\quad (7.12)$$

Wie beim elektrostatischen Potential ist die Wahl von $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ bei vorgegebenen \mathbf{B} -Feld nicht eindeutig. Allerdings lassen hier nicht nur additive Konstanten das Feld unverändert. Betrachten wir die Transformation

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda(\mathbf{r}),\quad (7.13)$$

wobei $\Lambda(\mathbf{r})$ eine beliebige skalare Funktion ist, dann ergibt sich aufgrund der Vektoridentität $\nabla \times \nabla \Lambda = 0$

$$\nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla \Lambda(\mathbf{r})) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla \Lambda(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r})\quad (7.14)$$

das gleiche \mathbf{B} -Feld. Eine solche Transformation wird als *Eichtransformation* bezeichnet. Die Invarianz der Potentiale \mathbf{A}, Φ unter Eichtransformationen ist eine fundamentale Eigenschaft der Elektrodynamik.

Wir können uns diese *Eichfreiheit* zu Nutze machen, um das Vektorpotential bestimmte Eigenschaften erfüllen zu lassen. Ein Beispiel dafür ist die COULOMB-Eichung. Hierbei wählen wir $\Lambda(\mathbf{r})$ so, dass $\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0$:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot (\nabla \Lambda) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \Delta \Lambda = -\nabla \cdot \mathbf{A}.\quad (7.15)$$

Es lässt sich zeigen, dass wir immer ein $\Lambda(\mathbf{r})$ finden können, das diese Bedingung erfüllt.

Mithilfe des Vektorpotentials können wir nun ganz leicht die Quellen und Wirbel des \mathbf{B} -Feldes bestimmen:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \underbrace{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})}_{=0} - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{A} = -\Delta \mathbf{A} \\ &= -\Delta \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \underbrace{\Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}_{-4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \\ &= \mu_0 \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}).\end{aligned}\quad (7.16)$$

Damit ergeben sich die Feldgleichungen der Magnetostatik zu

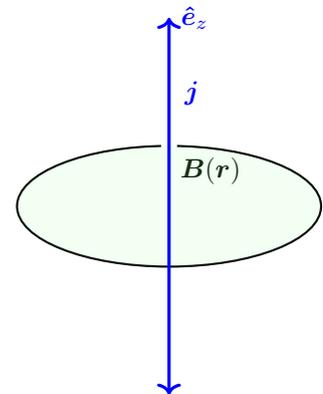
$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}}. \quad (7.17)$$

Wir können die Feldgleichungen nun nutzen, um auf einfache Art und Weise die Kontinuitätsgleichung herzuleiten. Dafür wenden wir die Divergenz auf das Wirbelfeld von \mathbf{B} an und erhalten

$$0 = \nabla \cdot (\operatorname{rot} \mathbf{B}) = \nabla \cdot (\mu_0 \mathbf{j}) \Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \mathbf{j} = 0}. \quad (7.18)$$

7.3 Magnetfeld eines geladenen Drahtes

Wir wollen nun das Magnetfeld berechnen, was durch einen unendlich langen und infinitesimalen Draht mit Stromdichte $\mathbf{j} = j \hat{e}_z$ erzeugt wird. Aufgrund der Zylindersymmetrie des Problems kann das Magnetfeld nur vom senkrechten Abstand zum Draht abhängen und nicht vom Polarwinkel φ oder z . Wir werden das Problem auf zwei verschiedene Art und Weisen lösen:



Feldgleichung: Die erste Möglichkeit ist die inhomogene Feldgleichung der Magnetostatik in integraler Schreibweise zu benutzen. Dafür wählen wir als Integrationsfläche einen konzentrischen Kreis um den Draht herum. Dann ergibt sich für den Flächenvektor $d\mathbf{A} \parallel \mathbf{j}$. Wir erhalten nun

$$\begin{aligned} \iint_A \operatorname{rot} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} &\stackrel{\text{Stokes}}{=} \oint_{\partial A} \mathbf{B} \cdot \underbrace{d\mathbf{s}}_{r d\varphi} = \underbrace{\int_0^{2\pi} B r d\varphi}_{2\pi B r} \\ \iint_A \mu_0 \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} &= 2\pi B r. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Das linke Integral ergibt den Gesamtstrom I multipliziert mit μ_0 . Somit folgt für das \mathbf{B} -Feld

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{e}_\varphi. \quad (7.20)$$

Die Richtung lässt sich dadurch begründen, dass $\mathbf{j} \propto \operatorname{rot} \mathbf{B} \perp B$, damit zeigt \mathbf{B} in \hat{e}_φ -Richtung. Das Vorzeichen lässt sich durch die rechte Hand-Regel bestimmen.

Vektorpotential: Wir können alternativ das \mathbf{B} -Feld auch mithilfe des Vektorpotentials bestimmen. Dafür benutzen wir $\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})$ und betrachten \mathbf{A} jeweils innerhalb und

außerhalb des Drahtes. Aufgrund selbiger Argumentation wie für $\mathbf{B}(r)$ ist das Vektorpotential nur von r abhängig. Wir verwenden zur Lösung den Radialteil des Laplace-Operators in Zylinderkoordinaten:

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \dots \quad (7.21)$$

Wir können nun die Differentialgleichung für das Vektorpotential innerhalb und außerhalb des Drahtes angeben

$$\Delta \mathbf{A}(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\mathbf{A}(r)}{dr} \right) = \begin{cases} -\mu_0 \mathbf{j}(r) & \text{innerhalb} \\ 0 & \text{außerhalb} \end{cases}. \quad (7.22)$$

Lösen wir zunächst den Teil außerhalb des Drahtes ergibt sich nach kurzer Rechnung:

$$\frac{dA}{dr} = \frac{C}{r} \quad \Rightarrow \quad A(r) = C \ln \left(\frac{r}{r_0} \right), \quad C, r_0 = \text{konst.} \quad (7.23)$$

Die Integrationskonstante C können wir nun durch Integration des Innenteils von (7.22) und Forderung von der Stetigkeit des Vektorpotentials am Übergang erhalten. Es ergibt sich zunächst

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dA}{dr} \right) = -\mu_0 j r. \quad (7.24)$$

Wir könnten nun einen Ausdruck für \mathbf{j} suchen. Analog zur Ladungsdichte einer Punktladung ergibt sich

$$j = \frac{I}{2\pi} \frac{\delta(r)}{r}, \quad (7.25)$$

jedoch kommen wir auch ohne diesen Zusammenhang aus, wenn wir für das Erste einen endlichen Radius R des Drahtes zulassen. Eine Integration von (7.24) über den gesamten Draht ergibt

$$r \frac{dA}{dr} \Big|_0^R = -\mu_0 j \frac{r^2}{2} \Big|_0^R \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{dr} \Big|_0^R = -\mu_0 j \frac{R}{2}. \quad (7.26)$$

Werten wir nun (7.23) ebenfalls am Punkt $r = R$ aus, dann können wir beide Ausdrücke gleichsetzen und wir erhalten

$$\frac{C}{R} = -\mu_0 j \frac{R}{2} \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}, \quad (7.27)$$

wobei wir für $I = \pi R^2 j$ eingesetzt haben. Damit erhalten wir für das Vektorpotential

$$\mathbf{A}(r) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \hat{\mathbf{e}}_z, \quad (7.28)$$

wobei sich die Richtung dadurch ergibt, dass \mathbf{A} parallel zu \mathbf{j} verläuft.

Wir erhalten das \mathbf{B} -Feld nun direkt, indem wir die Rotation auf $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ anwenden und beachten, dass für ein Feld, welches nur von r abhängt und in $\hat{\mathbf{e}}_z$ Richtung zeigt, von der Rotation nur folgender Ausdruck übrig bleibt

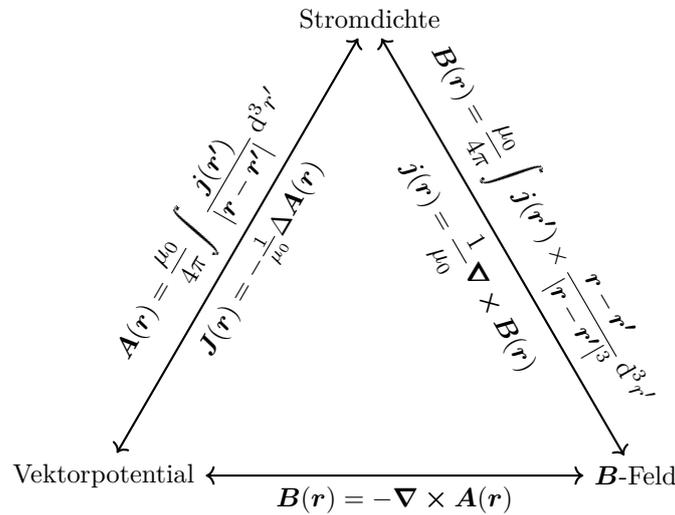
$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \dots + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] \hat{\mathbf{e}}_\varphi + \dots \quad (7.29)$$

Somit ergibt sich $\mathbf{B}(r)$ zu

$$\mathbf{B}(r) = \operatorname{rot} \mathbf{A}(r) = -\frac{dA_z}{dr} \hat{\mathbf{e}}_\varphi = +\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\mathbf{e}}_\varphi. \quad (7.30)$$

8 Tutorium

Zunächst wollen wir wieder analog zu Abschnitt 3 einen Überblick über die Magnetostatik geben und die Stromdichte, das \mathbf{B} -Feld und das Vektorpotential miteinander verknüpfen.



