

FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA
PHYSIKALISCH-ASTRONOMISCHE-FAKULTÄT



FRIEDRICH-SCHILLER-
UNIVERSITÄT
JENA

SOMMERSEMESTER 2018

Theoretische Mechanik

HOLGER GIES

LaTeX-Satz von Jan Böhmer und Emil Donkersloot,
Grafiken, Design und Korrektur von Martin Beyer
Das folgende Skript ist orientiert an dem Buch: Kuypers, Friedhelm, *Klassische
Mechanik*, John Wiley & Sons, 2016

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	4
1.1	Mathematische Vorüberlegungen	5
1.1.1	Grundlagen	5
1.1.2	Längen, Winkel und Skalarprodukt	6
1.1.3	Orthonormierte Basen und Kronecker Delta	7
1.1.4	Kreuzprodukt	7
1.1.5	Levi-Civita-Symbol	8
1.1.6	Weitere Vektoroperationen	8
1.1.7	Physikalische Folgerungen	9
2	Newtonsche Mechanik	11
2.1	Newtonsche Gesetze	11
2.1.1	Lex Prima (Trägheitsgesetz)	11
2.1.2	Lex Secunda (Bewegungsgesetz)	11
2.1.3	Lex Tertia (Reaktionsgesetz) ¹	12
2.1.4	Beispiel: freier Fall aus geringer Höhe (1D)	13
2.2	Schwingungen	15
2.2.1	Freie Schwingungen in einer Dimension	15
2.2.2	Gedämpfte Schwingungen	17
2.2.3	Erzwungene Schwingungen	19
2.3	Erhaltungssätze	22
3	Newtonsche Gravitation	28
3.1	Gravitationspotential einer Kugelschale	30
4	Methoden der Variationsrechnung	33
4.1	Extremwertbildung für ein Funktional	33
4.1.1	Beispiel: Brachistochrone-Problem	35
4.1.2	Verallgemeinerung der Euler-Gleichung auf mehrere variable Funktionen	37
4.2	Die Euler-Gleichung mit Zwangsbedingungen	38
4.2.1	Beispiel für Zwangsbedingungen	40
4.3	Die δ Notation	40
5	Das Hamiltonsche Prinzip	41
5.1	Lagrangesche Dynamik	41
5.2	Verallgemeinerte Koordinaten	43
5.3	Euler-Lagrange-Gleichungen für generalisierte Koordinaten	45
5.3.1	Mathematisches Pendel an einer Scheibe	46
5.3.2	Hangabwärts rollender Zylinder	47
5.4	Lagrange-Gleichungen 1. Art	49
5.4.1	Hangabwärts rollender Zylinder (Version 2)	49
5.5	Äquivalenz von Lagrange- und Newton-Gleichungen	50
5.6	Erhaltungssätze im Lagrange-Formalismus	53
5.6.1	Energieerhaltung	53
5.6.2	Zyklische Koordinaten	54

5.7	Das Noether Theorem	57
6	Das klassische Zwei-Körper-Problem	60
6.1	Relativkoordinaten	60
6.2	Erhaltungssätze	61
6.3	Bewegungsgleichungen	62
6.4	Das Kepler-Problem	65
6.5	Beispiel: Eigenschaften der Planetenbahnen im Sonnensystem	68
7	Mechanik eines Systems von Massepunkten	69
7.1	Schwerpunktsbewegung	69
7.2	Drehimpuls und Energie	70
7.3	Elastische Zwei-Körper-Stöße	72
7.3.1	Erhaltungssätze	72
7.3.2	Transformation der Streuwinkel	74
7.3.3	Energieübertragung bei elastischer Streuung	76
7.4	Rutherford Streuung	77
7.4.1	Streuwinkel	77
7.4.2	Streuquerschnitt	78
7.4.3	Streuung unter kleinen Winkeln	79
7.4.4	Ablenkung von Licht im Gravitationsfeld	80
8	Bewegte Bezugssysteme	82
8.1	Koordinatentransformationen	82
8.2	Zeitabhängige Transformationen	84
8.3	Scheinkräfte	86
8.3.1	Beispiel: Coriolis-Kraft	88
8.4	Das reduzierte Dreikörperproblem	89
9	Bewegung starrer Körper	93
9.1	Euler-Winkel	93
9.2	Trägheitstensor und Drehimpuls	94
9.3	Eulersche Gleichungen und klassische Kreisel	101
9.3.1	Eulersche Gleichungen	101
9.3.2	Kräftefreier Symmetrischer Kreisel	102
9.3.3	Symmetrischer Kreisel im Gravitationsfeld	105
9.3.4	Stabilität von kräftefreien Rotationen starrer Körper	110
10	Kanonische Bewegungsgleichungen - Hamiltonsche Dynamik	112
10.1	Kanonische Bewegungsgleichungen	112
10.1.1	Beispiel:	114
10.2	Poisson-Klammern	116
10.3	Stabilität dynamischer Systeme, Lyapunov-Exponenten	118

1 Einführung

Mechanik liefert die Beschreibung der Dynamik (Bewegungslehre) von Teilchen (Massepunkte, starre Körper, Vielteilchensysteme) unter dem Einfluss von äußeren oder wechselseitigen Kräften.

Die theoretische Mechanik als Teilgebiet der theoretischen Physik versucht die Vielfalt an Erfahrungstatsachen (Experimente) durch möglichst fundamentale Gesetze mit wenigen Grundbegriffen zu beschreiben.

Die im Rahmen der klassischen Mechanik eingeführten Begriffe von Raum, Zeit, Kraft, Impuls, Energie, Wirkung, ..., haben darüber hinaus in nahezu allen Teildisziplinen der Physik wichtige Bedeutung erlangt.

Die Konzepte der theoretischen Mechanik sind daher von grundlegender Bedeutung für die gesamte Physik.

Historisch gaben Gallileis Fallversuche und TYCHO BRAHES Messungen der Marsbahnen wichtige Anstöße zur Entwicklung der klassischen Mechanik.

BRAHES Beobachtungen und ihre gesetzmäßigen Zusammenfassung durch Johannes Kepler wiederum waren Meilensteine für das auf Isaac NEWTON zurückgehende Gravitationsgesetz, sowie das von ihm entwickelte System von Axiomen der klassischen Mechanik. Wichtige Beiträge zum Gravitationsgesetz kamen zur gleichen Zeit von ROBERT HOOKE.

NEWTONS Konzepte wurden wesentlich durch Leonard Euler in die uns heute vertraute Form gebracht.

Wichtige später folgende formale Entwicklungen in der Mechanik sind verknüpft mit den Namen LAGRANGE, D'ALEMBERT, HAMILTON, POINCARÉ und weitere.

Der Entwicklung und Anwendung der physikalischen Gesetze liegen oft Idealisierungen zugrunde. Im folgenden kommen zwei Arten von Idealisierungen zum tragen:

- Idealisierungen, die wesentliche von unwesentlichen Eigenschaften unterscheiden (z. B. Vernachlässigung von Reibung, endliche Ausdehnung von Massepunkten, nicht-ideale Inertialsysteme, usw.)
- Idealisierungen, um im Rahmen der Gültigkeitsgrenzen der klassischen Mechanik zu bleiben. So stößt die klassische Mechanik an ihre Grenzen,
 - wenn schnell bewegte Körper beteiligt sind (nahe der Lichtgeschwindigkeit), sodass speziell relativistische Effekte berücksichtigt werden müssen und die Begriffe von absolutem Raum und absoluter Zeit ihre Bedeutung verlieren.
 - wenn Teilchen und Kräfte bei atomaren Abständen betrachtet werden und quantenmechanische Abstände betrachtet werden. (genauer: wenn Wirkungen von der Ordnung des Planckschen Wirkungsquantum sind.)
 - wenn sehr große Massen und/oder Energiedichten betrachtet werden und daher der Euklidische Raum durch eine gekrümmte Raumzeit, beschrieben durch die allgemeine Relativitätstheorie ersetzt werden muss.

1.1 Mathematische Vorüberlegungen

Die Mechanik und die zugehörige Mathematik (z. B. Differentialrechnung, Variationsrechnung) haben sich oft parallel entwickelt. Ähnlich soll in dieser Vorlesung die notwendige Mathematik aus der Physik heraus motiviert werden. Vor der Diskussion der NEWTONSchen Mechanik seien daher die Konzepte von Raum und Zeit eingeführt.

Reduzieren wir einen Körper auf einen Massenpunkt (ohne räumliche Ausdehnung), so ist die Position dieses Körpers im Raum durch einen *Punkt* P charakterisiert. Zur Bestimmung der Position von Punkten relativ zueinander benötigen wir *Maßstäbe* \mathbf{s} (z. B. Urmeter, Zollstock, usw.). Maßstäbe verknüpfen einen Anfangs- und einen Endpunkt. Maßstäbe tragen also eine Abstands- und eine Richtungsinformation.

1.1.1 Grundlagen

Maßstäbe können (auch in verschiedene Richtungen zeigend) addiert werden (z. B. durch aneinander kleben von Zollstöcken) und bilden dadurch neue Maßstäbe:

$$\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 = \mathbf{s}. \quad (1.1)$$

Maßstäbe können vervielfacht werden:

$$\mathbf{s} = a \mathbf{s}_1 \text{ mit } a \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

Die Vervielfachung ist distributiv im Faktor a , als auch bezüglich der Maßstäbe, d. h.

$$(a_1 + a_2) \mathbf{s} = a_1 \mathbf{s} + a_2 \mathbf{s}$$

und

$$a(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2) = a\mathbf{s}_1 + a\mathbf{s}_2 \quad (1.3)$$

(was im „Zollstock“-Bild unmittelbar einsichtig ist).

Diese Regeln bedeuten, dass Maßstäbe einen *Vektorraum* über \mathbb{R} bilden. Maßstäbe sind *linear unabhängig*, falls keiner der Maßstäbe als Linearkombination der übrigen Maßstäbe darstellbar ist. In $d = 3$ Dimensionen kann man immer 3 linear unabhängige Maßstäbe finden (mehr als 3 Maßstäbe sind immer linear abhängig).

Ein solches linear unabhängiges Tripel von Maßstäben $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ bildet eine *Basis* des 3-dimensionalen Vektorraums \mathbb{R}^3 , so dass jeder weitere Maßstab darstellbar ist als

$$\mathbf{s} = s_1 \mathbf{e}_1 + s_2 \mathbf{e}_2 + s_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 s_i \mathbf{e}_i \equiv s_i \mathbf{e}_i, \quad (1.4)$$

wobei wir im letztem Schritt die *Einstein Summenkonvention* verwendet haben, nach der über doppelt auftretende Indizes summiert wird.

1.1.2 Längen, Winkel und Skalarprodukt

Von besonderer Bedeutung für die Physik sind Längen- und Winkelmessungen, also die *metrischen* Eigenschaften des Raums. Mathematisch lassen sich diese am besten mit Hilfe des *Skalarproduktes* (inneres Produkt) zweier Maßstäbe beschreiben.

Längenmessungen können allerdings nicht absolut, sondern nur relativ zu einem skalar definierenden Einheitsmaßstab \mathbf{e} durchgeführt werden, welcher per Definition die Länge

$$l(\mathbf{s}) = 1 \quad (1.5)$$

habe. Die Länge $l(\mathbf{s})$ eines Maßstabes \mathbf{s} definieren wir dann operativ durch den Faktor

$$\mathbf{s} =: l \mathbf{e} \quad (1.6)$$

welcher sich ergibt, wenn sichergestellt ist, dass \mathbf{s} und \mathbf{e} in die gleiche Richtung zeigen (parallel sind).

Es gilt dann

$$l(\mathbf{s}) \geq 0. \quad (1.7)$$

Diese Länge wird mathematisch auch als Norm bezeichnet

$$l(\mathbf{s}) = \|\mathbf{s}\| \quad (1.8)$$

(oder auch abkürzend = $|\mathbf{s}|$). Wir definieren das Skalarprodukt zwischen zwei Maßstäben (Vektoren) als Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.9)$$

durch

$$\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 := l_1 l_2 \cos \varphi, \quad (1.10)$$

wobei $l_i = l(\mathbf{s}_i)$ und φ den Winkel zwischen zwei Maßstäben bezeichnet, deren Anfangspunkte zur Deckung gebracht worden sind. Das Skalarprodukt ist eine symmetrische und positive Bilinearform auf dem Vektorraum \mathbb{R}^3 . Aus seiner Definition folgen die Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 &= \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{s}_1 && \text{(symmetrisch)} && (1.11) \\ \mathbf{s} \cdot (a_1 \mathbf{s}_1 + a_2 \mathbf{s}_2) &= a_1 \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}_1 + a_2 \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}_2 && \text{(bilinear)} \\ \mathbf{s} \cdot \mathbf{s} &= l^2(\mathbf{s}) = \|\mathbf{s}\|^2 > 0 && \text{oder} && \mathbf{s} = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{0}$ der Nullvektor (Nullelement unter Addition $\mathbf{s} + \mathbf{0} = \mathbf{s}$) bezeichnet. Ist $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ eine Basis, dann gilt für einen beliebigen Vektor $\mathbf{s} = s_i \mathbf{e}_i$,

$$\|\mathbf{s}\|^2 = \mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = \sum_{ij} s_i s_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \equiv s_i s_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \quad (1.12)$$

1.1.3 Orthonormierte Basen und Kronecker Delta

Bislang haben wir mit Ausnahme der linearen Unabhängigkeit keine weiteren Forderungen an die Basis gestellt. Dies impliziert auch, dass die *Komponenten* s_i abhängig von der Wahl der Basis sind. Von besonderer Bedeutung sind *orthonormierte* Basen mit der Eigenschaft

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.13)$$

und dem Kronecker Symbol

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j. \end{cases} \quad (1.14)$$

Für orthonormierte Basen gilt

$$\|\mathbf{s}\|^2 = \mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = \sum_i s_i^2 \quad (1.15)$$

und die Komponenten sind entsprechend direkt berechenbar:

$$s_i = \hat{e}_i \cdot \mathbf{s} \implies \mathbf{s} = \sum_i (\hat{e}_i \cdot \mathbf{s}) \hat{e}_i. \quad (1.16)$$

Es ergibt sich eine ein-eindeutige Zuordnung zwischen Vektoren und Koordinatentripeln

$$\mathbf{s} \iff \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

1.1.4 Kreuzprodukt

Zwei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ definieren einen weiteren (Pseudo-)Vektor \mathbf{s} durch das bilineare schiefsymmetrische Produkt (Kreuzprodukt, äußeres Produkt)

$$\mathbf{s} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \quad (1.18)$$

was einer Abbildung $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ entspricht.