8.1 Magnetische Multipolentwicklung

Für beliebig komplizierte Ladungsverteilung ist die exakte Berechnung des elektrostatischen Potentials oftmals nur mithilfe numerischer Verfahren möglich. Will man jedoch das Potential nur für große Abstände zur Ladungsverteilung betrachten, ist eine Taylorentwicklung des elektrostatischen Potentials oftmals ausreichend.

Die Multipolentwicklung wollen wir nun im Folgenden für das kartesische Koordinatensystem explizit herleiten. Dafür nehmen wir an, dass die Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ räumlich lokalisiert ist. Wir können also eine Länge R_0 finden, für die gilt:

Für eine beliebige Stromverteilung können wir meist das Vektorpotential nicht analytisch lösen. Wir können allerdings, vollkommen analog zur Elektrischen Multipolentwicklung das Vektorpotential für große Abstände zur Stromverteilung betrachten. Wir leiten die Multipolentwicklung in kartesischen Koordinaten her unter der Annahme, dass die Stromverteilung $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ räumlich lokalisiert ist. Analog zu (5.1) gilt

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \text{beliebig} & r \leq R_0 \\ 0 & r > R_0 \end{cases} \quad (8.1)$$

Wir geben das Ergebnis (5.3) der mehrdimensionalen Taylorentwicklung für Terme bis zur ersten Ordnung nochmal explizit an:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \dots \quad (8.2)$$

Wir nutzen nun die Definition (7.11) des Vektorpotentials und setzen die Taylorentwicklung ein

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{1}{r} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') + \frac{1}{r^3} \int d^3r' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') + \dots \right). \quad (8.3)$$

Zunächst wollen wir uns um den ersten Summanden kümmern. Dafür benutzen wir folgende Vektoridentität, die uns noch häufiger nützlich sein wird:

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{v}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}(\varphi), \quad (8.4)$$

wobei φ und \mathbf{v} stetig differenzierbare Skalar-, bzw. Vektorfelder sind. Setzen wir für $\varphi = x_i$ eine beliebige Koordinate und $\mathbf{v} = \mathbf{j}$ die Stromdichte ein, ergibt sich

$$\operatorname{div}(x_i \mathbf{j}) = x_i \underbrace{\operatorname{div} \mathbf{v}}_{=0} + \mathbf{j} \cdot \underbrace{\operatorname{grad}(\varphi)}_{\hat{\mathbf{e}}_i} = j_i. \quad (8.5)$$

Betrachten wir den ersten Summanden von (8.3) komponentenweise, so ergibt sich

$$\int d^3r' j_i(\mathbf{r}') \stackrel{(8.5)}{=} \iiint_{\mathbb{R}^3} d^3r' \nabla \cdot (x_i \mathbf{j}) \stackrel{\text{Gauß}}{=} \oiint_{\partial \mathbb{R}^3} d^2r' x_i \mathbf{j} = 0. \quad (8.6)$$

Das Integral verschwindet, da \mathbf{j} nach Voraussetzung begrenzt ist. Damit folgt direkt

$$\int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0. \quad (8.7)$$

Um einen Ausdruck für den zweiten Term zu finden, zeigen wir zunächst erstmal folgende Identität:

$$\int d^3r' x'_k j_i(\mathbf{r}') = - \int d^3r' x'_i j_k(\mathbf{r}'). \quad (8.8)$$

Beweis. Wir nutzen wieder Gleichung (8.5) aus und schreiben:

$$\int d^3r' x'_k j_i(\mathbf{r}') = \int d^3r' x'_k \operatorname{div}(x'_i \mathbf{j}(\mathbf{r}')). \quad (8.9)$$

Den hinteren Teil können wir umformen, indem wir die Verallgemeinerung der partiellen Integration in mehreren Dimensionen benutzen:

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3r \varphi \operatorname{div} \mathbf{v} \stackrel{\text{Gauß}}{\stackrel{(8.4)}{=}} \int_{\partial \mathbb{R}^3} \varphi \mathbf{v} \cdot d^2\mathbf{r} - \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}(\varphi). \quad (8.10)$$

$$\Rightarrow \int d^3r' x'_k \operatorname{div}(x'_i \mathbf{j}(\mathbf{r}')) = \underbrace{\int_{\partial \mathbb{R}^3} x'_k x'_i \mathbf{j} \cdot d^2\mathbf{r}'}_{=0} - \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' x'_i \underbrace{\mathbf{j} \cdot \operatorname{grad}(x'_k)}_{=j_k(\mathbf{r}')}. \quad (8.11)$$

□

Wir überschieben (8.8) nun mit $\sum_k x_k \sum_i \hat{e}_i$ und erhalten:

$$\begin{aligned} \int d^3r' \sum_k x_k x'_k \sum_i \hat{e}_i j_i(\mathbf{r}') &= - \int d^3r' \sum_i \hat{e}_i x'_i \sum_k x_k j_k(\mathbf{r}') \\ \int d^3r' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') &= - \int d^3r' \mathbf{r}' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')). \end{aligned} \quad (8.12)$$

Wir können nun mit $a = -b \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}(a - b)$ die LHS von (8.12) umschreiben zu

$$\begin{aligned} \int d^3r' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') &= \frac{1}{2} \left[\int d^3r' \left(\underbrace{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') - \mathbf{r}' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}'))}_{=-\mathbf{r} \times (\mathbf{r}' \times \mathbf{j})} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \int d^3r' \mathbf{r} \times (\mathbf{r}' \times \mathbf{j}) = -\frac{\mathbf{r}}{2} \times \int d^3r' (\mathbf{r}' \times \mathbf{j}), \end{aligned} \quad (8.13)$$

wobei wir einmal $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ benutzt haben. Zudem können wir den Vektor \mathbf{r} und das Kreuzprodukt auch aus dem Integral ziehen, da dieses nicht auf \mathbf{r} wirkt.

Wir können nun mit (8.3) das Vektorpotential schreiben als

$$(\mathbf{A})(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{8\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \times \int d^3r' (\mathbf{r}' \times \mathbf{j}) + \dots, \quad (8.14)$$

wobei wir nun zur Vereinfachung das magnetische Dipolmoment⁸ $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r})$ definieren können:

$$\boxed{\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int d^3r' (\mathbf{r}' \times \mathbf{j})}. \quad (8.15)$$

Somit lässt sich das Vektorpotential schreiben als

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{8\pi} \frac{\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r}}{r^3} + \dots \quad (8.16)$$

Analog zum elektrischen Feld in Dipolnäherung ergibt sich das \mathbf{B} -Feld zu

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{3\mathbf{r}(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r}) - \boldsymbol{\mu}r^2}{r^5}. \quad (8.17)$$

⁸Mitunter wird der Faktor $\frac{\mu_0}{4\pi}$ in die Definition hineingezogen.

8.2 Rotierende Kugel homogener Ladungsverteilung

Wir wollen uns im Folgenden eine kugelförmige, homogene Ladungsverteilung ($\varrho(\mathbf{r}) = \varrho$) vorstellen. Damit können wir beispielsweise Protonen und Elektronen modellieren, aber dazu später mehr.

Wir nehmen nun an, dass die Kugel um die z -Achse starr rotiert, somit gilt $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{e}}_z$.

a.) Zunächst suchen wir nach einem Ausdruck für die Stromdichte. Es gilt $\mathbf{j} = \varrho \mathbf{v}$, wobei \mathbf{v} die Geschwindigkeit der Ladungsdichte ϱ am Ort \mathbf{r} beschreibt. Für ein rotierendes System lässt sich die Bahngeschwindigkeit des Punktes \mathbf{r} identifizieren als $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Damit gilt:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \varrho \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (8.18)$$

b.) Wir untersuchen nun die Divergenz der Stromdichte. Dafür nutzen wir die Vektoridentität

$$\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) - \mathbf{A}(\operatorname{rot} \mathbf{B}). \quad (8.19)$$

Damit ergibt sich für die Divergenz

$$\operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \varrho \operatorname{div}(\underbrace{\mathbf{r}}_{=r} (\operatorname{rot} \boldsymbol{\omega}) - \boldsymbol{\omega} (\operatorname{rot} \underbrace{\mathbf{r}}_{=r})) = 0. \quad (8.20)$$

c.) Wir wollen ebenfalls skizzieren, wie sich das Vektorpotential dieser Stromverteilung berechnen lässt. Dafür setzen wir wieder die Definition (7.11) an

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\varrho(r) \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta'}} r'^2 \sin \vartheta' dr' d\vartheta' d\varphi' \\ &= \dots = \frac{\mu_0}{3} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \left[\frac{1}{r^3} \int_0^r dr' r'^4 \varrho(r') + \int_r^\infty dr' r' \varrho(r') \right]. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Dieser Ausdruck gilt für auch für eine allgemeine, kugelsymmetrische Ladungsverteilung $\varrho(r)$. Lass uns nun explizit das Vektorpotential im Außenraum ($r > R$) berechnen. Die Ladungsdichte modellieren wir durch $\varrho(r) = \varrho \Theta(R - r)$. Damit ergibt sich unter Einführung der Gesamtladung Q der Kugel

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{3} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \varrho \left[\frac{1}{r^3} \int_0^r dr' r'^4 \Theta(R - r) + \underbrace{\int_r^\infty dr' r' \Theta(R - r)}_{=0} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{3} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \varrho \left[\frac{1}{r^3} \int_0^R dr' r'^4 \right] = \frac{\mu_0 Q R^2}{20\pi} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (8.22) \\ &= \frac{R^5}{5}, \quad \varrho = \frac{3Q}{4\pi R^3} \end{aligned}$$

d.) Wir wollen nun noch das magnetische Dipolmoment der Ladungsverteilung ausrechnen und nutzen dafür (8.15)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu} &= \frac{1}{2} \int d^3r' \mathbf{r}' \times (\varrho \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \\ &= \frac{\varrho}{2} \int d^3r' \Theta(R - r') \left(\underbrace{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}')}_{r'^2} - \underbrace{\mathbf{r}'(\mathbf{r}' \cdot \boldsymbol{\omega})}_{= r'_z \boldsymbol{\omega} = r' \cos \vartheta'} \right)\end{aligned}\quad (8.23)$$

wobei wir den Vektor \mathbf{r} in Kugelkoordinaten ausdrücken als

$$\mathbf{r} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad (8.24)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu} &= \frac{\varrho}{2} \int \Theta(R - r') (r'^2 \boldsymbol{\omega} \hat{\mathbf{e}}_z - r'^2 \cos \vartheta' \boldsymbol{\omega} \hat{\mathbf{e}}_r) r'^2 \sin \vartheta' dr' d\vartheta' d\varphi' \\ &= \frac{2\pi}{2} \varrho \boldsymbol{\omega} \int \Theta(R - r') (\hat{\mathbf{e}}_z - \cos \vartheta' \hat{\mathbf{e}}_r) r'^4 \sin \vartheta' dr' d\vartheta'\end{aligned}\quad (8.25)$$

Von der Integration über den Vektor $\hat{\mathbf{e}}_r$ bleibt nur die z -Komponente übrig, da bei der x und y -Komponente von $\hat{\mathbf{e}}_r$ ein Integral folgender Art auftritt:

$$\int \cos \vartheta \sin^2 \vartheta d\vartheta = \frac{1}{3} \sin^3 \vartheta \Big|_0^\pi = 0. \quad (8.26)$$

$$\boldsymbol{\mu} = \pi \varrho \boldsymbol{\omega} \underbrace{\int_0^\pi (1 - \cos^2 \vartheta') \sin \vartheta' d\vartheta'}_{(5.11) = 4/3} \underbrace{\int_0^R r'^4 dr'}_{= R^5/5} = \frac{3\pi Q}{4\pi R^2} \boldsymbol{\omega} \frac{4}{3} \frac{R^5}{5} = \frac{QR^2}{5} \boldsymbol{\omega}. \quad (8.27)$$

e.) Wir wollen nun unsere Kenntnis des magnetischen Dipolmoments nutzen, um das gyromagnetische Verhältnis γ der rotierenden Kugel zu berechnen. Dieses ist definiert über

$$\boxed{\boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{L}} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{|\boldsymbol{\mu}|}{|\mathbf{L}|}, \quad (8.28)$$

wobei $\mathbf{L} = \Theta \boldsymbol{\omega}$ den Drehimpuls der Kugel bezeichnet. Das Trägheitsmoment ist gegeben als

$$\Theta = \int d^3r r_\perp^2 \cdot \varrho_{\text{mass}} \stackrel{\text{Kugel}}{=} \frac{2}{5} m R^2. \quad (8.29)$$

Damit ergibt sich das gyromagnetische Verhältnis zu

$$\gamma = \frac{|\boldsymbol{\mu}|}{|\mathbf{L}|} = \frac{QR^2}{5} \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{5}{2mR^2 \boldsymbol{\omega}} = \frac{Q}{2m}. \quad (8.30)$$

Für $Q = e$ und $m = m_e$ erhalten wir nun genau das gyromagnetische Verhältnis des Elektrons für den klassischen Bahndrehimpuls.

9 Tutorium

9.1 Maxwellgleichungen in Materie

Im Folgenden wollen wir die makroskopischen MAXWELL-Gleichungen in Materie motivieren. Wir beginnen zunächst damit, die bisher bekannten MAXWELL-Gleichungen zusammenzufassen:

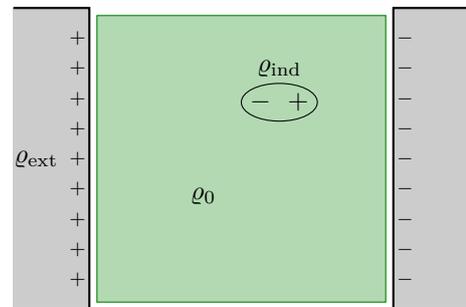
$$\operatorname{div} \mathbf{E}_{\text{tot}} = \frac{\rho_{\text{tot}}}{\epsilon_0} \qquad \operatorname{rot} \mathbf{E}_{\text{tot}} + \frac{\partial \mathbf{B}_{\text{tot}}}{\partial t} = 0 \qquad (9.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}_{\text{tot}} = 0 \qquad \operatorname{rot} \mathbf{B}_{\text{tot}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}_{\text{tot}}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}_{\text{tot}}. \qquad (9.2)$$

Der Index “tot” soll kennzeichnen, dass wir hier alle möglichen Quellen und Felder berücksichtigen, die im System vorkommen.

Stellen wir uns nun vor, dass ein Stück Materie in das elektrische Feld eines Kondensators eingebracht wird, wie in der nebenstehenden Abbildung gezeigt wird. Wir können nun die Ladungsdichte ρ_{tot} auf folgende Weise aufteilen:

$$\rho_{\text{tot}} = \rho_0 + \rho_{\text{ext}} + \rho_{\text{ind}}. \qquad (9.3)$$



Dabei beschreibt ρ_0 die Ladungsdichte der ungestörten Materie. Im Folgenden nehmen wir ungeladene Medien an und vernachlässigen ρ_0 in unserer Diskussion. ρ_{ext} wird als die externe Ladungsdichte bezeichnet und beschreibt die makroskopisch messbaren Ladungen auf den Kondensatorplatten. Das hierbei erzeugte Feld wirkt nun auf das Material und induziert dort Polarisationsladungen, deren lokale Ladungsdichte durch ρ_{ind} beschreibbar ist. Hierbei handelt es sich um eine Reaktion der Materie auf eine äußere Störung. Physikalisch beschreibt ρ_{ind} die Änderung der Ladungsdichte ρ_0 . Dieses Verhalten lässt sich mithilfe der “Response Theorie” beschreiben (c. f. Optik und Wellen).

Das auftretende Problem ist nun, dass die Gesamtladung ρ_{tot} zu einer mikroskopischen Größe wird, die uns experimentell nicht zugänglich ist. Ebenfalls ändern sich die daraus resultierenden Felder auf mikroskopischer Ebene. Wir sind jedoch an den mikroskopischen Details nicht interessiert und beschreiben die Response des Materials durch eine räumliche Mittelung über viele Atomabstände. Daher beschreiben wir im Folgenden räumlich gemittelte Felder $\mathbf{E} \rightarrow \langle \mathbf{E} \rangle \equiv \mathbf{E}$, wobei wir die gewohnte Notation beibehalten.

Charakterisierung der Response:

Wir wollen nun die Response des Materials charakterisieren. Dabei nehmen wir an, dass ein linearer Zusammenhang zwischen der Störung und Response besteht:

$$E_{\text{ind}} \propto E_{\text{ext}} \quad \Rightarrow \quad E = E_{\text{ext}} + E_{\text{ind}} \propto E_{\text{ext}}. \qquad (9.4)$$

Für das \mathbf{B} -Feld nehmen wir einen analogen Zusammenhang. Diese lineare Abbildung zwischen \mathbf{E} und \mathbf{E}_{ext} schlägt folgende Definition vor:

$$\boxed{\mathbf{E} = \varepsilon^{-1} \mathbf{E}_{\text{ext}}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{B}_{\text{ext}}}. \quad (9.5)$$

Die neuen eingeführten Größen bezeichnen wir als Dielektrizität (ε) und Permeabilität (μ) des Materials. Im Allgemeinen gilt jedoch $\mathbf{E} \nparallel \mathbf{E}_{\text{ext}}$, also ist $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_{ij}$ ein Tensor zweiter Stufe.