Das Kreuzprodukt wird definiert durch

1. $\|\mathbf{s}\| = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \phi$
2. Für $\|\mathbf{s}\| \neq 0$ definieren $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{s})$ ein rechtshändiges (positiv orientiertes) Tripel und es gilt $\mathbf{a} \perp \mathbf{s}, \mathbf{b} \perp \mathbf{s}$.

1. legt die Länge und 2. die Richtung des Kreuzproduktes $\mathbf{s} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ eindeutig fest. Rechtshändigkeit bedeutet für eine Basis $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$, dass

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3 \quad \hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = \hat{e}_1 \quad \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = \hat{e}_2. \quad (1.20)$$

Eine orthonormierte rechtshändige Basis heißt auch *kartesisch*. Im Folgenden werden wir mit $\{\hat{e}_i\}$ immer eine kartesische Basis bezeichnen.

Aus der Definition des Kreuzprodukts folgt

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}. \quad (1.21)$$

Mit $\mathbf{a} = a_i \hat{e}_i$ und $\mathbf{b} = b_i \hat{e}_i$ gilt für eine kartesische Basis mit 1.20:

$$\mathbf{s} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \hat{e}_1 - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \hat{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \hat{e}_3. \quad (1.22)$$

Folgende Identitäten gelten:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} & (1.23) \\ \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{0} & \text{(Jacobi)} \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) & \text{(Lagrange)} \end{aligned}$$

1.1.5 Levi-Civita-Symbol

Diese Identitäten lassen sich effizient mit Hilfe des *Levi-Civita-Symbols* nachweisen, ε_{ijk} . Dieses ist definiert durch

$$\begin{aligned} \varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} &= 1 & (1.24) \\ \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} &= -1 \\ \varepsilon_{ijk} &= 0 & \text{sonst.} \end{aligned}$$

D. h. ε_{ijk} ist total antisymmetrisch in allen Indizes, = 1 für gerade Permutationen von (1, 2, 3) und = -1 für ungerade Permutationen.

Es folgt z. B., dass $\varepsilon_{iij} = \varepsilon_{iji} = \varepsilon_{jii} = 0$.

Besonders nützlich ist folgende Identität:

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} \quad (1.25)$$

die sich für alle $j, k, l, m = 1, 2, 3$ durch indirektes Nachrechnen verifizieren lässt.

Mit Hilfe von ε_{ijk} gilt für das Kreuzprodukt Komponentenweise

$$s_i = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k. \quad (1.26)$$

1.1.6 Weitere Vektoroperationen

Schließlich definieren wir das Spatprodukt dreier Vektoren ($\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$):

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \varepsilon_{ijk} a_j b_k c_i = \varepsilon_{jki} a_j b_k c_i = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k \quad (1.27)$$

(im 2. Schritt haben wir die Permutationssymmetrie von ε_{ijk} , im 3. Schritt die Summationsindizes umbenannt $j \rightarrow i$, $k \rightarrow j$ und $i \rightarrow k$).

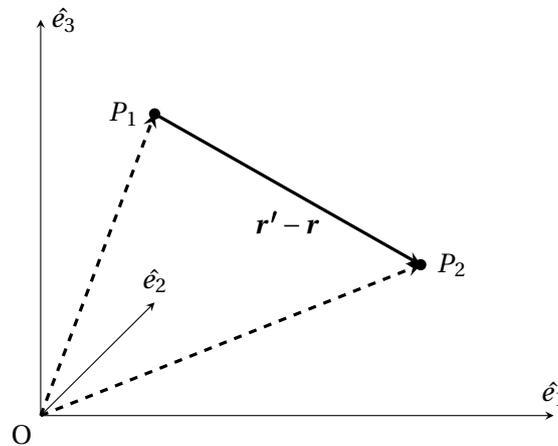
Die zuvor durchgeführten Definitionen von Maßstäben (Vektoren) und ihren Eigenschaften erlaubt es uns nun auch eine Vermessung von Punkten und ihren Abständen. Sei O ein fester Raumpunkt („Ursprung“) und P ein beliebiger weiterer Punkt. Dann heißt der Maßstab der von O nach P zeigt

$$\mathbf{r}(P) = \overrightarrow{OP} \quad (1.28)$$

Ortsvektor von P . Bezüglich der kartesischen Basis $\{\hat{e}_i\}$ sind die Komponenten $\{x_1, x_2, x_3\}$

$$\mathbf{r}(P) = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3 \quad (1.29)$$

die kartesischen Koordinaten von P bezüglich O und $\{\hat{e}_i\}$. Der Abstand zwischen O und P ist gleich der Länge des Vektors \mathbf{r} : $\|\mathbf{r}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ (Wir werden im Folgenden auch oft die Bezeichnung $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x, y, z)$ verwenden).



Entsprechend ist der Abstand zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 mit

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(P_1) &= \overrightarrow{OP_1} = x_i \hat{e}_i \\ \mathbf{r}'(P_2) &= \overrightarrow{OP_2} = x'_i \hat{e}_i \end{aligned}$$

gegeben durch

$$\|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\| = \left[\sum_{i=1}^3 (x'_i - x_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (1.30)$$

Es ist anschaulich klar, dass dieser Abstand sowohl unabhängig von der Wahl des Ursprungs O ist als auch unabhängig von der Ausrichtung und Orientierung der Basis $\{\hat{e}_i\}$. Damit ist der hier beschriebene Vektorraum (*Euklidischer Raum*) *homogen* und *isotrop*.

1.1.7 Physikalische Folgerungen

Die Eigenschaften des Raumes sind implizite Grundannahmen hinter dem NEWTON'schen Axiomensystem der Mechanik. Physikalisch ausgedrückt: ein Experiment in einem abgeschlossenen System führt immer zum gleichen Resultat, unabhängig davon wo das System sich befindet und wie es orientiert ist.

Eine gleiche Grundannahme der Homogenität gilt für die Zeit. Experimente im abgeschlossenen System bei gleichen Anfangsbedingungen sollen unabhängig davon sein, wann das Experiment durchgeführt wird.

Dadurch wurden bereits einige *Invarianzeigenschaften* der klassischen Mechanik deutlich. Abgeschlossenen Systeme der klassischen Mechanik sind *invariant* unter:

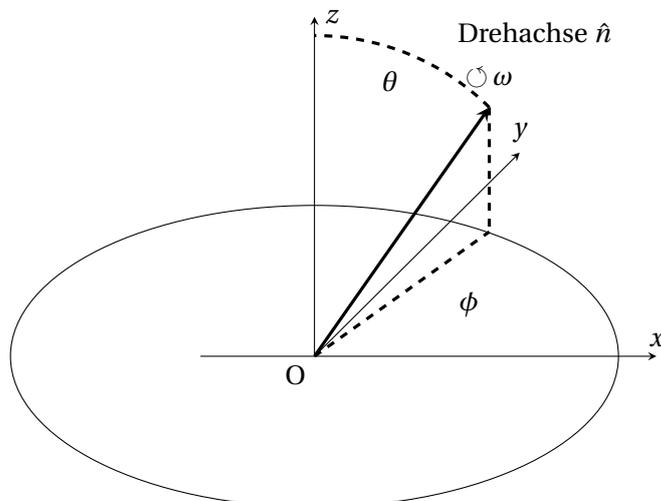
- Zeitverschiebung
- Raumtranslationen
- Raumdrehungen

Zeit- und Raumtranslationen bilden zusammen eine 4-parametrische Schar von Invarianzen

$$t \rightarrow t + t_a, \quad t_a = \text{const.} \quad (1.31)$$

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \text{const.} \quad (1.32)$$

Raumdrehungen bilden eine weitere 3-parametrische Schar. Dies sieht man z. B. an folgender Parametrisierung:



Die Drehachse in Richtung \hat{n} wird durch 2 Winkel parametrisiert: den *Polarwinkel* θ zwischen Drehachse und z-Achse und dem *Azimutalwinkel* ϕ , gegeben durch den Winkel zwischen x-Achse und der Projektion der Drehachse auf die xy-Ebene.

Der dritte Parameter ist gegeben durch den eigentlichen Drehwinkel ω .

Translationen und Drehungen bilden also eine 7-parametrische Schar von Symmetrietransformationen der klassischen Mechanik. Wir werden im Folgendem zeigen, dass es noch eine weitere 3-parametrische Schar gibt. Die sich dann ergebende 10-parametrische Schar von Symmetrietransformationen heißen auch *Galilei-Transformationen*.

2 Newtonsche Mechanik

2.1 Newtonsche Gesetze

Die Diskussion der NEWTONSchen Gesetze in der Literatur ist sehr vielfältig. Das mag daran liegen, dass es in der Tat verschiedene aber jeweils konsistente Betrachtungsweisen gibt, was an NEWTONS Axiomen Definition und was tatsächlich ein physikalisches Gesetz ist. Wir werden uns hier auf eine konsistente Sichtweise beschränken.

2.1.1 Lex Prima (Trägheitsgesetz)

Jeder Körper beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

Das erste NEWTONSche Gesetz benutzt zwar schon den Begriff der Kraft, definiert diese aber nicht. Zudem besagt es nicht bezüglich welches System der Zustand der Ruhe oder Bewegung gemessen werden soll.

Wir interpretieren daher das Lex Prima als eine *Definition von* speziellen Systemen, den *Inertialsystemen*, die dadurch charakterisiert sind, dass Körper ohne Krafteinwirkungen in ihnen ruhen oder sich gleichförmig geradlinig bewegen. Alle folgenden Gesetze werden also bezogen auf Inertialsysteme (in allen anderen System, z. B. rotierenden Systemen, können die Gesetze eine andere Form haben).

Aus dem Lex Prima folgt noch eine weitere Invarianzeigenschaft der klassischen Mechanik: hat man ein Inertialsystem gefunden, erhält man weitere Inertialsysteme durch all jene Systeme, die sich relativ zum ersten gleichförmig geradlinig bewegen. Dann auch in diesem (relativ zum ersten) bewegten Systemen sind kräftefreie Körper in Ruhe oder bewegen sich gleichförmig geradlinig. Dies ist das *klassische* Relativitätsprinzip. Daraus folgt eine 3-parametrische Schar von Symmetrietransformationen, den „Galilei-Boosts“:

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{v}t, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \text{const.}, \quad (2.1)$$

wobei \mathbf{v} die vektorielle Relativgeschwindigkeit zwischen den Systemen ist.

2.1.2 Lex Secunda (Bewegungsgesetz)

Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.

Für die „Änderung der Bewegung“ (NEWTON: mutatio motus) benötigen wir zunächst eine geeignete Bestimmungsgröße. NEWTON definiert dafür (an anderer Stelle) die Änderung des Impulses \mathbf{p} , wobei für einen Massepunkt mit Masse m gilt:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \quad (2.2)$$

Hierbei ist die Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ gegeben durch die Zeitableitung der Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}. \quad (2.3)$$

Lex Secunda spricht man nun von einer *Proportionalität* zwischen der Änderungen des Impulses, also $\frac{d}{dt}\mathbf{p}(t)$ und der Kraft \mathbf{F} (im vektoriellen Sinne). Da der Kraftbegriff hier zum ersten mal in einem Quantitativen Zusammenhang auftritt, interpretieren wir das Lex Secunda als *Definition* der Kraft. Wegen dieses Definitionscharakters dürfen wir die irrelevante Proportionalitätskonstante = 1 setzen und erhalten

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}(t) = \mathbf{F} \quad (2.4)$$

bzw. für einen Massepunkt

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}(t) = \mathbf{F}.$$

Obwohl wir dieser Lesart die ersten beiden Gesetze nur Definitionen sind, werden wir in der Praxis (2.4a) oft als Gesetz praktisch verwenden. Ist nämlich die Kraft \mathbf{F} gegeben, so bestimmt sie zusammen mit den Anfangsbedingungen für die Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ die gesamte Bewegung.

Im Gegensatz zum Definitionscharakter der ersten beiden NEWTONSche Gesetze ist das dritte Gesetz wirklich physikalisches Gesetz:

2.1.3 Lex Tertia (Reaktionsgesetz) ²

Die Kräfte zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung (actio = reactio).

Aus dem Lex Tertia können wir eine praktisch verwendbare Definitionen der Masse ableiten. Für die Kräfte, die zwei isolierte Körper aufeinander ausüben gilt

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 \quad (2.5)$$

und damit gemäß Lex Secunda

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = -\frac{d\mathbf{p}_2}{dt}. \quad (2.6)$$

²Die nun folgende Verwendung des Lex Tertia ist eigentlich auf Zentralkräfte beschränkt. Nicht-Zentralkräfte wie z. B. die geschwindigkeitabhängige Lorentzkraft, bedürfen einer separaten Diskussion.

Für Massepunkte folgt

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = -m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt}.$$

Definieren wir nun die Beschleunigung als

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad (2.7)$$

gilt $m_1 \mathbf{a}_1 = -m_2 \mathbf{a}_2$, bzw. für die Beträge $a_i = |\mathbf{a}_i|$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}. \quad (2.8)$$

Nach Wahl einer Einheitsmasse, z. B. m_2 , können wir aus der Messung der Beschleunigungen (mit Maßstäben und Uhren) die Masse m_1 bestimmen.

Verwenden wir nun den Massepunkt m_2 , um durch Vermessung seiner Bewegung unter einer unbekanntem Kraft \mathbf{F} diese Kraft zu bestimmen, so können wir nun aus (2.8) m_1 bestimmen und mit Lex secunda die Bahnkurve von m_1 voraussagen.

Eine üblichere Methode Massen zu bestimmen ist das Wiegen. Diese Methode benützt die Tatsache, dass das Gewicht eines Körpers im Gravitationsfeld genau der *Schwerkraft* entspricht, die auf den Körper wirkt. Lex secunda schreibt sich dann

$$\mathbf{F}_G = m\mathbf{g} \quad (2.9)$$

wobei \mathbf{g} die durch die Gravitation verursachte Erdbeschleunigung ist (die sich mit Maßstäben und Uhren messen lässt).