Wir hatten bereits festgestellt, dass die induzierten Ladungen eine Abweichung der Ladungsdichte ϱ_0 der ungestörten Materie darstellen. Diese Abweichungen können wir durch elektrische und magnetische Dipolmomente beschreiben. Führen wir nun eine räumliche Mittelung durch, dann erscheint es natürlich, folgende Größen zu definieren:

$$\boxed{\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) := \frac{\text{elektrisches Dipolmoment}}{\text{Volumen}}} \quad (9.6)$$

$$\boxed{\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) := \frac{\text{magnetisches Dipolmoment}}{\text{Volumen}}}. \quad (9.7)$$

Wir bezeichnen $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ als die Polarisation und $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ als die Magnetisierung. Führen wir nun die Mittelung der induzierten Ladungsdichte $\varrho_{\text{ind}} \rightarrow \langle \varrho_{\text{ind}} \rangle \equiv \varrho_{\text{ind}}$ explizit aus (analog Stromdichte), dann ergibt sich nach einer etwas länglichen Rechnung:

$$\text{div } \mathbf{P} = -\varrho_{\text{ind}} \quad \text{rot } \mathbf{M} = \mathbf{j}_{\text{ind}} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (9.8)$$

Historisch bedingt führen wir nun noch zwei weitere Felder ein, welche die gemittelten \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Felder mit den Response-Funktionen verbinden:

$$\boxed{\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) := \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \stackrel{*}{=} \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}} \quad (9.9)$$

$$\boxed{\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) := \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \stackrel{*}{=} \frac{1}{\mu_0 \mu} \mathbf{B}}. \quad (9.10)$$

Dabei gilt die Gleichheit (*) nur für lineare Medien, während die Definition allgemeingültig ist.

Herleitung der makroskopischen Maxwellgleichungen

Wir besitzen nun alle Werkzeuge, um die makroskopischen MAXWELL-Gleichungen herzuleiten. Dafür schreiben wir die inhomogene Gleichung von (9.1) als

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{E} = \frac{\varrho_{\text{ext}} + \varrho_{\text{ind}}}{\varepsilon_0} &\Rightarrow \varepsilon_0 \text{div } \mathbf{E} \stackrel{(9.8)}{=} \varrho_{\text{ext}} - \text{div } \mathbf{P} \\ &\text{div } \underbrace{(\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})}_{=\mathbf{D}} = \varrho_{\text{ext}}. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Betrachten wir nun noch die inhomogene Gleichung von (9.2)

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mu_0 (\mathbf{j}_{\text{ext}} + \mathbf{j}_{\text{ind}}) \\
 \operatorname{rot} \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \underbrace{\mathbf{j}_{\text{ind}}}_{\operatorname{rot} \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}} &= \mathbf{j}_{\text{ext}} \\
 \operatorname{rot} \left(\underbrace{\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}}_{\mathbf{H}} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\underbrace{\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}}_{\mathbf{D}} \right) &= \mathbf{j}_{\text{ext}}, \tag{9.12}
 \end{aligned}$$

dann ergeben sich direkt die MAXWELL-Gleichungen in Materie zu

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{D} = \varrho_{\text{ext}}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j}_{\text{ext}}}. \tag{9.13}$$

9.2 Energiebilanz des EM-Feldes

Wir setzen uns nun zum Ziel einen Ausdruck für die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes zu finden. Dafür betrachten wir zunächst die Arbeit die das EM-Feld auf geladene Teilchen ausübt

$$dW = \sum_i \underbrace{\mathbf{F}_i}_{\text{Lorentz-Kraft}} d\mathbf{r}_i = \sum_i q_i (\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}_i dt = \sum_i q_i \mathbf{v}_i \mathbf{E} dt. \tag{9.14}$$

Damit ergibt sich die Rate, mit der das EM-Feld Arbeit verrichtet

$$\frac{dW}{dt} = \sum_i \mathbf{j}_i \mathbf{E}. \tag{9.15}$$

Wir wollen nun unter Nutzung der MAXWELL-Gleichungen (9.13) die Rate der verrichteten Arbeit konkret betrachten. Dafür nehmen wir wieder ein lineares Medium ($\mathbf{D} \propto \mathbf{E}$, $\mathbf{B} \propto \mathbf{H}$). Es gilt nach AMPERE

$$\begin{aligned}
 \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} &= \underbrace{(\operatorname{rot} \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E}}_{\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})} - \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\
 &= \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} \\
 &\Rightarrow \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{H} \cdot \underbrace{\operatorname{rot} \mathbf{E}}_{-\partial_t \mathbf{B}} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \\
 &= \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{9.16}
 \end{aligned}$$

Aufgrund der Proportionalität von \mathbf{E} und \mathbf{D} können wir den letzten Term umschreiben zu:

$$\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) = \frac{1}{2} \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{9.17}$$

Verfährt man analog mit dem vorletzten Term, so ergibt sich

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot \underbrace{(\mathbf{E} \times \mathbf{H})}_{=: \mathbf{S}} - \frac{\partial}{\partial t} \left[\underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D})}_{=: w_E} \right]. \quad (9.18)$$

Wir haben hier zwei neue Größen eingeführt, \mathbf{S} ist der POYNTINGvektor, welcher die Energieflussdichte beschreibt. Die Größe w_E ist die gesuchte Energiedichte des EM-Feldes. Wir erhalten nun mit (9.18)

$$\boxed{\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot \mathbf{S} - \frac{\partial w_E}{\partial t}} \quad \text{Satz von POYNTING.} \quad (9.19)$$

Der Satz von POYNTING ist das Analogon der Kontinuitätsgleichung. Hier tritt jedoch ein dissipativer Term auf, nämlich $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$, durch den das EM-Feld Energie verliert. Für verlustfreie Medien gilt, dass der Energiefluss durch eine geschlossene Fläche gleich der der negativen Änderung der Energie in dem durch diese Fläche begrenzten Volumen ist:

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial w_E}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \quad \oint_{\partial V} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} = - \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} w_E dV. \quad (9.20)$$

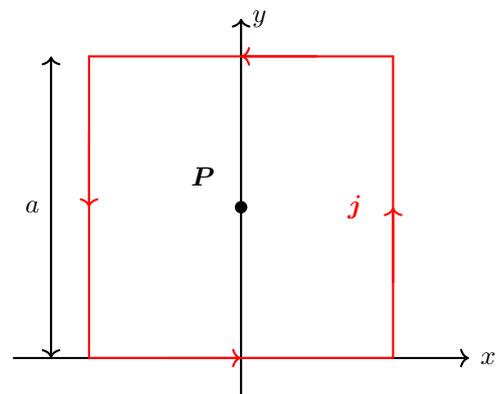
9.3 Magnetfeld einer quadratischen Drahtschleife

Wir wollen im Folgenden das Magnetfeld einer quadratischen Drahtschleife im Zentrum der Schleife berechnen. Das gesamte Magnetfeld ergibt sich durch Superposition der vier Teile des quadratischen Drahtes. Somit können wir o. B. d. A. zunächst nur das untere Drahtstück betrachten. Für die Stromdichte des endlichen Drahtes auf der x -Achse ergibt sich

$$\mathbf{j} = I\delta(z)\delta(y)\Theta\left(\frac{a}{2} - x\right)\Theta\left(\frac{a}{2} + x\right)\hat{\mathbf{e}}_x. \quad (9.21)$$

Der Punkt \mathbf{P} hat die Koordinaten $(0, a/2, 0)$. Wir können zur Berechnung des \mathbf{B} -Feldes das Gesetz von BIOT-SAVART ansetzen als

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{P}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \frac{\mathbf{P} - \mathbf{r}}{|\mathbf{P} - \mathbf{r}|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r I\delta(z)\delta(y)\Theta\left(\frac{a}{2} - x\right)\Theta\left(\frac{a}{2} + x\right)\hat{\mathbf{e}}_x \times \frac{\frac{a}{2}\hat{\mathbf{e}}_y - \mathbf{r}}{\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 + z^2}^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-a/2}^{a/2} dx I\hat{\mathbf{e}}_x \times \frac{\frac{a}{2}\hat{\mathbf{e}}_y - x\hat{\mathbf{e}}_x}{\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}^3} \quad \hat{\mathbf{e}}_x \times \hat{\mathbf{e}}_x = 0 \\ &= \frac{\mu_0 \cdot a}{8\pi} I \int_{-a/2}^{a/2} dx \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}^3} \hat{\mathbf{e}}_z. \end{aligned} \quad (9.22)$$



Zur Lösung von (9.22) nutzen wir folgendes Hilfsintegral:

$$\int dx \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}^3} = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}} + \text{const.} \quad (9.23)$$

Damit ergibt sich $\mathbf{B}(\mathbf{P})$ zu

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{P}) &= \frac{\mu_0 \cdot a}{8\pi} I \left[\frac{4x}{a^2 \sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2}} \right]_{-a/2}^{a/2} \hat{\mathbf{e}}_z \\ &= \frac{\mu_0 \cdot a}{8\pi} I \frac{4\sqrt{2}}{a} = \frac{\mu_0}{\sqrt{2}\pi} \frac{I}{a} \hat{\mathbf{e}}_z. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Für das gesamte \mathbf{B} -Feld müssen wir das erhaltene Ergebnis nur noch mit vier multiplizieren:

$$\mathbf{B}_{\text{ges}} = 4 \frac{\mu_0}{\sqrt{2}\pi} \frac{I}{a} \hat{\mathbf{e}}_z. \quad (9.25)$$

9.4 Lagrange Funktion des EM-Feldes

Im Folgenden Abschnitt wollen wir die Lagrange-Funktion des elektromagnetischen Feldes motivieren und anschließend verifizieren. Wir versuchen die Lagrange-Funktion so zu konstruieren, dass die Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0 \quad (9.26)$$

erfüllt sind. Wir würden \mathcal{L} ad hoc über den Ansatz $\mathcal{L} = T - U$ konstruieren und für die Energien

$$T = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2, \quad \text{und} \quad U = q\Phi \quad (9.27)$$

ansetzen. Dieser Ansatz ist nicht falsch, aber jedoch noch nicht vollständig, denn es wirkt zusätzlich auf ein geladenes Teilchen die LORENTZ-Kraft $\mathbf{F}_L = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Wir suchen daher nach einem weiteren Potentialterm, der von der Ladung q , Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}$ und dem Magnetfeld abhängt. Da wir von einem Potentialterm sprechen verwenden wir stattdessen das Vektorpotential \mathbf{A} und verbinden beide Größen über ein Skalarprodukt (die Lagrange-Funktion ist skalar). Wir erhalten folgenden Ansatz:

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 + q \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A} - q\Phi} \quad (9.28)$$

Tatsächlich führt dieser Ansatz auf die korrekten Bewegungsgleichungen, was wir im Folgenden noch zeigen möchten.