Wichtig ist, hier festzuhalten, dass es keinen offensichtlichen Grund in der klassischen Mechanik gibt, warum die Proportionalitätskonstante m zwischen \mathbf{F}_a und \mathbf{g} genau der trägen Masse m entspricht, mit der sich ein Massenpunkt der Bewegungsänderung unter einer äußeren (nicht-gravitativen) Kraft gemäß $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ „widersetzt“.

Diese Proportionalitätskonstante, auch schwere Masse genannt, könnte – im Prinzip – einen anderen Wert im Rahmen der klassischen Mechanik annehmen.

Die Gleichheit von schwerer und träger Masse ist experimentell bereits früh überprüft und heute auf $1 : 10^{12}$ genau bestätigt.

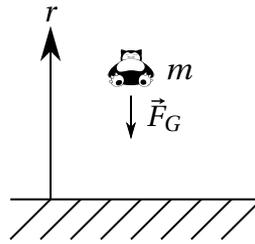
Im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie (ART) wird die exakte Gleichheit zum Prinzip erhoben (Äquivalenzprinzip).

2.1.4 Beispiel: freier Fall aus geringer Höhe (1D)

Wir betrachten die vertikale Bewegung eines Massepunkts unter dem Einfluss der Schwerkraft $\mathbf{F}_G = m\mathbf{g}$.

Für geringe Höhen im Vergleich zum Erdradius, $r \ll R_E$, gilt näherungsweise

$$\mathbf{g} = -g\hat{e}_x \quad \text{mit } g \approx 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{const.} \quad (2.10)$$



Die Bewegungsgleichung im \hat{e}_r -Richtung lautet

$$m\ddot{r} = -mg \Rightarrow \ddot{r} = -g = \text{const.} \quad (2.11)$$

1. Integration

$$v = \dot{r} = -gt + C_1 \quad (2.12)$$

Die Integrationskonstante C_1 hat offensichtlich die Bedeutung einer Anfangsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$,

$$v(t = 0) = C_1 \equiv v_0. \quad (2.13)$$

2. Integration

$$r = -\frac{g}{2}t^2 + v_0t + C_2 \quad (2.14)$$

Die zweite Integrationskonstante ist die Anfangshöhe zum Zeitpunkt $t = 0$

$$h = r(t = 0) = C_2, \quad (2.15)$$

wird z. B. der Massepunkt bei $t = 0$ in der Höhe h losgelassen ($v_0 = 0$), lautet die Lösung

$$r(t) = h - \frac{g}{2}t^2 \quad (2.16)$$

Die Fallzeit bis $r = 0$ beträgt

$$t_{Fall} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (2.17)$$

Die Geschwindigkeit bei Aufschlag ist

$$v_{Fall} = -gt_{Fall} = -\sqrt{2gh}. \quad (2.18)$$

(Das Minuszeichen bedeutet, dass die Geschwindigkeit hin zu abnehmenden r -Werten gerichtet ist.)

[Ein Sprung vom 10 Meter-Turm dauert $t_{Fall} \approx 1.4\text{s}$. Die Geschwindigkeit an der Wasseroberfläche ist dann $v_{Fall} \approx -14 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ($\approx -50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$)]

Allgemein halten wir fest: da die Bewegungsgleichung eine Differenzialgleichung 2. Ordnung ist, werden zu ihrer vollständiger Lösung 2 Integrationskonstanten benötigt; in diesem Fall: Anfangsort und Anfangsgeschwindigkeit.

2.2 Schwingungen

2.2.1 Freie Schwingungen in einer Dimension

Ein Körper ist im Gleichgewicht, wenn er sich nicht beschleunigt bewegt, $\ddot{x} = 0$; also keine (Netto-)Kraft auf ihn wirkt. (NB: Verschwindende Geschwindigkeit $\dot{x} = 0$ zu fordern, ist nicht notwendig, da man mit einem Galilei-Boost immer in das Ruhesystem des Körpers transformieren kann; dort gilt per definitionem $\dot{x} = 0$ im Gleichgewicht)

Bei kleinen Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage x_0 kann die Kraft in eine Taylor-Reihe entwickelt werden,

$$F(x) = F(x_0) + \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2F}{dx^2} \right|_{x_0} (x - x_0)^2 + \dots \quad (2.19)$$

Nach Voraussetzung verschwindet $F(x_0) = 0$. Wenn $\left. \frac{dF(x_0)}{dx} \right|_{x_0} > 0$, ist $\ddot{x} > 0$ für $(x - x_0) > 0$ und $\ddot{x} < 0$ für $(x - x_0) < 0$, d. h. der Körper entfernt sich von der Gleichgewichtsposition (*labiles* Gleichgewicht).

Für $\left. \frac{dF(x_0)}{dx} \right|_{x_0} < 0$ hingegen wird der Körper wieder zu x_0 hin beschleunigt (stabiles Gleichgewicht).

Hier haben wir angenommen, dass die höheren Terme $\sim \frac{d^2F}{dx^2}$ etc. vernachlässigbar sind. Dies lässt sich durch die Wahl hinreichend kleiner Werte $(x - x_0)$ für Taylor-entwickelbare Kräfte immer erreichen. Setzen wir im Fall des stabilen Gleichgewichts

$$\left. \frac{dF(x_0)}{dx} \right|_{x_0} =: -k, \quad k > 0 \quad (2.20)$$

dann lautet die Kraft für kleine Auslenkungen vom Gleichgewicht x_0

$$F(x) = -k(x - x_0). \quad (2.21)$$

Dieses HOOK'sche Gesetz ist also ein sehr generischer Fall für Kräfte auf Massepunkte in der Nähe von stabilen Gleichgewichtspositionen. Wählen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit (o. B. d. A.) $x_0 = 0$, ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = -kx \quad (2.22a)$$

oder

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.22b)$$

(Bewegungsgleichung des *harmonischen Oszillators*).

Es handelt sich um eine Differenzialgleichung 2. Ordnung die zwei linear unabhängige Lösungen $x_1(t)$, $x_2(t)$ besitzt. (NB: $x_1(t)$ und $x_2(t)$ sind linear unabhängig, wenn

$$\lambda_1 + x_1(t) + \lambda_2 x_2(t) = 0$$

für alle t nur durch $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$ erfüllt werden kann.)

Die allgemeine Lösung ist dann eine Linearkombination

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t), \quad (2.23)$$

wobei die Konstanten c_1 und c_2 durch Anfangsbedingungen bestimmt werden können. Linear unabhängige Lösungen von (2.22) sind

$$x_1(t) = \sin \omega_0 t, \quad x_2(t) = \cos \omega_0 t. \quad (2.24)$$

Für die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} x(t=0) &= x_0 \\ \dot{x}(t=0) &= v_0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

lautet dann die Lösung

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + x_0 \cos \omega_0 t. \quad (2.26)$$

Eine weitere nützliche Form der Lösung ergibt sich mit $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ zu

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t - \delta_0) \quad (2.27)$$

mit der *Amplitude* $A_0 = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \geq 0$ und

$$\tan \delta_0 = \frac{v_0}{x_0 \omega_0}, \quad 0 \leq \delta_0 < 2\pi. \quad (2.28)$$

Die Lösung beschreibt eine *harmonische* Schwingung mit *Kreisfrequenz* ω_0 (und Frequenz $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$) und Schwingungsperiode

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (2.29)$$

Die Schwingungsfrequenz ist insbesondere unabhängig von der anfänglichen Auslenkung oder der Anfangsgeschwindigkeit.

Der Bewegungszustand des eindimensionalen harmonischen Oszillators ist wie oben beschrieben durch die Angaben von Ort $x(t)$ und Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ zu einem Zeitpunkt t vollständig spezifiziert. Es ist nützlich, die Größen $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ als Koordinaten einer Ebene, dem *Phasenraum*³ zu betrachten. Mit fortschreitender Zeit t bewegt sich der Punkt $(x(t), \dot{x}(t))$ im Phasenraum und bildet dadurch eine *Phasenraumtrajektorie*. Die Menge aller möglichen Trajektorien bilden das *Phasendiagramm* des Systems. Aus (2.27) folgt

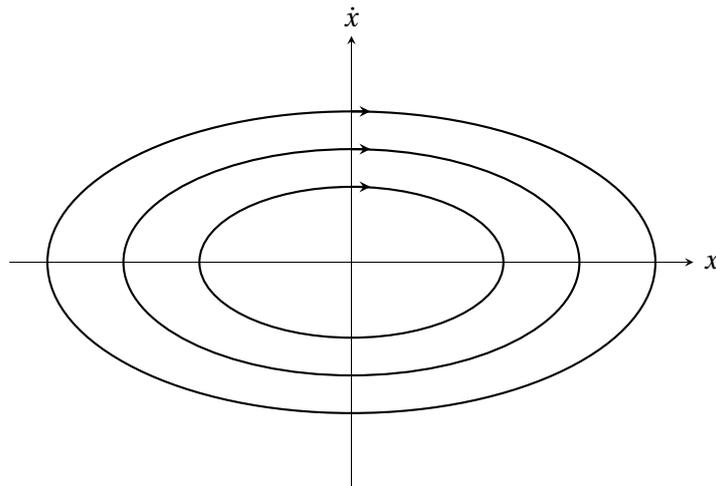
$$\dot{x}(t) = -A_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t - \delta_0).$$

Daraus folgt

$$\frac{x^2(t)}{A_0^2} + \frac{\dot{x}^2(t)}{A_0^2 \omega_0^2} = 1 \quad (2.30)$$

Diese Gleichung entspricht einer Ellipsengleichung in der (x, \dot{x}) -Ebene mit Halbachsen A_0 und $A_0 \omega_0$.

³Üblicherweise wählt man Ort $x(t)$ und Impuls $p(t)$; letzterer ist für Massepunkte wegen $p(t) = m\dot{x}(t)$ trivialeweise mit $\dot{x}(t)$ verknüpft.



Zwei Trajektorien können sich nicht schneiden. Gäbe es einen Schnittpunkt, entspräche dies einer Anfangsbedingung die zwei verschiedene Zeitentwicklungen zuließe. Da aber die Lösung der Differentialgleichung *eindeutig* ist, können sich die Phasenraumtrajektorien nicht schneiden.

2.2.2 Gedämpfte Schwingungen

Eine (phänomenologisch begründete) Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit

$$F_R = -b\dot{x} \quad (b > 0) \quad (2.31)$$

führt zur Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0. \quad (2.32)$$

Zur vereinfachten Lösung betrachten wir die Gleichung im Komplexen:

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = 0 \quad \text{mit } z \in \mathbb{C}. \quad (2.33)$$

Da (2.33) linear in z ist, ist mit z auch $x_1(t) = \operatorname{Re} z(t)$ und $x_2(t) = \operatorname{Im} z(t)$ jeweils eine Lösung von (2.32). Mit dem Ansatz $z(t) = e^{i\omega t}$ ergibt sich

$$(-m\omega^2 + i\omega b + k)e^{i\omega t} = 0. \quad (2.34)$$

Da (2.34) für beliebige t gelten muss, muss der Term in den Klammern verschwinden:

$$-m\omega^2 + i\omega b + m\omega_0^2 = 0 \quad (2.35)$$

(wobei wieder $\omega^2 = \frac{k}{m}$ gilt).

Der Ansatz leitet also die komplexe Bewegungsgleichung für

$$\omega_{1,2} = i\lambda \pm \varpi \quad (2.36)$$

mit $\lambda = \frac{b}{2m}$, $\varpi = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

Im Folgenden unterscheiden wir die Fälle $\omega_0 \gtrless \lambda$:

Schwache Dämpfung: Für $\lambda < \omega_0$ gilt $\varpi \in \mathbb{R}^+$. Wir erhalten die beiden unabhängigen Lösungen

$$\begin{aligned}x_1(t) &= e^{-\lambda t} \cos \varpi t \\x_2(t) &= e^{-\lambda t} \sin \varpi t\end{aligned}\quad (2.37)$$

und damit die allgemeine Lösung

$$x(t) = e^{-\lambda t} (C_1 \sin \varpi t + C_2 \cos \varpi t) \quad (2.38)$$

bzw. in der Form

$$x(t) = \overline{A_0} e^{-\lambda t} \cos(\varpi - \overline{\delta_0}) \quad (2.39)$$

wobei $\overline{A_0}$ und $\overline{\delta_0}$ analog zum ungedämpften Fall definiert sind. (NB: an Stelle von Anfangsort x_0 und Anfangsgeschwindigkeit v_0 , die C_1 und C_2 in (2.38) festlegen, kann man die Lösung auch durch Wahl von $\overline{A_0}$ und $\overline{\delta_0}$ bestimmen.)

Im Vergleich zur ungedämpften Schwingung finden wir eine verringerte Kreisfrequenz

$$\varpi \leq \omega_0$$

und eine exponentiell gedämpfte Amplitude $\sim \overline{A_0} e^{-\lambda t}$.

Starke Dämpfung: Für $\lambda < \omega_0$ schreiben wir $\varpi = i\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$. Die allgemeine Lösung lautet dann

$$x(t) = C_1 e^{-(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t} \quad (2.40)$$

und ist nicht mehr oszillatorisch.

Kritische Dämpfung: Bei der Konstruktion der Lösung für den Fall $\lambda = \omega_0$, d. h. $\varpi \rightarrow 0$, ergibt sich eine Subtilität, da in (2.37) nur noch die Lösung $x_1(t) = e^{-\lambda t}$ übrig zu bleiben scheint. Um die 2. linear unabhängige Lösung zu finden, muss der Grenzprozess $\varpi \rightarrow 0$ vorsichtiger durchgeführt werden. Betrachten wir dazu die allgemeine Lösung (2.38) für schwache Dämpfung für den Fall $x(x=0) = 0$, also $C_2 = 0$:

$$x(t) = e^{-\lambda t} C_1 \sin \varpi t. \quad (2.41)$$

Wegen $\dot{x}(t=0) = C_1 \varpi$ ist C_1 mit der Anfangsgeschwindigkeit verknüpft,

$$C_1 = \frac{v_0}{\varpi}, \quad (2.42)$$

also

$$x(t) = e^{-\lambda t} \frac{v_0}{\varpi} \sin \varpi t. \quad (2.43)$$

Im Limes kritischer Dämpfung $\lambda \rightarrow \omega_0$, $\varpi \rightarrow 0$, finden wir nach de l'Hospital:

$$\lim_{\varpi \rightarrow 0} x(t) = e^{-\lambda t} v_0 t \lim_{\varpi \rightarrow 0} \frac{\sin \varpi}{\varpi} = e^{-\lambda t} v_0 t \quad (2.44)$$

und damit eine zweite linear unabhängige Lösung

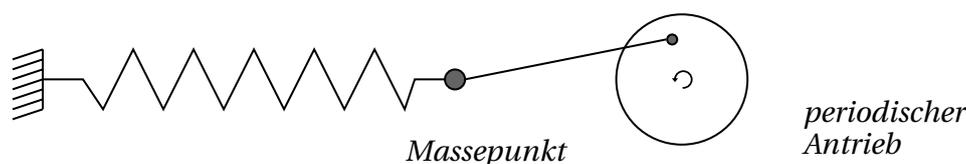
$$x_2(t) = te^{-\lambda t}. \quad (2.45)$$

Die allgemeine Lösung für den Fall kritischer Dämpfung lautet damit

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\lambda t}. \quad (2.46)$$

Dies ist der sogenannte „aperiodische Grenzfall“.

2.2.3 Erzwungene Schwingungen



Auf einen Massepunkt wirke von außen eine periodische Kraft

$$F_e = c \cos \omega t. \quad (2.47)$$

Die Bewegungsgleichung lautet dann

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = c \cos \omega t \quad (2.48)$$

Zur Suche nach einer Lösung betrachten wir die komplexifizierte Gleichung

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = ce^{i\omega t} \quad (2.49)$$

mit $z(t) \in \mathbb{C}$, woraus sich über $x(t) := \operatorname{Re} z(t)$ die Lösung von (2.48) ergibt. (Alle Konstanten m, b, k, c seien reell.)

Nach der Theorie der Differentialgleichungen ergibt sich die allgemeine Lösung aus der Summe einer *partikulären* Lösung der inhomogenen (d. h. $F_e \neq 0$) Gleichung und der allgemeinen Lösung der homogenen ($F_e = 0$) Gleichung. Letztere ist uns bereits bekannt (vgl. (2.36), (2.37)):

$$z_h(t) = e^{-\lambda t} e^{\pm i\omega t} \quad (2.50)$$

$$\text{mit } \lambda = \frac{b}{2m}, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \quad \text{für } \lambda < \omega_0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Für die partikuläre Lösung probieren wir den Ansatz

$$\begin{aligned} z_p(t) &= z_0 e^{i\omega t} \\ \Rightarrow (-m\omega^2 + ib\omega + k)z_0 &= c \end{aligned} \quad (2.51)$$

mit der Lösung

$$z_0 = \frac{\frac{c}{m}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\omega\lambda} = \frac{\frac{c}{m} [(\omega_0^2 - \omega) - 2i\omega\lambda]}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\lambda^2}. \quad (2.52)$$

Diese lässt sich auch in der Form

$$z_0 = Ae^{-\delta}$$

darstellen. Mit der Annahme (o. B. d. A.), dass $c \geq 0$, folgt

$$A = \frac{\frac{c}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \lambda^2}} \geq 0 \quad (2.53)$$

und

$$\tan \delta = \frac{2\omega\lambda}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (2.54)$$

mit $0 \leq \delta \leq \pi$ wegen $\lambda \geq 0$.

Damit erhalten wir die partikuläre Lösung

$$x_p(t) = A \cos(\omega t - \delta) \quad (2.55)$$

und mit (2.50) die allgemeine Lösung

$$x(t) = A \cos(\omega t - \delta) + \bar{A} e^{-\lambda t} \cos(\omega t - \bar{\delta}) \quad (2.56)$$

Während A und δ durch (2.53) und (2.54) bereits festgelegt sind, können \bar{A} und $\bar{\delta}$ noch zur Erfüllung der Anfangsbedingungen angepasst werden.

Da die homogene Lösung mit $e^{-\lambda t}$ abfällt, spielt sie nur während des *Einschwingvorgangs* in der Zeit $t < \frac{1}{\lambda}$ eine Rolle.

Für spätere Zeiten schwingt der Oszillator mit der Frequenz ω der äußeren Kraft, jedoch mit verschobener Phase δ (*Phasenverschiebung*).

Für $\omega = \omega_0$ ist $\delta = \frac{\pi}{2}$, vgl. (2.54).

Die Amplitude A zeigt als Funktion von ω *Resonanzverhalten*. D. h. sie erreicht ein Maximum für

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} \quad (\text{für } \omega_0^2 > 2\lambda^2) \quad (2.57)$$

mit dem Wert

$$A_{max}(\omega = \omega_R) = \frac{\frac{c}{m}}{2\lambda \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}. \quad (2.58)$$

Ohne Dämpfung $\lambda \rightarrow 0$ könnte die Amplitude unbeschränkt wachsen (Resonanzkatastrophe). Selbst für kleine Amplituden c der äußeren Kraft, d. h. c klein aber endlich, kann die Amplitude des Oszillators an der Resonanzfrequenz ω_R sehr groß werden, wenn die Dämpfung λ hinreichend klein ist.

Eine wichtige Kenngröße der Resonanz ist ihre *Halbwertsbreite*, die definiert ist durch die Bedingung

$$A^2(\omega) = \frac{1}{2} A_{max}^2. \quad (2.59)$$

Diese Bedingung ist erfüllt für die Frequenzen

$$\omega_{1/2}^2 = \omega_R^2 \pm 2\lambda \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}. \quad (2.60)$$

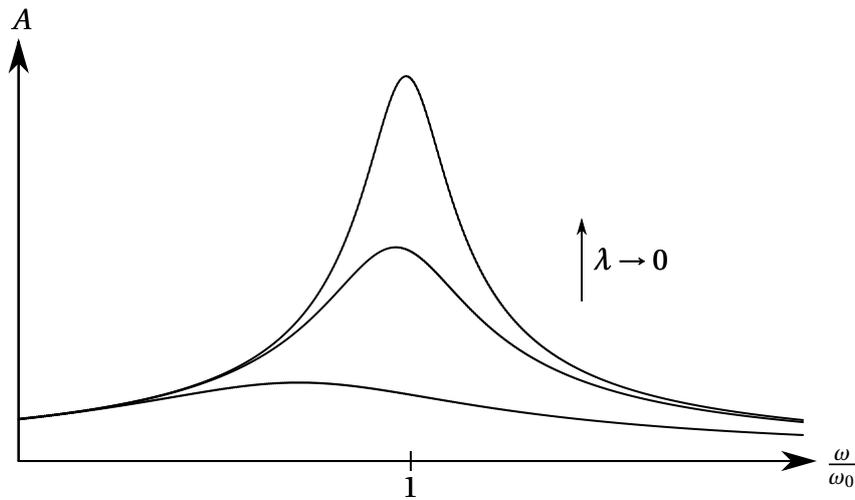
Im Limes schwacher Dämpfung $\lambda \ll \omega_0$ vereinfachen sich diese Beziehungen zu

$$(2.57) \quad \omega_R \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\lambda^2}{\omega^2} \right) \approx \omega_0 \quad (2.61)$$

$$(2.60) \quad \omega_{1,2} \approx \omega_0 \pm \lambda. \quad (2.62)$$

Die Halbwertsbreite Γ bestimmt sich nun durch den Frequenzabstand zwischen ω_1 und ω_2 ,

$$\Gamma = 2\lambda \quad (\text{für } \lambda \ll \omega_0). \quad (2.63)$$



2.3 Erhaltungssätze

Wichtige Konsequenzen der NEWTON'schen Gesetze sind eine Reihe von Erhaltungssätzen. Ihre experimentelle Überprüfung liefert dann einen wichtigen Test der NEWTON'schen Mechanik. Falls ein Teilchen keine Kraft erfährt, reduziert sich das zweite NEWTON'sche Gesetz auf

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p} = 0. \quad (2.64)$$

D. h. der Gesamtimpuls \mathbf{p} eines Teilchens ist zeitlich erhalten, wenn die gesamten auf es wirkenden Kräfte verschwinden. Als Vektorgleichung bezieht sich der Erhaltungssatz auf alle Komponenten des Impulses.

Selbst in Anwesenheit von Kräften können Impulskomponenten erhalten sein: Sei \mathbf{F} eine gegebene Kraft. Falls es einen konstanten Vektor \mathbf{s} gibt, der auf \mathbf{F} senkrecht steht,

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = 0,$$

so folgt

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p} \cdot \mathbf{s} = 0 \implies \mathbf{p} \cdot \mathbf{s} = \text{const.} \quad (2.65)$$

d. h. die Impulskomponenten senkrecht zur Kraftrichtung sind zeitlich erhalten.

Ein zweiter Erhaltungssatz bezieht sich auf den *Drehimpuls* eines Teilchens bei Position \mathbf{r} bezüglich eines Ursprungs O :

$$\mathbf{L} := \mathbf{r} \times \mathbf{p}. \quad (2.66)$$

(NB: Der Drehimpuls eines Teilchens ist somit keine rein intrinsische Größe, sondern abhängig von der Wahl des Ursprungs. Der folgende Impulserhaltungssatz bleibt davon unberührt.)

Wir definieren des Weiteren das *Drehmoment* \mathbf{N} bezüglich des gleichen Ursprungs durch

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \stackrel{\text{Newton II}}{=} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} \quad (2.67)$$

Nun gilt mit $\dot{\mathbf{p}} = m\mathbf{v} = m\dot{\mathbf{r}}$ für einen Massenpunkt:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \underbrace{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}}_{=m\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}=0} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} \\ &\implies \dot{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{N} \end{aligned} \quad (2.68)$$

Damit ist der Drehimpuls eines Teilchens zeitlich erhalten, falls auf es kein Drehmoment wirkt.

Für den nächsten Erhaltungssatz führen wir den Begriff der *Arbeit* ein. Wirkt eine Kraft \mathbf{F} auf ein Teilchen, um es aus einem Punkt 1 zu einem Punkt 2 zu bewegen, so wird folgende Arbeit verrichtet:

$$W_{21} := \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (2.69)$$

Im Prinzip ist in (2.69) der Weg zu spezifizieren, über den das Teilchen von 1 nach 2 bewegt wird. Wir zeigen nun, dass die Arbeit für einen Massepunkt, der dem 2. NEWTON'schen Gesetz genügt, wegunabhängig ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt \\ &= \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) dt = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} v^2 dt = d\left(\frac{1}{2} m v^2\right) \end{aligned} \quad (2.70)$$

Der Integrand in 2.69 ist somit eine totale Ableitung (exaktes Differential).

Damit folgt für die Arbeit

$$W_{21} = \left(\frac{1}{2} m v^2\right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) =: T_2 - T_1. \quad (2.71)$$

Hier haben wir die *kinetische Energie* eines Teilchens definiert,

$$T = \frac{1}{2} m v^2. \quad (2.72)$$

Falls z. B. $W_{21} < 0$ verrichtet das Teilchen Arbeit. Als Folge reduziert sich dessen kinetische Energie. Wichtig bei der Definition von W_{21} ist, dass \mathbf{F} die Gesamtkraft auf ein Teilchen bezeichnet.) Am einfachen Beispiel wird nun intuitiv klar, dass das Konzept von kinetischer Arbeit alleine nicht ausreicht, um die Fähigkeit eines Teilchens Arbeit zu verrichten zu beschreiben: so kann z. B. ein Wasserteilchen in einem höheren Becken anfänglich in Ruhe sein, d. h. T_1 , ein Mühlrad auf seinem Weg in ein tieferes Becken antreiben, und anschließend wieder ruhen $T_2 = 0$.

Diese „Fähigkeit“ eines Teilchens, Arbeit verrichten zu können, lässt sich mit dem Begriff der *potentiellen Energie* erfassen. Wir definieren die potentielle Energie eines Teilchens mit Hilfe der Arbeit, die benötigt wird um ein Teilchen von Punkt 1 nach Punkt 2 zu bewegen, *ohne* dass sich die kinetische Energie ändert:

$$\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} =: U_1 - U_2 \quad (\Delta T = 0). \quad (2.73)$$

Für $\Delta T = 0$ ist die Arbeit daher äquivalent zur Differenz der potentiellen Energie. Während (2.73) für jede beliebige Kraft eine Potentialdifferenz definiert, lässt sich im Allgemeinen nicht jede Kraft \mathbf{F} aus einem Potential U herleiten. Diejenigen Kräfte, für die dies möglich ist, heißen *konservative* Kräfte. Sie spielen in der Physik eine wichtige Rolle. Die Gleichung (2.73) lässt sich mit folgendem Ansatz reproduzieren:

$$\text{konservative Kraft: } \mathbf{F} = -\vec{\nabla} U, \quad (2.74)$$

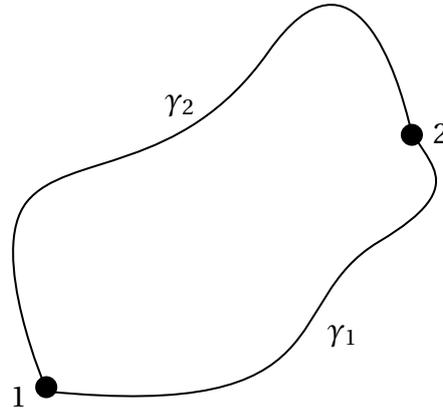
d. h. konservative Kräfte ergeben sich als Gradientenfelder einer skalaren Funktion $U(\mathbf{r})$ (oder $U(\mathbf{r}, t)$). Denn daraus folgt

$$\begin{aligned} \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= - \int_1^2 (\vec{\nabla} U) \cdot d\mathbf{r} = - \int_1^2 \sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} dx_i \\ &= - \int_1^2 dU = U_1 - U_2 \quad (\text{vgl. (2.73)}). \end{aligned} \quad (2.75)$$