Dafür berechnen wir die einzelnen Terme von (9.26)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = -q \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + q \dot{\mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i} \quad (9.29)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m \dot{x}_i + q A_i. \quad (9.30)$$

Für das Bilden der totalen Zeitableitung von $A(t, x_i(t))$ müssen wir die Kettenregel beachten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) &= m \ddot{x}_i + q \underbrace{\frac{d}{dt} (A_i)} \\ &= \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla A_i \\ &= m \ddot{x}_i + q \left(\frac{\partial A_i}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla A_i \right). \end{aligned} \quad (9.31)$$

Fügen wir nun Gleichungen (9.29) und (9.31) zusammen, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} -q \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + q \dot{\mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i} - m \ddot{x}_i - q \left(\frac{\partial A_i}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla A_i \right) &= 0 \\ \Rightarrow q \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) + q \dot{\mathbf{x}} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i} - \nabla A_i \right) &= m \ddot{x}_i. \end{aligned} \quad (9.32)$$

Betrachten wir zunächst den ersten der beiden Terme. Mithilfe des Induktionsgesetzes von FARADAY lässt sich zeigen, dass dieser genau dem elektrischen Feld entspricht:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = -\text{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \Rightarrow \text{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (9.33)$$

Nach der Integrabilitätsbedingung existiert nun das Potential Φ , sodass gilt

$$-\nabla \Phi = \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (9.34)$$

Widmen wir uns nun dem zweiten Term von (9.32). Wir erwarten einen Ausdruck für die LORENTZ-Kraft. Wir untersuchen daher

$$\begin{aligned} [\dot{\mathbf{x}} \times (\text{rot } \mathbf{A})]_i &= \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j [\nabla \times \mathbf{A}]_k = \underbrace{\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm}}_{=\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}} \dot{x}_j \partial x_l A_m \\ &= \dot{x}_j \partial x_i A_j - \dot{x}_j \partial x_j A_i. \end{aligned} \quad (9.35)$$

Andererseits formen wir den zweiten Summanden von (9.32) um zu

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i} - \nabla A_i \right) &= \dot{x}_k \partial x_i A_j \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_k \hat{\mathbf{e}}_j}_{\delta_{jk}} - \dot{x}_k \partial x_j A_i \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_k \hat{\mathbf{e}}_j}_{\delta_{jk}} \\ &= \dot{x}_j \partial x_i A_j - \dot{x}_j \partial x_j A_i \stackrel{(9.35)}{=} [\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}]_i. \end{aligned} \quad (9.36)$$

Setzen wir nun die gefundenen Ausdrücke (9.34) und (9.36) in (9.32) ein, so ergibt sich

$$q \mathbf{E} + q (\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}) = m \ddot{\mathbf{x}}, \quad (9.37)$$

was genau der LORENTZ-Kraft entspricht.

10 Tutorium

Das MAXWELL-Gleichungen gelten in allen Inertialsystemen, was bedeutet, dass sich ihre Form unter LORENTZtransformationen nicht ändert. Diese Invarianz wird als Kovarianz der MAXWELL-Gleichungen bezeichnet. Wir wollen eine kovariante Schreibweise einführen und dazu einige Beispiele angeben.

10.1 Eichinvarianz der Maxwell-Gleichungen

Beginnen wir zunächst noch einmal mit der Diskussion der MAXWELL-Gleichungen des *Vakuums*:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j} \qquad (10.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \qquad \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \qquad (10.2)$$

Hierbei trennen wir fortan die MAXWELL-Gleichungen auf in einen inhomogenen Teil (10.1) und einen homogenen Teil (10.2).

Wir haben bereits die Beziehung der Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} zu den Potentialen \mathbf{A} und Φ in (7.12) und (9.34) kennengelernt als

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \qquad \mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \qquad (10.3)$$

Diese Relationen erfüllen automatisch die homogenen MAXWELL-Gleichungen

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0, \qquad \nabla \times (-\nabla \Phi) = \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0, \qquad (10.4)$$

wie sich durch Einsetzen von (10.2) in (10.3) leicht verifizieren lässt.

Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen sind jedoch nicht trivialerweise erfüllt. Für das Gaußgesetz ergibt sich durch Einsetzen des elektrischen Feldes

$$\nabla \cdot \left(\nabla \Phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \Delta \Phi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \qquad (10.5)$$

Für das AMPERÉ-Gesetz erhalten wir

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) &= \mu_0 \mathbf{j} \\ \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= \mu_0 \mathbf{j} \\ \Rightarrow \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) &= -\mu_0 \mathbf{j}. \end{aligned} \qquad (10.6)$$

Wir können nun die Eichinvarianz der Potentiale \mathbf{A} und Φ nutzen:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda \\ \Phi &\rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda.\end{aligned}\quad (10.7)$$

Durch diese Eichtransformationen bleibt das \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Feld invariant. Wir können unser Λ nun so wählen, dass für die transformierten Felder folgender Ausdruck gilt:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi'}{\partial t} = 0} \quad \text{LORENZ-Eichung.} \quad (10.8)$$

Diese Eichung wird als LORENZ-Eichung⁹ bezeichnet. Wir sehen, dass die LORENZ-Eichung genau dem zweiten Summanden in (10.6) entspricht, wodurch sich die Gleichung zu einer inhomogenen Wellengleichung vereinfacht. Wir können die LORENZ-Eichung ebenfalls in (10.5) einsetzen und erhalten nun für die Bewegungsgleichungen der Potentiale

$$\boxed{\Delta\Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}} \quad (10.9)$$

$$\boxed{\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}} \quad (10.10)$$

Wir können die Wellengleichungen noch mithilfe des d'Alembert Operators $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ vereinfachen zu

$$\boxed{\square\Phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \square\mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}}. \quad (10.11)$$

10.2 Kovarianz der Maxwell-Gleichungen

Wie schon eingangs erwähnt, sind die MAXWELL-Gleichungen in allen Inertialsystemen gültig. Grundlage dafür bildet die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen. Dieses Postulat führte Einstein zur speziellen Relativitätstheorie und den LORENTZ-Transformationen. Dabei handelt es sich um Koordinatentransformationen, die das vierdimensionale Linienelement invariant lassen

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2. \quad (10.12)$$

Wir wollen nochmal kurz die explizite Darstellung der LORENTZtransformationen angeben. Betrachten wir nun ein Koordinatensystem, welches sich mit einer konstanten Geschwindigkeit v relativ zu einem anderen Koordinatensystem in x -Richtung bewegt. Unter der Annahme $c = c'$ können wir folgende Transformationsregeln herleiten:

$$\begin{aligned}ct' &= \gamma(ct - \beta x) & \beta &= \frac{v}{c} \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) & \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y' &= y, \quad z' = z\end{aligned}\quad (10.13)$$

⁹Die LORENZ-Eichung ist benannt nach Ludvig LORENZ, der nicht zu verwechseln ist mit Hendrik Antoon LORENTZ, dem Vater der LORENTZ-Kraft.

Wir arbeiten im Folgenden in der vierdimensionalen Raumzeit, wobei wir die Koordinaten in 4 -Vektoren zusammenfassen:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \in \mathbb{R}^4. \quad (10.14)$$

Mit diesem Formalismus können wir die LORENTZtransformationen in eine Matrixschreibweise überführen. Es lässt sich leicht durch Einsetzen überprüfen, dass folgender Zusammenhang gilt:

$$x^{\mu'} = \Lambda^\mu{}_{\nu'} x^\nu \quad \text{mit} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.15)$$

Hierbei taucht eine neue Schreibweise mit einem tiefgestellten Index auf. Wir modifizieren nun die EINSTEINSche Summenkonvention, indem wir festlegen, dass wir über hoch- und tiefgestellte Indizes summieren. Warum dies sinnvoll ist und was x^μ von x_μ unterscheidet, wollen wir im Folgenden versuchen zu erklären:

Betrachten wir nochmals das invariante Linienelement der Raumzeit, dann lässt sich dies mithilfe der Minkowski-Metrik $g_{\mu\nu}$ schreiben als

$$\begin{aligned} ds^2 &= dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \\ ds^2 &= \underbrace{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}_{:= dx_\nu} \quad g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10.16)$$

Die Schreibweise eines tiefstehenden Index ist nur eine Abkürzung für den Ausdruck

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu, \quad x_\mu = (ct, -x, -y, -z). \quad (10.17)$$

den wir als *kontravarianten* Vektor bezeichnen. Im Gegensatz dazu wird x^μ als *kovarianter* Vektor bezeichnet.