Eine *notwendige* und *hinreichende* Bedingung, dass \mathbf{F} konservativ ist und durch (2.74) dargestellt werden kann, ist

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{F} = 0 \quad (2.76)$$

Die Notwendigkeit ergibt sich aus der Identität, dass $-\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \cdot U = 0$ (für hinreichend glatte U). Die Bedingung (2.75) gewährleistet, dass in (2.73) eine Pfad unabhängige Funktion U gewählt werden kann. Betrachten wir dazu zwei verschiedene Pfade γ_1 und γ_2 von 1 nach 2:



Für den Fall, dass $\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ pfadabhängig ist, d. h. $\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, wäre auch die in (2.73) definierte Potentialdifferenz $U_1 - U_2$ pfadabhängig, und damit eine eindeutige Definition von $U(x)$ nicht möglich. Umgekehrt definiert (2.73) eine eindeutige Potentialdifferenz, wenn $\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ pfadunabhängig ist. Zu zeigen ist also

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma_1}^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\gamma_2}^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1}^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{-\gamma_2}^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (2.77)$$

wobei $(-\gamma_2)$ den Pfad $-\gamma_2$ mit entgegengesetztem Durchlaufsinne bedeutet, und $\gamma = \gamma_1 + (-\gamma_2)$ ein geschlossener Pfad ist. Im letztem Schritt haben wir den Stokes'schen Satz verwendet, wobei Σ eine von γ berandete Fläche mit Flächenelement $d\mathbf{r}$ bezeichnet. Wir sehen, dass mit der Bedingung (2.75) die Pfadunabhängigkeit gegeben ist und damit für konservative Kraftfelder $\vec{\nabla} \times \mathbf{F} = 0$ ein Potential z. B. durch

$$U(\mathbf{x}) = - \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{mit } \mathbf{x}: \text{ Ortsvektor von Punkt 2} \quad (2.78)$$

gegeben ist. Hierbei haben wir willkürlich $U_1 = 0$ gewählt. Jede andere Wahl mit z. B. $U_1 = U_0 = \text{const.}$ wäre ebenso legitim und ergäbe das Potential

$$U(\mathbf{x}) = U_0 - \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad (2.79)$$

d. h. die Wahl des Potentialnullpunkts ist irrelevant. Bei der Berechnung der Kraft $\mathbf{F} = -\vec{\nabla}U$ fällt U_0 heraus und bleibt dadurch unbeobachtbar.

Nun definieren wir die *Gesamtenergie* eines Teilchens als die Summe von kinetischer und potentieller Energie:

$$E := T + U. \quad (2.80)$$

Die Zeitableitung der Gesamtenergie ist

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt}. \quad (2.81)$$

Nach (2.70) gilt

$$dT = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.82)$$

so dass

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}}. \quad (2.83)$$

Andererseits gilt für die Geschwindigkeitsunabhängige Potentiale

$$\frac{d}{dt}U = \sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} = (\vec{\nabla}U) \cdot \mathbf{r} + \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (2.84)$$

Für die zeitliche Änderung der Gesamtenergie erhalten wir damit

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} + (\vec{\nabla}U) \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial U}{\partial t} \\ \Rightarrow \frac{dE}{dt} &= (\mathbf{F} + \vec{\nabla}U) \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial U}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.85)$$

Für konservative Kraftfelder $\mathbf{F} = -\vec{\nabla}U$ und für den Fall, dass das Potential nicht explizit von der Zeit abhängt, d. h. $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$, ist die *Gesamtenergie* eine *Erhaltungsgröße in der Zeit*

$$\frac{dE}{dt} = 0. \quad (2.86)$$

Unter den genannten Voraussetzungen ist die Energieerhaltung eine einfache Konsequenz der NEWTON'schen Dynamik von Massepunkten. Aber auch jenseits der genannten Voraussetzungen hat sich die Energieerhaltung als nützliches Konzept erwiesen, so dass man ihr im Allgemeinen den Status eines Postulats verleiht. In Fällen von nicht-konservativen Kräften (z. B. der Lorentzkraft auf geladene Teilchen) erreicht man dann die Energieerhaltung, indem man weiteren charakteristischen Größen des Systems (z. B. dem elektromagnetischen Feld) ebenfalls eine Energie zuweist und die Energieerhaltung auf das Gesamtsystem ausdehnt.

Die Nützlichkeit des Energiekonzepts wird insbesondere bei qualitativen Betrachtungen deutlich, aus denen ohne explizite Rechnungen wichtige Eigenschaften eines Systems abgeleitet werden können. Als Beispiel betrachten wir einen Massepunkt unter dem Einfluss einer konservativen Kraft mit Potential $U(x)$. Die Gesamtenergie lautet:

$$E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) \quad (2.87)$$

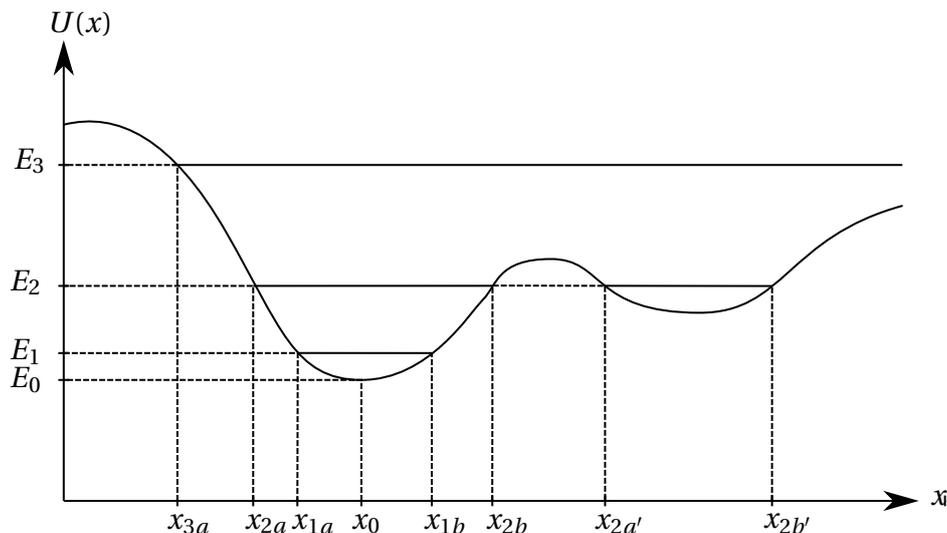
Für die folgende Betrachtung beschränken wir uns der Einfachheit halber auf 1-dimensionale Bewegungen. Aus (2.87) folgt für die Geschwindigkeit

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))} \quad (2.88)$$

Da aus physikalischen Gründen nur $v \in \mathbb{R}$ sinnvoll ist, ist die Gesamtenergie für jede physikalische Bewegung nach unten beschränkt durch

$$E \geq U(x) \quad \text{für alle } x. \quad (2.89)$$

Als Beispiel betrachten wir folgende „Potentiallandschaft“.



Da die Gesamtenergie erhalten ist, ist sie durch die Anfangsbedingungen bereits festgelegt, z. B. aus den Anfangsbedingungen für Ort und Geschwindigkeit $x(t_0)$ und $v(t_0)$ zum Zeitpunkt t_0 lässt sich aus (2.87) direkt die Energie ablesen $E = \frac{1}{2}mv(t_0)^2 + U(x(t_0)) = \text{const.}$ Für obiges Beispiel ist die gemäß (2.89) minimal zulässige Energie gegeben durch E_0 . In diesem Fall ist $E_0 = U(x_0)$. Damit ist die kinetische Energie für alle Zeiten $T = 0$; das Teilchen hat immer die Geschwindigkeit $v = 0$ und ruht damit im *Gleichgewichtspunkt* x_0 . Für größere Energien, z. B. E_1 , gibt es in der Regel einen endlichen Ortsbereich $x_{1a} \leq x \leq x_{1b}$, in dem (2.88) erfüllt ist. An den *Umkehrpunkten* x_{1a}, x_{1b} gilt $E_1 = U(x_{1a}) = U(x_{1b})$ an denen wiederum die Geschwindigkeit verschwindet $v \stackrel{(2.88)}{=} 0$. Das Teilchen oszilliert also zwischen den Umkehrpunkten hin und her. Im Zwischenbereich $x_{1a} < x < x_{1b}$ liegt die kinetische Energie $T = E_1 - U(x)$ vor und das Teilchen hat eine endliche Geschwindigkeit.

Für höhere Energien, z. B. E_2 , sind im obigen Beispiel Oszillationen in disjunkten Bereichen möglich: $x_{2a} \leq x \leq x_{2b}$ und $x_{2a'} \leq x \leq x_{2b'}$. In all diesen Beispielen bleibt x beschränkt und man spricht von *gebundenen* Bewegungen oder *gebundenen* Zuständen. Für noch höhere Energien, z. B. E_3 , gibt es in diesem Beispiel nur einen Umkehrpunkt bei x_{3a} . Das Teilchen kann also aus dem Unendlichen $x \rightarrow x_0$ kommen, wird bei x_{3a} „reflektiert“, und läuft wieder ins Unendliche $x \rightarrow \infty$. Die Bewegung ist *ungebunden* und man spricht auch von *Streuzuständen*.

Eine Klassifikation der Gleichgewichtszustände wird durch eine Taylorreihenentwicklung von $U(x)$ um den Gleichgewichtspunkt x_0 einsichtig:

$$U(x) = U(x_0) + (x - x_0) \frac{dU(x_0)}{dx} + \frac{(x - x_0)^2}{2!} \frac{d^2U(x_0)}{dx^2} + \dots \quad (2.90)$$

Der konstante Anteil $U(x_0)$ ist wegen willkürlicher Nullpunktswahl von U ohnehin irrelevant. Der Term $\frac{dU(x_0)}{dx} = -F(x_0)$ beschreibt die Kraft auf das Teilchen bei x_0 . Wir sprechen genau dann von einem *Gleichgewichtspunkt* x_0 , wenn die Kraft auf das Teilchen bei x_0 verschwindet, d. h.

$$\frac{dU(x_0)}{dx} = 0 \iff \text{Gleichgewichtspunkt } x_0. \quad (2.91)$$

Dies ist mathematisch äquivalent zu der Aussage, dass das Potential an x_0 ein lokales Extremum hat. In der Nähe von Gleichgewichtspunkten x_0 gilt also

$$U(x) = \frac{(x - x_0)^2}{2!} \frac{d^2U(x_0)}{dx^2} + \mathcal{O}((x - x_0)^3). \quad (2.92)$$

In Abhängigkeit vom Vorzeichen der zweiten Ableitung sprechen wir von

$$\begin{aligned} \frac{d^2U(x_0)}{dx^2} > 0 & \quad \text{stabiles Gleichgewicht, (Potentialminimum)} \\ \frac{d^2U(x_0)}{dx^2} < 0 & \quad \text{labiles Gleichgewicht, (Potentialmaximum)} \end{aligned} \quad (2.93)$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass die Kraft, in der Nähe von x_0 im stabilen Fall in Richtung von x_0 zeigt und im labilen Fall von x_0 weg weist.

Zum Schluss sei bemerkt, dass die Energieerhaltung auch die Lösung der Bewegungsgleichung vereinfacht, da (2.88) bereits die Form einer Differentialgleichung 1. Ordnung hat. Die Bahnkurve (in einer Dimension) ist dann gegeben durch folgende einfache Integration

$$t - t_0 = \pm \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}}, \quad (2.94)$$

wobei $x(t = t_0) = x_0$ gewählt ist. Die Bahnkurve $x(t)$ erhält man aus (2.94) $t = t(x)$ durch Bildung der Umkehrfunktion.

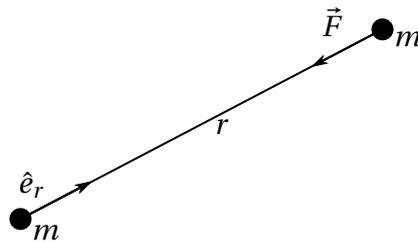
In höheren Dimensionen gibt es diesen einfachen Zusammenhang in der Regel nicht mehr. Allerdings „erspart“ einem die Energieerhaltung immer eine Integration.

3 Newtonsche Gravitation

Eine der fundamentalen Kräfte der Natur ist die Gravitationskraft. In der klassischen Mechanik wird dieses durch das NEWTON'sche Gravitationsgesetz beschrieben:

Jede Punktmasse zieht jede andere Punktmasse im Universum mit einer Kraft an, die proportional zum Produkt der Massen und umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes der Massepunkte ist.

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{e}_r, \quad (3.1)$$



wobei r der Abstand zwischen m_1 und m_2 ist und \hat{e}_r den Einheitsvektor von m_1 nach m_2 bezeichnet. (3.1) bezeichnet also die Kraft, mit der m_2 zu m_1 hingezogen wird. Die Kraft mit der m_1 zu m_2 hingezogen wird, ergibt sich nach dem 2. NEWTON'schen Gesetz. Die Proportionalitätskonstante G ist eine fundamentale Naturkonstante, die erstmals 1798 von HENRY CAVENDISH mittels einer Torsionswaage vermessen wurde. Ihr bester Messwert ist gegenwärtig

$$G = 6,67428(67)10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}. \quad (3.2)$$

Die NEWTON'sche Gravitationskonstante ist damit bei weitem noch nicht so genau vermessen wie andere Naturkonstanten (z. B. e , c oder \hbar). Dies mag daran liegen, dass die Gravitation verglichen mit anderen Kräften so „schwach“ ist.

Die Form des Gesetzes (3.1) gilt streng genommen nur für Punktteilchen. Für den Fall, dass z. B. $m_1 \equiv M$ eine ausgedehnte Massenverteilung besitzt, die durch eine *Massendichte* $\rho(\mathbf{r}')$ beschrieben wird

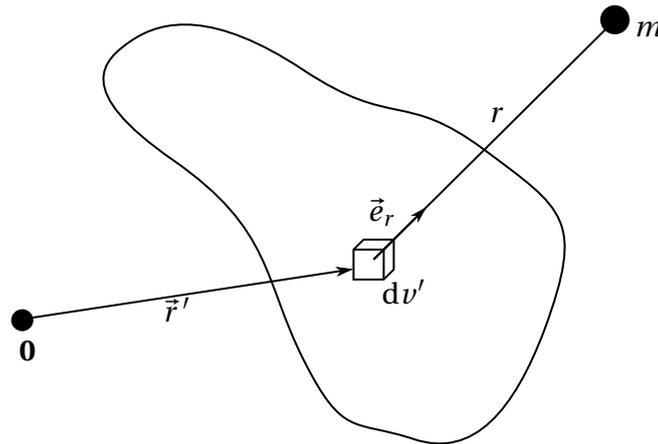
$$M = \int_V dV' \rho(\mathbf{r}'), \quad (3.3)$$

gilt für die Kraft auf $m_2 \equiv m$ das Gravitationsgesetz

$$\mathbf{F} = -Gm \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') \hat{e}_r}{r^2} dV'. \quad (3.4)$$

Zu beachten ist hierbei, dass \hat{e}_r auch von \mathbf{r}' abhängt. Die der klass. Gravitation zugrundeliegende Annahme ist hierbei, dass die Gravitationskräfte der einzelnen Volumina dV' auf m sich linear aufaddieren. (NB: tatsächlich ist die Allgemeine Relativitätstheorie als fundamentale Beschreibung der Gravitation keine lineare Theorie mehr.)

Ist auch der zweite Körper $m_2 \equiv m$ ausgedehnt, wird eine weitere Volumenintegration über die entsprechende Massendichte benötigt. Da die Kraft \mathbf{F} auf einen Massepunkt m von m



abhängt, ist es zweckmäßig ein Vektorfeld \mathbf{g} für die von einer Massenverteilung $\rho(\mathbf{r}')$ einzuführen, dass von der (Test-)masse m unabhängig ist und inhärent nur die Eigenschaften der Massenverteilung $\rho(\mathbf{r}')$ beschreibt:

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -G \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r^2} \hat{e}_r \, dv' \tag{3.5}$$

\mathbf{g} hat die Bedeutung einer Beschleunigung. Nahe der Erdoberfläche entspricht \mathbf{g} in der Tat der Erdbeschleunigung, vgl.(2.10). Aus den Definitionen für \mathbf{F} , bzw. \mathbf{g} , lässt sich direkt nachrechnen, dass

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{F} = 0 \text{ bzw. } \vec{\nabla} \times \mathbf{g} = 0 \tag{3.6}$$

Dies bedeutet, dass \mathbf{g} durch eine skalare Funktion dargestellt werden kann,

$$\mathbf{g} = -\vec{\nabla}\Phi \tag{3.7}$$

das sogenannte *Gravitationspotential*.

Für Punktmassen M hat Φ die Form

$$\Phi = -G \frac{M}{r}. \tag{3.8}$$

(vgl. Aufgabe (2) der Übungen), wie sich leicht nachrechnen lässt. Ähnlich wie bei der potentiellen Energie sind konstante Verschiebungen des Potentials physikalisch irrelevant. Die Konstante in (3.8) ist implizit so gewählt, dass $\Phi \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$. Für eine Materieverteilung gilt entsprechend

$$\Phi = -G \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r} \, dv'. \tag{3.9}$$

Die physikalische Bedeutung des Gravitationspotentials erschließt sich bei der Betrachtung der Arbeit, die an einer Test-Einheitsmasse verrichtet werden muss, um das Teilchen um $d\mathbf{r}$ in einem Gravitationsfeld zu verschieben:

$$dW = -\mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} = (\vec{\nabla}\Phi) \cdot d\mathbf{r} = \sum_i \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} dx_i = d\Phi. \tag{3.10}$$

Diese Arbeit pro Einheitsmasse entspricht also der Potentialdifferenz an den um $d\mathbf{r}$ verschobenen Punkten. I. A. ist nur eine Potential*differenz* von physikalischer Bedeutung. Durch unsere Normierung $\Phi \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$ können wir $\Phi(\mathbf{x})$ auch als Arbeit interpretieren, die zu

verrichtet ist, um eine Einheitsmasse aus dem unendlichen zu einem Punkt x zu bringen. Da $\Phi < 0$, wird im Gravitationsfeld immer Arbeit „gewonnen“.

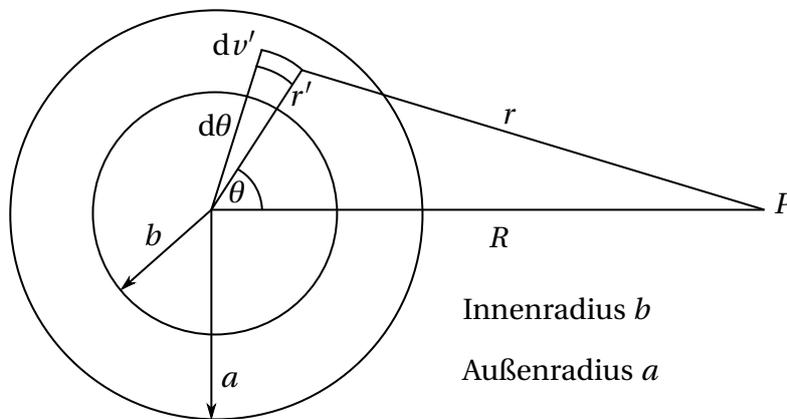
Analoges gilt für die potentielle Energie, die sich direkt aus dem Potential durch Multiplikation mit der Masse (eines Testteilchens) ergibt

$$U = m\Phi. \quad (3.11)$$

Entsprechend ergibt sich die Kraft gemäß

$$\mathbf{F} = -\vec{\nabla}U. \quad (3.12)$$

3.1 Gravitationspotential einer Kugelschale



Wir betrachten das Gravitationspotential einer Kugelschale am Punkt P im Abstand R vom Schalenmittelpunkt. Das Problem ist offensichtlich rotationssymmetrisch um die Achse vom Schalenmittelpunkt nach P . Wir benutzen ein Koordinatensystem mit Ursprung im Schalenmittelpunkt, sowie Kugelkoordinaten mit einem Polarwinkel, der von der Achse OP gemessen wird. Die genannte Rotationssymmetrie bedeutet, dass es keine Abhängigkeit vom Azimutalwinkel φ geben kann. Die Massendichte sei homogen,

$$\rho(\mathbf{r}') = \rho = \text{const.} \quad (3.13)$$

So dass die Gesamtmasse der Kugel gegeben ist durch

$$\begin{aligned} M &= \int_V dv' \rho = \rho \int_a^b dr' r'^2 \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{1}{3}(a^3 - b^3) \int_{-1}^1 du = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{4}{3}\pi\rho(a^3 - b^3). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Das Gravitationspotential folgt aus (3.9):

$$\Phi = -G \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r} dv' = -\rho G \int_b^a r'^2 dr' \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{\sin\theta}{r} d\theta. \quad (3.15)$$

Nach dem Kosinussatz folgt gemäß Skizze

$$r^2 = r'^2 + R^2 - 2r'R \cos \theta = r^2(\theta). \quad (3.16)$$

Bei festem R folgt für gegebenes r'

$$\begin{aligned} 2r \, dr &= -2r'R(-\sin \theta) \, d\theta \\ \implies \frac{\sin \theta}{r} \, d\theta &= \frac{dr}{r'R}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Der Integrationsbereich für die Variable r hängt offensichtlich von der Position von P relativ zur Kugelschale ab. Im Allgemeinen ist der Integrationsbereich beschränkt auf ein Intervall $[r_{min}, r_{max}]$:

$$\Phi = -\frac{2\pi\rho G}{R} \int_b^a r' \, dr' \int_{r_{min}}^{r_{max}} dr. \quad (3.18)$$

Betrachten wir zunächst den Fall, dass P außerhalb der Kugelschale liegt. Dann gilt

$$r_{min} = R - r', \quad r_{max} = R + r'$$

$$\begin{aligned} \implies \underline{\Phi(R > a)} &= -\frac{2\pi\rho G}{R} \int_b^a r' \, dr' \underbrace{\int_{R-r'}^{R+r'} dr}_{=2r'} \\ &= -\frac{4\pi\rho G}{R} \int_b^a r'^2 \, dr' \\ &= -\frac{4\pi\rho G}{3R} (a^3 - b^3) \stackrel{(3.14)}{\equiv} \underline{-\frac{GM}{R}}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Es zeigt sich, dass das Gravitationspotential außerhalb der Kugelschale gleich demjenigen eines Massenpunktes M ist, der im Schalenmittelpunkt positioniert ist. Dieses Ergebnis lässt sich auf alle sphärisch-symmetrischen Massenverteilungen verallgemeinern. D. h. um das Gravitationspotential im Außenraum zu berechnen, genügt es, sich die Masse im Mittelpunkt konzentriert vorzustellen.

Betrachten wir nun den Fall, dass P im Inneren der Kugelschale liegt, $R < b$

$$r_{min} = r' - R, \quad r_{max} = r' + R$$

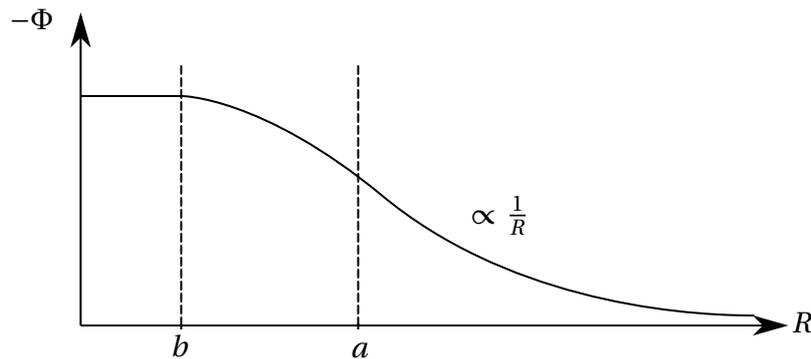
$$\begin{aligned} \implies \underline{\Phi(R < b)} &= -\frac{2\pi\rho G}{R} \underbrace{\int_b^a r' \, dr'}_{\frac{1}{2}(a^2 - b^2)} \underbrace{\int_{r'-R}^{r'+R} dr}_{=2R} \\ &= \underline{-2\pi\rho G(a^2 - b^2)}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Damit ist das Potential unabhängig von R . Es muss also keine Arbeit verrichtet werden, um einen Massepunkt im Inneren der Kugelschale umher zu bewegen. Ein Massenpunkt im Inneren ist damit kräftefrei.

Für den Fall, dass P innerhalb der Kugelschale liegt, d. h. $b < R < a$, können wir uns die Kugelschale als zusammengesetzt aus zwei Kugelschalen denken. Die innere hat die Radien b und R , die äußere hat die Radien R und a . Das gesamte Potential ergibt sich dann aus der Summe der Potentiale für die innere Schale (Außenraumformel (3.19) $a \rightarrow R$) und für die äußere Schale (Innenraumformel (3.20), $b \rightarrow R$). Wir erhalten

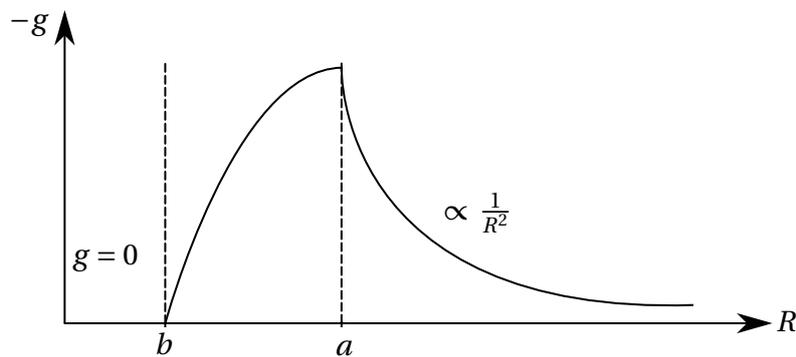
$$\Phi(b < R < a) = -4\pi\rho G \left(\frac{a^2}{2} - \frac{b^3}{3R} - \frac{R^2}{6} \right). \quad (3.21)$$

Damit ist das Potential bei $R = a$ und $R = b$ stetig.



Es ist sogar differenzierbar, sodass die Gravitationsbeschleunigung $g = -\frac{d\Phi}{dR}$ für alle R berechnbar ist

$$\begin{aligned} g(R < b) &= 0 \\ g(b < R < a) &= \frac{4\pi\rho G}{3} \left(\frac{b^3}{R^2} - R \right) \\ g(R > a) &= -\frac{GM}{R^2} \end{aligned} \quad (3.22)$$



4 Methoden der Variationsrechnung

In den folgenden Abschnitten werden wir die NEWTON'schen Bewegungsgleichungen in eine konzeptionell allgemeinere Form bringen. Die resultierenden LAGRANGE-Gleichungen werden sich als auf viele Bereiche der theoretischen Physik verallgemeinerbar erweisen. Diese Gleichungen folgen wiederum aus deinem einfachen Wirkungsprinzip, dem HAMILTON'schen Prinzip. Die für diesen Themenkomplex notwendige mathematische Methode ist die *Variationsrechnung*, die wir zunächst losgelöst von der Physik kennenlernen wollen.

Eine typische Fragestellung ist z. B. diejenige nach einer kürzesten Distanz zwischen Punkten (ggf. unter bestimmten Bedingungen), oder der kürzesten Zeit für die Bewegung zwischen zwei Punkten. Ein einfaches bekanntes Beispiel für die Themenstellung ist das FERMAT'sche Prinzip für den optischen Weg eines Lichtstrahls, der denjenigen Pfad nimmt, der die kürzeste Zeit benötigt.

4.1 Extremwertbildung für ein Funktional

Eine typische Problemstellung für die Variationsrechnung lautet folgendermaßen: wir betrachten ein Integral vom Typ

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y'; x) dx, \quad (4.1)$$

wobei f eine Funktion ist, die zunächst von einer *unabhängigen Variable* x abhängt. Ein Teil dieser Abhängigkeit kann in Form einer Abhängigkeit von einer *Funktion* und ihrer Ableitung

$$y(x), \quad y'(x) = \frac{dy(x)}{dx} \quad (4.2)$$

vorliegen (z. B. $f(y, y'; x) = y^2(x) + (y'(x))^2 + cx$). Für gegebenes $f(y, y'; x)$ ist J eine Zahl, deren Wert wir in Abhängigkeit von der Form von $y(x)$ studieren wollen. Somit hängt J nicht lediglich von einer Variablen, sondern von einer Funktion ab, und wir schreiben

$$J = J[y] \quad (4.3)$$

für das *Funktional* J , welches von $y = y(x)$ abhängt.