Nun stellt sich die berechtigte Frage, was wir mit dem Formalismus anfangen können. Die kurze Antwort ist: eine ganze Menge! Wir wollen diese Aussage mit ein paar Beispielen untermauern.

Beispiel 1.) Kontinuitätsgleichung:

Bevor wir die Kontinuitätsgleichung betrachten, überlegen wir uns noch, wie Ableitungen im Vier-Formalismus zu behandeln sind. Wir definieren dafür¹⁰

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (10.18)$$

¹⁰Wer sich die Frage stellt, warum wir bei der Ableitung den Index unten schreiben, der sei darauf hingewiesen, dass wir mit dieser Notation Ableitungen kovarianter Vektoren ganz leicht ausführen können $\partial_\mu x^\mu = 4$.

Wir führen nun den ersten physikalischen 4-Vektor ein, nämlich die 4-Stromdichte j^μ

$$j^\mu := (c\rho, \mathbf{j}) = (c\rho, j_x, j_y, j_z). \quad (10.19)$$

Damit können wir die Kontinuitätsgleichung direkt schreiben als

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}, \quad \partial_\mu j^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (10.20)$$

Wir merken an, dass die rechte Seite der Kontinuitätsgleichung unabhängig vom gewählten Koordinatensystem ist. Ihr Wert ist in allen Inertialsystemen gleich. Damit ist die Kontinuitätsgleichung LORENTZinvariant.

Beispiel 2.) Maxwell-Gleichungen:

Wir sind nun in diesem Tutorium an einem Punkt angekommen, wo es bequemer ist, sich vom Internationalen Einheitensystem zu lösen und stattdessen die MAXWELL-Gleichungen in Gauß-Einheiten anzugeben. Die Grundidee der Gaußeinheiten ist, dass der Vorfaktor des COULOMB-Gesetzes $(4\pi\varepsilon)^{-1} \equiv 1$ gesetzt wird. Wir erhalten für die MAXWELL-Gleichungen folgende Ausdrücke:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho \qquad \operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (10.21)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \qquad \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (10.22)$$

Analog zur 4-Stromdichte können wir nun die Potentiale Φ und \mathbf{A} in einen 4-Vektor zusammenfassen:

$$A^\mu = (\Phi, A_x, A_y, A_z), \quad \text{4-Potential.} \quad (10.23)$$

Wir sehen nun bei der Betrachtung der Wellengleichungen (10.11), dass sich bei Anwendung des d'Alembert Operators auf das Potential Φ die Ladungsdichte ergibt, welche die 0-Komponente von j^μ ist. Daher lässt sich leicht feststellen, dass folgender Zusammenhang gelten muss:

$$\begin{aligned} \square \Phi &= 4\pi\rho \\ \square \mathbf{A} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu}. \quad (10.24)$$

Beispiel 3.) Lorenz-Eichung:

Wir wollen nun nochmal die LORENZ-Eichung (10.8) betrachten. In Gauß-Einheiten nimmt sie eine leicht modifizierte Form an

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\partial_\mu A^\mu = 0}. \quad (10.25)$$

Wir sehen ebenfalls, dass die LORENZ-Eichung eine LORENTZinvariante Größe ist. Somit ist sichergestellt, dass wir die Formulierung der MAXWELL-Gleichungen in LORENZ-Eichung (10.24) in allen Koordinaten wählen können.

Beispiel 4.) Feldstärketensor:

Die Formulierung von 4-Vektoren funktioniert nur für Größen mit vier Komponenten. Daher ist es leicht ersichtlich, dass sich \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Feld nicht als 4-Vektor schreiben lassen. Jedoch sind die sechs unabhängigen Komponenten perfekt dazu geeignet, eine antisymmetrische 4×4 -Matrix zu füllen, die sechs unabhängige Komponenten enthält¹¹.

Wir definieren nun einen antisymmetrischen Tensor zweiter Stufe

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$(F)^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}^{\mu\nu}, \quad (10.26)$$

den wir den Feldstärketensor nennen. Es sei noch angemerkt, dass $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ die kontravariante Ableitung beschreibt. Es ist leicht erkennbar, dass $F^{\mu\nu}$ in der Tat antisymmetrisch ist unabhängig von der Matrixrepräsentation.

Wir möchten an dieser Stelle noch eine kleine Merkhilfe geben, sich die Einträge des Feldstärketensors leicht zu merken. Die erste Zeile besteht aus den elektrischen Feldkomponenten und die F^{21} Komponente ist B_z . Dann lassen sich alle anderen Komponenten eindeutig konstruieren, indem wir feststellen, dass in jeder Spalte x, y, z jeweils einmal vorkommt und die B_i unterschiedliche Vorzeichen besitzen.

Die erste Zeile der MAXWELL-Gleichungen ergibt sich nun direkt durch die folgende Formel

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu. \quad (10.27)$$

Wir prüfen diesen Zusammenhang nochmal explizit nach:

$$\begin{aligned} \nu = 0: \quad \partial_\mu F^{\mu 0} &= 0 + \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \varrho = \frac{4\pi}{c} j^0 \\ \nu = 1: \quad \partial_\mu F^{\mu 1} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} + 0 + \underbrace{\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}}_{= [\text{rot } \mathbf{B}]_x} = \frac{4\pi}{c} j_x. \end{aligned} \quad (10.28)$$

Allerdings liefert uns der Feldstärketensor nur die erste Zeile der MAXWELL-Gleichungen. Für die homogenen Gleichungen führen wir einen weiteren Tensor ein

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} F_{\kappa\lambda}, \quad \text{mit } F_{\kappa\lambda} = g_{\kappa\mu} g_{\nu\lambda} F^{\mu\nu}$$

$$(\tilde{F})^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ B_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ B_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix}^{\mu\nu}, \quad (10.29)$$

¹¹Durch die Forderung der Anti-Symmetrie sind die Diagonalelemente Null und nur die Elemente oberhalb der Hauptdiagonalen unabhängig.

welchen wir als *dualen Feldstärketensor* bezeichnen. Der 4-Tensor $\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}$ ist einfach der vierdimensionale LEVI-CIVITA Tensor, der wie folgt definiert ist:

$$\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} = \begin{cases} +1 & \text{für gerade Permutationen } \mu = 0, \nu = 1, \kappa = 2, \lambda = 3 \\ -1 & \text{für ungerade Permutationen} \\ 0 & \text{wenn zwei oder mehr Indizes gleich sind} \end{cases}. \quad (10.30)$$

Wir wollen ebenfalls noch eine Merkhilfe zur Aufstellung des dualen Feldstärketensors geben. Zunächst lässt sich $F_{\mu\nu}$ aus $F^{\mu\nu}$ gewinnen, indem bei den elektrischen Komponenten das Vorzeichen getauscht wird. Für den dualen Feldstärketensor ersetzen wir einfach $E_i \rightarrow B_i$ und $B_i \rightarrow -E_i$.

Wir erwarten zur Erfüllung der homogenen MAXWELL-Gleichungen, dass der Ausdruck $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}$ immer Null ergibt, analog zu (10.27), wo auf der rechten Seite die Quellen stehen, die bei den homogenen Gleichungen verschwinden.

Tatsächlich lässt sich mathematisch leicht zeigen, dass $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}$ tatsächlich verschwindet:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \partial_\mu \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} F_{\kappa\lambda} = \frac{1}{2} \underbrace{\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}}_{\text{antisymmetrisch}} \underbrace{\partial_\mu (\partial_\kappa A_\lambda - \partial_\lambda A_\kappa)}_{\text{symmetrisch}} = 0. \quad (10.31)$$

Die Ableitungen sind unter Vertauschung symmetrisch, während beim ε -Tensor das Vorzeichen wechselt. Daher ist der gesamte Ausdruck Null.