In der Variationsrechnung suchen wir nun nach einem Extremum (entweder Minimum oder Maximum) von $J[y]$. D. h. wir suchen diejenige Funktion $y(x)$, die J extremal werden lässt. Diese Extremalwert bildende Funktion $y(x)$ soll also die Eigenschaft haben, dass jede „benachbarte“ Funktion J von seinem Extremwert entfernt unabhängig davon wie nahe sie an $y(x)$ liegt.

Im Folgendem wollen wir den Extremalwert von J unter der Einschränkung suchen, dass

$$y(x_1) \text{ und } y(x_2)$$

fest vorgegeben sind. Sei nun die tatsächlich extremalwertbildende Funktion gegeben durch $y(x)$. Dann lässt sich eine 1-parametrische Schar von variierten Funktionen schreiben als

$$y(\alpha, x) = y(x) + \alpha \eta(x), \quad (4.4)$$

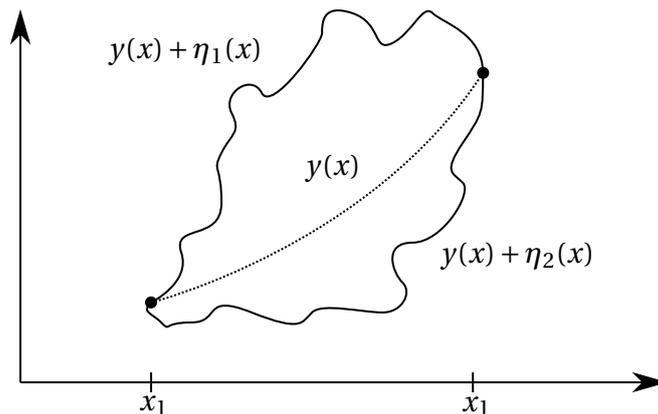
wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein beliebiger Variationsparameter ist, und $\eta(x)$ eine *beliebige* differenzierbare Funktion sei, die an den Randpunkten verschwinde:

$$\eta(x_1) = 0 = \eta(x_2). \quad (4.5)$$

Die Extremalbedingung an $J[y]$ lässt sich nun als Stationaritätsbedingung an α formulieren:

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0, \quad (4.6)$$

was für alle zulässigen Funktionen $\eta(x)$ gelten muss.



Wir berechnen nun die Ableitungen in (4.6) explizit:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{x_1}^{x_2} f(y, y'; x) dx \quad (4.7)$$

Da die Integralgrenzen x_1, x_2 fixiert sind, folgt

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right) dx. \quad (4.8)$$

Mit (4.4) folgt

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta(x), \quad \frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \frac{d\eta}{dx} = \eta'(x) \quad (4.9)$$

und somit

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} \stackrel{(4.8)}{=} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d\eta(x)}{dx} \right) dx. \quad (4.10)$$

Mit partieller Integration folgt für den zweiten Term

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} \eta dx = \left. \frac{\partial f}{\partial y'} \eta \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) dx. \quad (4.11)$$

Da $\eta(x_{1,2}) = 0$, verschwindet der Randterm und es folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \alpha} &\stackrel{(4.10)}{=} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) - \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) \right) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) dx. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Implizit ist die rechte Seite noch von α abhängig, da $\frac{\partial f}{\partial y}$ und $\frac{\partial f}{\partial y'}$ an der Stelle $y = y(\alpha, x)$ und $y' = y'(\alpha, x)$ ausgewertet müssen. Diese Abhängigkeit verschwindet jedoch, da nach Voraussetzung (4.6) $\alpha = 0$ gesetzt werden soll:

$$\Rightarrow 0 = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) dx. \quad (4.13)$$

Im Allgemeinen kann man aus dem Verschwinden eines Integrals nicht auf das Verschwinden des Integranden schließen. Im vorliegenden Fall jedoch soll (4.13) für *jedes beliebige* $\eta(x)$ mit (4.5) gelten.

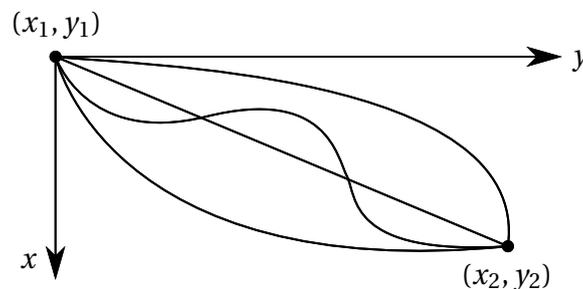
Dies kann nur gelten, wenn

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0} \quad \underline{\text{EULER-Gleichung.}} \quad (4.14)$$

Die EULER-Gleichung liefert eine notwendige Bedingung an $y(x)$, damit $J[y]$ einen Extremalwert annimmt.

4.1.1 Beispiel: Brachistochrone-Problem

Beim *Brachistochrone*-Problem wird derjenige Pfad gesucht, auf dem ein (reibungsfreier) Massepunkt im homogenen Gravitationsfeld von einem Startpunkt (x_1, y_1) in Ruhe startend zu einem niedrigerem Punkt (x_2, y_2) in *kürzester* Zeit gelangt.



Wir wählen o. B. d. A. den Startpunkt (x_1, y_1) als Ursprung des Koordinationssystems. Die x -Achse zeige „nach unten“, sodass $x > 0$ die gefallene Höhe beschreibt. Das Kraftfeld ist konservativ. Die Gesamtenergie ist erhalten $T + U = \text{const.}$. Wir wählen das Potential so, dass $U(x_1) = U(x = 0) = 0$, d. h.

$$U(x) = -mgx. \quad (4.15)$$

Da das Teilchen sich anfänglich in Ruhe befindet, gilt zu Anfang $T = 0$ und damit $E = T + U$. Unter Einfluss der Schwerkraft beschleunigt man nun das Teilchen, d. h. $T > 0$, verliert dabei aber potentielle Energie, d. h. $U < 0$. Mit $T = \frac{1}{2}mv^2$ gilt nach gefallener Höhe x für die Geschwindigkeit

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgx \Rightarrow v = \sqrt{2gx} \quad (4.16)$$

Für das Pfadelement ds gilt

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \quad (4.17)$$

Damit ergibt sich die Zeit für das Durchlaufen der Bahnkurve aus

$$t = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \frac{ds}{v} = \int_{x_1=0}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gx}} dx. \quad (4.18)$$

Um t zu minimieren, identifizieren wir $t \sim J$ (in oben genannter Nomenklatur) und bis auf einen konstanten Faktor

$$f = \left(\frac{1 + y'^2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.19)$$

Da $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ vereinfacht sich die EULER-Gleichung auf

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0. \quad (4.20)$$

Damit folgt $\frac{\partial f}{\partial y'} = \text{const}$. Diese Konstante nennen wir

$$\frac{1}{\sqrt{2a}} := \frac{\partial f}{\partial y'}. \quad (4.21)$$

Die Ableitung liefert

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} y'. \quad (4.22)$$

Wir quadrieren beide Seiten in (4.21) und erhalten

$$\frac{1}{2a} = \frac{y'^2}{x(1 + y'^2)} \quad (4.23)$$

was sich schreiben lässt als $(y'^2 = \frac{x}{2a - x} = \frac{x^2}{2ax - x^2})$

$$y = \int \frac{x dx}{\sqrt{2ax - x^2}}. \quad (4.24)$$

Mit dem Variablenwechsel

$$\begin{aligned} x &= a(1 - \cos \theta) \\ dx &= a \sin \theta d\theta \end{aligned} \quad (4.25)$$

schreibt sich das Integral

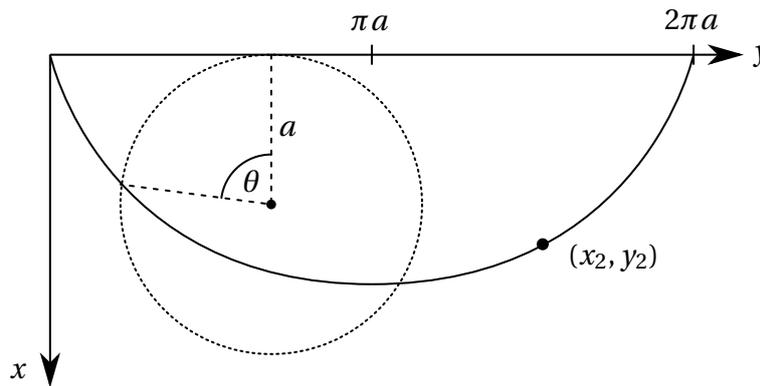
$$\left(\frac{1}{\sqrt{(2ax - x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(2a^2(1 - \cos \theta) - a^2(1 - (\cos \theta)^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a^2(\sin^2 \theta)}} = \frac{1}{a \sin \theta} \right)$$

$$\begin{aligned}
 y &= \int a(1 - \cos \theta) d\theta \\
 &= a(\theta - \sin \theta) + \text{const.},
 \end{aligned}
 \tag{4.26}$$

wobei die Konstante für die Anfangsbedingung $y(\theta = 0) = 0$ verschwindet. Das Resultat

$$\begin{aligned}
 x &\stackrel{(4.25)}{=} a(1 - \cos \theta) \\
 y &= a(\theta - \sin \theta)
 \end{aligned}
 \tag{4.27}$$

parametrisiert eine *Zykloide*, d. h. die Bahnkurve eines Massepunkts auf einem Rad beim Abrollen des Rades.



Die Konstante a entspricht dabei dem Radius des Rades. Diese Bahnkurve entspricht der Lösung des Problems: Die Brachistochrome entspricht einer Zykloide mit angepasstem Radius a , so dass der Punkt (x_2, y_2) auf der Zykloide liegt.

(NB: Die Variationsrechnung besagt zunächst nur, dass die Zykloide die Bahnzeit t extremal macht. Es könnte sich zunächst noch um ein Maximum oder ein Minimum handeln. Das es tatsächlich ein Minimum ist lässt sich durch Vergleich mit anderen Bahnkurven (z. B. gerade Linie) plausibel machen.)

4.1.2 Verallgemeinerung der Euler-Gleichung auf mehrere variable Funktionen

Für den Fall, dass ein Funktional J von mehreren unabhängigen Funktionen abhängt

$$J = J[y_1, y_2, y_3, \dots] \tag{4.28}$$

d. h.

$$f = f(y_1, y_1', y_2, y_2', y_3, y_3', \dots; x) \tag{4.29}$$

lässt sich die EULER-Gleichung leicht verallgemeinern. Dazu fassen wir die Funktionen y_1, \dots, y_n in einem n -Tupel zusammen und schreiben

$$f = f(y_i, y_i'; x), \quad i = 1, \dots, n. \tag{4.30}$$

In Analogie zu (4.4) schreiben wir für die variierte Funktion

$$y_i(\alpha, x) = y_i(x) + \alpha \eta_i(x). \tag{4.31}$$

Die Ableitung nach α wirkt dann entsprechend auf jede Komponente y_i bzw. y'_i , und wir erhalten analog zu (4.12):

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{y_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) \eta_i(x) dx. \quad (4.32)$$

Da diese Ableitung am Extremum wieder für beliebige $\eta_i(x)$ gelten muss, folgt für jedes x und jedes i separat

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.33)$$

4.2 Die Euler-Gleichung mit Zwangsbedingungen

Wir betrachten nun den Fall, dass wir diejenige Funktion finden wollen, die J extremal macht, aber gleichzeitig eine Neben- oder Zwangsbedingung erfüllt; man denke z. B. an einen extremalen Pfad, der zudem in einer bestimmten Fläche, die wir durch die Koordinaten y und z parametrisieren wollen, liegen soll.

Allgemein beschreiben wir diese Fläche mit Hilfe einer Zwangsbedingung

$$g\{y, z; x\} = 0, \quad (4.34)$$

z. B. die Bewegung innerhalb bzw. auf einer Kugeloberfläche erfüllt die Zwangsbedingung z. B.

$$g = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0, \quad (4.35)$$

wobei r der Radius der Kugeloberfläche ist. Für einen gegebene Wert der Koordinate x müssen $y(x)$ und $z(x)$ der Bedingung (4.35) erfüllen. Wir betrachten also nun ein Variationsproblem der Form

$$J[y, z] = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', z, z'; x) dx. \quad (4.36)$$

Die entsprechende nach einem Parameter α differenzierte Größe lautet dann

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z'} \right) \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right] dx. \quad (4.37)$$

Der wichtige Unterschied zu den vorhergehenden Betrachtungen ist nun, dass die Variationen $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ und $\frac{\partial z}{\partial \alpha}$ nicht mehr unabhängig voneinander sind; eine Variation in der y -Koordinate verlangt ein entsprechendes „Nachjustieren“ in der z -Koordinate, damit die Zwangsbedingung (4.34) erfüllt bleibt. Die Ausdrücke in (...) - Klammern in (4.37) verschwinden also nicht mehr separat. Die Ableitung der Zwangsbedingung nach α liefert

$$\begin{aligned} \frac{dg}{d\alpha} &= \left(\frac{\partial g}{\partial x} \underbrace{\frac{\partial x}{\partial \alpha}}_{=0} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right) = 0 \\ &= \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \alpha}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Mit

$$\begin{aligned} y(\alpha, x) &= y(x) + \alpha \eta_y(x) \\ z(\alpha, x) &= z(x) + \alpha \eta_z(x) \end{aligned} \quad (4.39)$$

folgt

$$\frac{\partial g}{\partial y} \eta_y(x) = -\frac{\partial g}{\partial z} \eta_z(x). \quad (4.40)$$

Damit lässt sich die Abhängigkeit der Variationen quantifizieren

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \eta_z = -\left(\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}}\right) \eta_y \quad (4.41)$$

und aus (4.37) folgt

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}} \right) \right) \right] \eta_y(x) dx. \quad (4.42)$$

Die Variation $\eta_y(x)$ ist nun nicht mehr eingeschränkt und es folgt entsprechend

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^{-1} = \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z'} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial z} \right)^{-1}. \quad (4.43)$$

Letzten Endes sind mit $y(x)$ und $z(x)$ beide Seiten lediglich eine Funktion von x , die wir im Folgenden $-\lambda(x)$ nennen wollen. Damit ergibt sich das Gleichgewichtssystem

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} + \lambda(x) \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z'} + \lambda(x) \frac{\partial g}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Nun haben wir 3 Funktionen zu bestimmen $y(x)$, $z(x)$ und $\lambda(x)$. Zusammen mit der Zwangsbedingung (4.34) haben wir mit (4.44) entsprechend auch 3 Bestimmungsgleichungen. Dabei nennt man die zu bestimmende Funktion $\lambda(x)$ einen LAGRANGE-*Multiplikator*. Die Verallgemeinerung des Verfahrens auf mehrere Freiheitsgrade y_i mit $i = 1, 2, \dots, m$ und mehrere Zwangsbedingungen

$$g_j(y_i; x) = 0, j=1, 2, \dots, n \quad (4.45)$$

folgt unmittelbar:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_i'} + \sum_j \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial y_i} = 0. \quad (4.46)$$

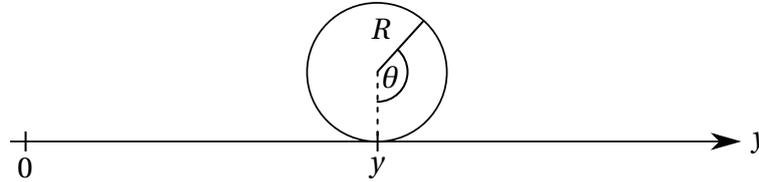
Damit haben wir $\underbrace{m}_{(4.46)} + \underbrace{n}_{(4.45)}$ Gleichungen für $\underbrace{m}_{\lambda_j(x)} + \underbrace{n}_{y_i(x)}$ Funktionen.