Als letztes wollen wir nun die homogenen Gleichungen noch explizit verifizieren:

$$\begin{aligned} \nu = 0: \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu 0} &= 0 + \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nu = 1: \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu 1} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t} + 0 - \underbrace{\frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial z}}_{= [-\text{rot } \mathbf{E}]_x} = 0. \end{aligned} \quad (10.32)$$

11 Tutorium

11.1 Ebene Wellen

Wir wollen im Folgenden eine der wichtigsten Anwendungen der MAXWELL-Gleichungen behandeln. Dazu gehören insbesondere elektromagnetische Wellen, wobei wir uns auf ebene monochromatische Wellen beschränken wollen. Dafür nehmen wir an, dass sich im Raum keine freien Ladungen und Ströme befinden $\rho = 0, \mathbf{j} = 0$ (Vakuum). Dann lassen sich die MAXWELL-Gleichungen mit den Potentialen folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} \square \Phi(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ \square \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= 0 \end{aligned} \quad \square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}. \quad (11.1)$$

Wir haben diese Wellengleichungen mithilfe der LORENZ-Eichung hergeleitet

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad (11.2)$$

Tatsächlich lässt sich mit einer geeigneten Eichtransformation noch eine weitere Bedingung an die MAXWELL-Gleichungen stellen. Dafür nehmen wir zunächst an, dass die Felder \mathbf{A} und Φ die LORENZ-Eichung noch nicht erfüllen

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = f(\mathbf{r}, t). \quad (11.3)$$

Durch eine Eichtransformation der Felder

$$\begin{aligned} \Phi' &= \Phi - \frac{\partial}{\partial t} \Lambda(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla \Lambda(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (11.4)$$

ergibt sich nun folgende Bedingung für die LORENZ-Eichung

$$\operatorname{div} \mathbf{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi'}{\partial t} = f(\mathbf{r}, t) + \square \Lambda \stackrel{!}{=} 0. \quad (11.5)$$

Die sich damit ergebene lineare Differentialgleichung $\square \Lambda = -f(\mathbf{r}, t)$ wird im Allgemeinen folgende Lösungsstruktur aufweisen:

$$\Lambda = \Lambda_{\text{hom.}} + \Lambda_{\text{part.}}. \quad (11.6)$$

Wir sehen, dass die partikuläre Lösung $\Lambda_{\text{part.}}$ bereits die Bedingung (11.2) erfüllt. Damit ist die homogene Lösung $\Lambda_{\text{hom.}}$ noch nicht eindeutig festgelegt. Dies können wir nutzen um zusätzlich noch

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (11.7)$$

als zweite Eichbedingung einzuführen. Damit folgt aus (11.2) die Coulomb-Eichung $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, welche auch als Strahlungseichung bezeichnet wird. Zusammengefasst ergeben sich die Bedingungen

$$\boxed{\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \Phi(\mathbf{r}, t) = 0.} \quad (11.8)$$

Die allgemeine Lösung dieser homogenen Wellengleichung ist eine ebene Welle. Dabei wird eine Welle *eben* genannt, wenn sie nur von einer Raumrichtung abhängt. Damit folgt, dass die Phasenflächen (Flächen konstanter Phase) Ebenen sind, die sich mit einer konstanten Geschwindigkeit bewegen.

Die Felder \mathbf{B} und \mathbf{E} sind reell, somit gilt dies auch für das Vektorpotential. Nehmen wir nun auch noch an, dass die Lösung \mathbf{A} eine monochromatische Welle ergibt, dann lautet der allgemeine Ansatz:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (11.9)$$

Setzen wir den Ansatz in die Wellengleichung ein

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \operatorname{Re} \left(\mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right) &= 0 \\ - \underbrace{\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right)}_{=k^2} \operatorname{Re} \left(\mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Damit ergibt sich die bekannte Dispersionsrelation

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = \frac{\omega}{c}}, \quad (11.11)$$

wobei wir annehmen, dass $|\mathbf{k}| = k$ und ω positiv sind.

Wir können nun die zweite Bedingung $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ verwenden, um eine Beziehung zwischen der Feldamplitude und des Wellenzahlvektors \mathbf{k} zu gewinnen:

$$0 = \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \left(\nabla \cdot \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right) = \operatorname{Re} \left(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right). \quad (11.12)$$

Damit folgt direkt

$$\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{A}_0 \perp \mathbf{k}}. \quad (11.13)$$

Wir betrachten nun die physikalischen \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Felder:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \operatorname{Re} \left(i\mathbf{A}_0 \omega e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right) = \operatorname{Re} \left(\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right). \quad (11.14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = \operatorname{Re} \left(\nabla \times (\mathbf{A}_0) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right) = \operatorname{Re} (i\mathbf{k} \times \mathbf{A}_0) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (11.15) \\ &= \varepsilon_{ijk} \partial_j A_{0,k} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \hat{\mathbf{e}}_i \\ &= \varepsilon_{ijk} i k_j A_{0,k} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \hat{\mathbf{e}}_i = i\mathbf{k} \times \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \end{aligned}$$

Wir erhalten damit folgende Beziehungen für die Feldamplituden:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= ik \mathbf{A}_0 \cdot c & \Rightarrow & \quad |\mathbf{E}_0| = k |\mathbf{A}_0| \cdot c \\ \mathbf{B}_0 &= i\mathbf{k} \times \mathbf{A}_0 & & \quad |\mathbf{B}_0| = k |\mathbf{A}_0|. \end{aligned} \quad (11.16)$$

Damit ergeben sich folgende Beziehungen für die Feldamplituden und den Wellenzahlvektor:

$$\boxed{\mathbf{E} \perp \mathbf{k}, \quad \mathbf{B} \perp \mathbf{k}, \quad \mathbf{E} \perp \mathbf{B}, \quad |\mathbf{B}| = \frac{1}{c} |\mathbf{E}|}. \quad (11.17)$$

Wir sehen, dass die ebenen Wellen transversale Struktur aufweisen, da die Feldamplituden senkrecht zur Ausbreitungsrichtung \mathbf{k} stehen. Weiterhin bilden die Vektoren $\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{B}$ ein Rechtssystem mit

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{E}. \quad (11.18)$$

Eine weitere interessante Folgerung ist, dass die Feldamplitude des \mathbf{B} -Feldes um den Faktor c gegenüber \mathbf{E} reduziert ist. Von daher wird beispielsweise in der Betrachtung der Wechselwirkung des elektromagnetischen Strahlungsfeldes mit geladenen Teilchen das \mathbf{B} -Feld oftmals nicht betrachtet. Erst für relativistische Geschwindigkeiten $v \approx c$ der geladenen Teilchen ergibt sich in der LORENTZ-Kraft eine ähnliche Wirkung von \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Feld

$$\mathbf{F}_L = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad |\mathbf{F}_L| = q\left(|\mathbf{E}| + \frac{v}{c} |\mathbf{E}|\right). \quad (11.19)$$

Im Vergleich von (11.14) und (11.15) fällt weiterhin auf, dass \mathbf{B} und \mathbf{E} phasengleich sind und ebenfalls die Wellengleichung erfüllen.

Herleitung der Wellengleichung für \mathbf{E} und \mathbf{B}

Wir können die Wellengleichung für \mathbf{B} - und \mathbf{E} -Feld mithilfe der MAXWELL-Gleichungen gewinnen, indem wir auf die Wirbelgleichungen die Rotation anwenden. Für das Faraday-Gesetz ergibt sich dann exemplarisch

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\underbrace{\nabla \times \mathbf{B}}_{\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}} \right) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} \\ &= \nabla \left(\underbrace{\nabla \cdot \mathbf{E}}_{=0} \right) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (11.20)$$

Für das AMPERÉ-Gesetz folgt analog

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) &= \nabla \times \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\underbrace{\nabla \times \mathbf{E}}_{-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{B} \\ &= \nabla \left(\underbrace{\nabla \cdot \mathbf{B}}_{=0} \right) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{B} = -\Delta \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (11.21)$$

Der Vergleich von linker und rechter Seite ergibt dann

$$\boxed{\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = 0, \quad \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} = 0}. \quad (11.22)$$

Weitere Bemerkungen

Wir wollen abschließend noch einige weitere Eigenschaften ebener Wellen anmerken. Betrachten wir die Definition der Phasengeschwindigkeit, so ergibt sich direkt

$$v_{\text{ph}} := \frac{\omega}{k} \stackrel{(11.11)}{=} c, \quad (11.23)$$

dass sich elektromagnetische Wellen im Vakuum mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten.

Wir betrachten nun den Energiefluss des EM-Feldes. Dafür betrachten wir den Poynting-Vektor \mathbf{S} , für den gilt:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \parallel \mathbf{k}. \quad (11.24)$$

Wir sehen, dass der Energiefluss in Ausbreitungsrichtung der EM-Welle gerichtet ist.

Zuletzt wollen wir einen Ausdruck für die Intensität einer ebenen, EM-Welle finden. Dafür benutzen wir die Definition mithilfe des POYNTING-Vektors

$$I := \langle |\mathbf{S}| \rangle_T = \frac{1}{\mu_0} \langle |\mathbf{E} \times \mathbf{B}| \rangle_T = \frac{1}{\mu_0} \langle |\mathbf{E}_0| \cdot |\mathbf{B}_0| \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \rangle_T. \quad (11.25)$$

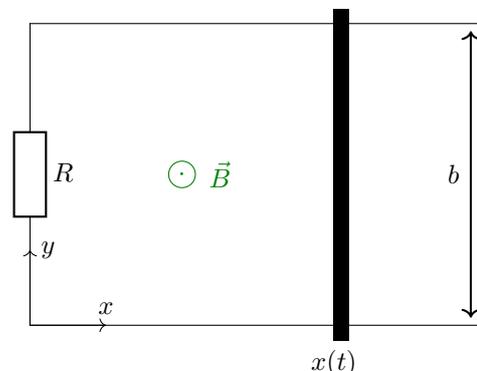
Das zeitliche Mittel ergibt sich durch Integration über eine Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$ geteilt durch die Periodendauer T . Nutzen wir noch die Beziehung zwischen \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Feld (11.17), so ergibt sich

$$\begin{aligned} I &= \frac{|\mathbf{E}_0|^2}{\mu_0 c} \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) dt = \frac{|\mathbf{E}_0|^2}{\mu_0 c} \frac{1}{T} \underbrace{\int_0^T \frac{1}{2} (1 + \cos(2\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - 2\omega t)) dt}_{=T/2} \\ &= \frac{|\mathbf{E}_0|^2}{\mu_0 c} \frac{1}{T} \frac{T}{2} \Rightarrow \boxed{I = \frac{\varepsilon_0 c}{2} |\mathbf{E}_0|^2}. \end{aligned} \quad (11.26)$$

11.2 Bewegter Stab im homogenen Magnetfeld

Zum Abschluss wollen wir nochmal eine Übungsaufgabe betrachten mit einem leitenden Stab der Masse m , der sich in einem homogenen Magnetfeld $\mathbf{B} = B\hat{e}_z$ mit $\mathbf{v}(t) = v(t)\hat{e}_x$ auf einem Draht entlang bewegt.

a.) Zunächst wollen wir den in der Drahtschleife induzierten Strom zum Zeitpunkt t berechnen. Dafür verwenden wir das Faraday-Gesetz in integraler Form:



$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}. \quad (11.27)$$

Das geschlossene Kurvenintegral liefert uns dabei direkt die induzierte Spannung $U(t)$ und wir erhalten

$$\underbrace{U(t)}_{R \cdot I(t)} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = -\frac{\partial}{\partial t} B \underbrace{\iint dA}_{x(t) \cdot b} = -B \cdot b \frac{\partial x(t)}{\partial t} = -Bbv(t). \quad (11.28)$$

Damit folgt für den induzierten Strom

$$I(t) = -\frac{B \cdot b v(t)}{R}. \quad (11.29)$$

Das Minuszeichen ist ein Resultat der LENZschen Regel, nach der der Induktionsstrom in einer Drahtschleife seinem Ursprung entgegengerichtet ist. Ein Strom entgegen des Uhrzeigersinns erzeugt ein \mathbf{B} -Feld in positive z -Richtung, daher muss der Induktionsstrom entgegengesetzt, im Uhrzeigersinn, fließen.

a.) Auf bewegte Ladungsträger im Magnetfeld wirkt die LORENTZ-Kraft. Somit wirkt auf den stromdurchflossenen Stab eine Kraft, die wir wie folgt berechnen können:

$$\mathbf{F}_L = q \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \underbrace{Il}_{l=b} \times \mathbf{B} \stackrel{l=b}{=} I \underbrace{\mathbf{b}}_{-b\hat{e}_y} \times \underbrace{\mathbf{B}}_{B\hat{e}_z} = -Ib \cdot B\hat{e}_x. \quad (11.30)$$

Wir beachten hierbei, dass die Richtung des Stroms bereits bei \mathbf{b} beachtet wurde und deshalb der Strom als positiv in die Gleichung eingesetzt werden muss. Damit folgt für die wirkende Kraft:

$$\mathbf{F}_L = -\frac{B^2 b^2}{R} v(t) \hat{e}_x. \quad (11.31)$$

c.) Zuletzt wollen wir noch für eine gegebene Anfangsgeschwindigkeit $v(t=0) = v_0$ berechnen, wie der Bewegungsablauf des Stabes aussehen wird. Da die Lorentz-Kraft der Bewegungsrichtung entgegenwirkt, kommt der Stab irgendwann zum stehen. Die zugehörige Differentialgleichung

$$F = m \cdot \frac{dv}{dt} = -\frac{B^2 b^2}{R} v(t) \quad (11.32)$$

kann mit Trennung der Variablen gelöst werden, womit sich folgende Lösung ergibt:

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dt} = -\frac{B^2 b^2}{Rm} \Rightarrow \ln(v) = -\frac{B^2 b^2}{Rm} t + \text{const.} \quad (11.33)$$

Unter Verwendung der Anfangsbedingung ergibt sich

$$v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{B^2 b^2}{Rm} t\right) > 0 \quad \forall t. \quad (11.34)$$

Der Stab kommt also erst im Unendlichen zum Stehen. Die zurückgelegte Strecke lässt sich durch Integration einfach bestimmen zu

$$x(t \rightarrow \infty) = \int_0^\infty v_0 \exp\left(-\frac{B^2 b^2}{Rm} t\right) dt = \frac{Rm}{B^2 b^2} v_0. \quad (11.35)$$

12 Tutorium

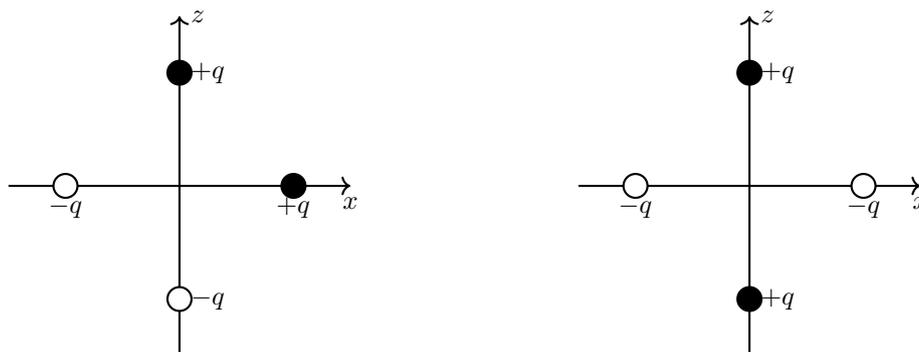
12.1 Klausurvorbereitung

Aufgabe 1: Elektrostatik

Eine Kugel vom Radius R trage eine homogene Ladungsdichte ρ . Die Gesamtladung sei Q . Was ist die elektrostatische Energie der Ladungsverteilung ausgedrückt durch Q und R ?

Aufgabe 2: Multipolentwicklung

- a) Berechne für die folgenden Ladungsverteilungen die kartesischen Dipol- und Quadrupolmomente und die sphärischen Dipolkomponenten und schreibe jeweils den führenden Term in der Entwicklung des elektrostatischen Potentials für $r \gg a/2$ auf.
- b) Welche Aussagen kann man aufgrund von Symmetrieeigenschaften der Ladungsverteilung in beiden Fällen bezüglich höherer Multipolmomente ($l \geq 3$) machen?



Aufgabe 3: Verständnisfragen

- a) Ist das Magnetfeld $\mathbf{B} = b \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ mit b konstant sowie $r = |\mathbf{r}|$ eine Lösung der Maxwellgleichungen? Begründe deine Antwort!
- b) Argumentiere, ob es im statischen Fall ein elektrisches Feld \mathbf{E} konstanter Richtung gibt, bei dem der Betrag der Feldstärke in einer zu \mathbf{E} senkrechten Richtung streng monoton zunimmt.

Aufgabe 4: Magnetostatik

Wir betrachten einen langen, geraden zylindrischen Leiter vom Radius b entlang der z -Achse, der homogen von einem Strom I durchflossen wird. In diesem Zylinder befindet sich eine zylindrische Ausbohrung vom Radius a , deren Achse um den Abstand d von der Leiterachse verschoben sei. In dieser zylindrischen Ausbohrung fließe kein Strom. Bestimme das Magnetfeld der zylindrischen Ausbohrung.

Aufgabe 5: Spiegelladungsmethode

Gegeben sei eine geerdete unendlich ausgedehnte leitende Metallplatte in der yz -Ebene sowie ein elektrischer Punktdipol mit Dipolmoment \mathbf{p} im Abstand a über der Metallfläche am Ort $\mathbf{r}_0 = (a, 0, 0)$ mit $a > 0$.

- a) Wie lautet die Randbedingung die an das elektrostatische Potential Φ zu stellen ist?
- b) Berechne mit der Spiegelladungsmethode das Potential!
Hinweis: Bei der Spiegelladung handelt es sich ebenfalls um einen elektrischen Dipol mit Dipolmoment \mathbf{p}' . Wo befindet sich die Spiegelladung? Bestimme \mathbf{p}' .
- c) Gib eine Formel an, wie aus dem elektrostatischen Potential die auf der Metallplatte induzierte Oberflächenladungsdichte berechnet werden kann. Die explizite Rechnung ist nicht gefordert.

Aufgabe 6: Kontinuitätsgleichung

Leite mithilfe der Maxwell-Gleichungen einen Ausdruck für die Kontinuitätsgleichung her und interpretiere das Ergebnis.

Aufgabe 7: Ebene Wellen

Wir betrachten im Folgenden die mikroskopischen Maxwellgleichungen im Vakuum.

- a) Zeige, dass das komplexifizierte elektrische Feld

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \text{mit } \mathbf{E}_0 \in \mathbb{C}^3 \quad (12.1)$$

die Wellengleichung erfüllt. Wie lautet die Dispersionsrelation?

- b) Nun betrachten wir auch noch ein komplexifiziertes \mathbf{B} -Feld

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \text{mit } \mathbf{B}_0 \in \mathbb{C}^3. \quad (12.2)$$

Zeige, dass die Maxwellgleichungen nur dann erfüllt sind wenn die elektromagnetische Welle transversal ist, d. h. \mathbf{k} , \mathbf{E}_0 und \mathbf{B}_0 paarweise senkrecht zueinander sind. Leite einen Zusammenhang zwischen $|\mathbf{E}_0|$ und $|\mathbf{B}_0|$ her.

- c) Wie lautet die Energiedichte und der POYNTING-Vektor? Berechne die zeitlich gemittelte Energiedichte und den zeitlich gemittelten POYNTING-Vektor.