Damit in (4.46) und (4.45) die Zwangsbedingungen im gleicher Struktur vorkommen, kann (4.45) auch differenziell formuliert werden

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial g_j}{\partial y_i} dy_i = 0. \quad (4.47)$$

4.2.1 Beispiel für Zwangsbedingungen

Ein Rad auf einem Tisch hat zunächst die Freiheitsgrade der Position y und des Rotationswinkels θ .



Wenn das Rad nicht rutscht, besteht zwischen y und θ ein Zusammenhang:

$$y = R\theta, \quad (4.48)$$

wobei R der Radius des Rades ist und θ in Bogenlängen gemessen wird. Die zugehörige Zwangsbedingung kann geschrieben werden als

$$g(y, \theta) = y - R\theta = 0 \quad (4.49)$$

und es folgt

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = -R. \quad (4.50)$$

4.3 Die δ Notation

In der Variationsrechnung ist es zweckmäßig für die 1-parametrische Schar von deformierten Pfaden $y(x, \alpha)$ mit gleichzeitig *beliebiger* Funktion $\eta(x)$ eine verkürzte Schreibweise einzuführen. Wir schreiben für

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha \right) dx \quad (4.51)$$

vereinfacht auch

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx \quad (4.52)$$

mit

$$\begin{aligned} \delta J &= \frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha \quad (\text{mit } \eta \text{ beliebig}) \\ \delta y &= \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha = \eta d\alpha \quad (\eta \text{ beliebig}), \end{aligned} \quad (4.53)$$

(wobei nach wie vor gelten soll, dass $\eta(x_1) = 0 = \eta(x_2)$.)

Damit können wir $\delta y(x)$ auch als *beliebige* infinitesimale Deformation von $y(x)$ verstehen. Die Extremalbedingung von J lautet dann

$$\delta J = \delta \int_{x_1}^{x_2} dx f(y, y', x) = 0. \quad (4.54)$$

5 Das Hamiltonsche Prinzip

5.1 Lagrangesche Dynamik

Die NEWTON'sche Mechanik lässt sich auch alternativ zu den NEWTON'schen Gesetzen durch ein *Wirkungsprinzip* formulieren. Da sich solche Wirkungsprinzipien in sehr vielen Teildisziplinen der Physik wiederfinden, ist ein gründliches Verständnis dieses Prinzips in der Mechanik besonders nützlich.

Die Historie der Wirkungsprinzipien in der Physik ist sehr reichhaltig. Hier wollen wir uns im Folgenden auf konservative Systeme beschränken für welche sich das HAMILTON'sche Prinzip (HAMILTON 1834, 1835) formulieren lässt:

Unter allen möglichen Pfaden entlang derer sich ein dynamisches System innerhalb eines vorgegebenen Zeitintervalls verträglich mit den Zwangsbedingungen bewegen kann, wird derjenige Pfad ausgewählt, der das Zeitintegral der Differenz zwischen kinetischer und potentieller Energie minimiert.

Die angesprochene Differenz zwischen kinetischer Energie $T = T(\dot{x}_i)$ und potentieller Energie $U = U(x_i)$ bezeichnet man als LAGRANGE-Funktion

$$L = L(x_i, \dot{x}_i) := T - U. \quad (5.1)$$

Das angesprochene Zeitintegral nennt man *Wirkung*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(x_i, \dot{x}_i). \quad (5.2)$$

Mit Hilfe der Variationsrechnung lautet das HAMILTON'sche Prinzip folglich

$$0 = \delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L. \quad (5.3)$$

Damit ist das HAMILTON'sche Prinzip technisch äquivalent zu einer Extremwertaufgabe ähnlich dem vorhergehenden Abschnitt. Es gilt das „Wörterbuch“.

Kapitel 4		Kapitel 5
x	\rightarrow	t
$y(x)$	\rightarrow	$x_i(t)$
$y'_i(x)$	\rightarrow	\dot{x}_i
$f(y, y'; x)$	\rightarrow	$L(x_i, \dot{x}_i; t)$
$I[y]$	\rightarrow	$S[x]$

Die Extremalwertbildende Bahnkurve muss daher das Analogon der EULER-Gleichung erfüllen:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0}. \quad (5.5)$$

Im Zusammenhang mit dem HAMILTON'schen-Prinzip nennt man die Gleichung nun EULER-LAGRANGE-Gleichung.

Als *Erstes Beispiel* betrachten wir den *harmonischen Oszillator*, der nun beschreibbar ist durch die LAGRANGE-Funktion

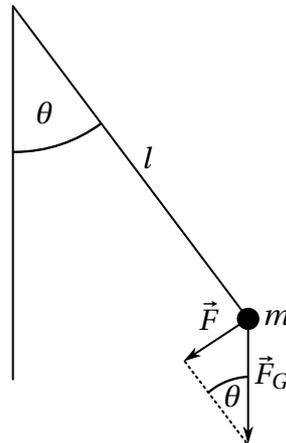
$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \quad (5.6)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} = -kx, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -(kx + m\ddot{x}), \quad (5.7)$$

was genau der NEWTON'schen Bewegungsgleichung entspricht.

Als zweites weniger triviales Beispiel betrachten wir das mathematische Pendel, d. h. einen an einer festen Stange (masselos) reibungsfrei in einer Ebene schwingenden Massepunkt m im homogenen Schwerfeld:



Die bei endlicher Auslenkung θ auf den Massepunkt wirkende Rückstellkraft entspricht der Tangentialkomponente der Gravitationskraft entlang der Bahnkurve eines Massepunkts

$$|F| = |F_G| \sin\theta = mg \sin\theta. \quad (5.8)$$

Mit der Beschleunigung

$$\ddot{x} = l\ddot{\theta} \quad (5.9)$$

ergibt sich die NEWTON'sche Bewegungsgleichung

$$ml\ddot{\theta} = \underbrace{-}_{\text{„Rückstellkraft“}} mg \sin\theta. \quad (5.10)$$

Im LAGRANGE-Formalismus benötigen wir die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \quad (5.11)$$

sowie die potentielle Energie

$$U = mgh = mgl(1 - \cos\theta) \quad (5.12)$$

und erhalten die LAGRANGE-Funktion

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - m g l (1 - \cos \theta). \quad (5.13)$$

Da wir bei der Ableitung der EULER-LAGRANGE-Gleichung zu keiner Zeit die explizite Annahme verwenden mussten, dass die zu suchende Funktion $x_i(t)$ einer kartesischen Koordinate entspricht, wenden wir nun einfach die EL-Gleichung auf die Winkelvariable θ an:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m g l \sin \theta, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \dot{\theta} \quad (5.14)$$

$$\Rightarrow 0 = -(m g l \sin \theta + m l^2 \ddot{\theta}), \quad (5.15)$$

was (für $l \neq 0$) mit (5.10) identisch ist. Dieses Resultat ist aus zwei Gründen bemerkenswert:

- Die Tatsache, dass die LAGRANGE'sche Dynamik auch durch Winkelvariablen formuliert werden kann, deutet an, dass die Methode allgemeiner verwendbar ist als vielleicht implizit vermutet.
- In beiden Beispielen wurde bei der Anwendung des HAMILTON'schen Prinzips der Kraftbegriff nicht verwendet. Benötigt werden lediglich Energiebegriffe. Daher kann man vermuten, dass das HAMILTON'sche Prinzip auch in solchen Systemen anwendbar ist, in denen es einen Energiebegriff gibt, ohne notwendigerweise auf den Kraftbegriff der NEWTON'schen Mechanik zurückgreifen zu müssen.

5.2 Verallgemeinerte Koordinaten

Wie wir am Beispiel des mathematischen Pendels gesehen haben, erlaubt der LAGRANGE-Formalismus die Verwendung von nicht-kartesischen Koordinaten. In kartesischen Koordinaten benötigen wir zwei Komponenten, z. B. x und y , um den Massepunkt in der Ebene zu positionieren. Durch die feste Stange der Länge l entsteht eine Zwangsbedingung

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - l^2 = 0, \quad (5.16)$$

welche die Zahl der tatsächlichen Freiheitsgrade auf einen Freiheitsgrad (z. B. den Winkel θ) reduziert. Durch die Angabe dieses einen Freiheitsgrades ist der Zustand des Systems vollständig spezifiziert. Diese Überlegung lässt sich verallgemeinern. Für ein System aus m Massepunkten benötigen wir im 3-dimensionalen Raum $3m$ kartesische Koordinaten um den Zustand des Systems zu einem festen Zeitpunkt zu bestimmen. Wenn nun z. B. manche Massepunkte fest verbunden sind oder anderweitig in ihrer Bewegung eingeschränkt sind, kann dies zu m Zwangsbedingungen führen, so dass die Zahl der tatsächlichen Freiheitsgrade gegeben ist durch

$$s = 3n - m. \quad (5.17)$$

Wir benötigen also s unabhängige Variablen, um das System zu beschreiben. Dabei muss es sich nicht unbedingt um kartesische Koordinaten handeln. Viele Möglichkeiten wie z. B. Winkel- oder Energie, ..., Variablen sind denkbar.

An obigem Beispiel wird klar, dass es in der Regel keine eindeutige Wahl dieser s Variablen

gibt. Unter Berücksichtigung der Zwangsbedingung (5.16) kann man z. B. die y-Koordinate auch durch $y = y(x) = \sqrt{l^2 - x^2}$ ausdrücken und die Bewegungsgleichung mit der Variablen x formulieren (was in diesem Beispiel die Bewegungsgleichung komplizierter macht). Für die geschickte Wahl der s Koordinaten gibt es also kein Rezept, sondern es bedarf einer gewissen physikalischen Einsicht in das System.

Diese *verallgemeinerten* Koordinaten bezeichnen wir mit den Buchstaben

$$q_1, q_2, \dots, q_s. \quad (5.18)$$

Die kartesischen Koordinaten lassen sich dann unter Berücksichtigung der Zwangsbedingung aus den verallgemeinerten Koordinaten rekonstruieren

$$x_{\alpha i} = x_{\alpha i}(q_1, q_2, \dots, q_s) \equiv x_{\alpha i}(q_j)$$

$$\text{mit } \alpha = 1, \dots, m \text{ und } i = 1, 2, 3 \text{ (} j = 1, \dots, s \text{)}. \quad (5.19)$$

Beim mathematischen Pendel finden wir z. B. mit

$$q = \theta:$$

$$x = l \sin \theta = l \sin q \quad (5.20)$$

$$y = -l \cos \theta = -l \cos q.$$

Im Allgemeinen hängen dann die kartesischen Geschwindigkeiten sowohl von den verallgemeinerten Geschwindigkeiten als auch Koordinaten ab

$$\dot{x}_{\alpha i}(q_j, \dot{q}_j), \quad (5.21)$$

z. B. $\dot{x} \stackrel{(5.20)}{=} l \cos q \cdot \dot{q}$ beim mathematischen Pendel. Möglich sind in (5.19) & (5.21) auch explizite Abhängigkeiten von der Zeit

$$x_{\alpha i}(q_j, t) \quad \text{und} \quad \dot{x}_{\alpha i}(q_j, \dot{q}_j, t) \quad (5.22)$$

falls z. B. die q_j 's z. T. „mitbewegte“ Koordinaten sind.

Der Raum aller möglichen Zustände eines Systems zu einer gegebenen Zeit wird durch die s Variablen q_j aufgespannt. Diesen Raum nennen wir *Konfigurationsraum*. Die Bewegung eines solchen Systems wird dann durch eine Kurve im Konfigurationsraum $q_j(t)$ beschrieben, die man i. A. mit „Pfad“ bezeichnet. Dieser Pfad sollte nicht mit der Bahnkurve $x_{\alpha i}(t)$ im Ortsraum verwechselt werden. Durch jeden Punkt $q_j(t)$ im Konfigurationsraum können i. A. mehrere mögliche Pfade existieren. z. B. kann ein System an einem Punkt q_j mit jeweils verschiedenen (verallgemeinerten) Anfangsgeschwindigkeiten starten.

5.3 Euler-Lagrange-Gleichungen für generalisierte Koordinaten

Das nützliche an der Verwendung generalisierter (verallgemeinerter) Koordinaten ist, dass die Zwangsbedingung per constructionem automatisch berücksichtigt werden. Daher lässt sich das HAMILTON'sche Prinzip, das auf Seite 37 noch explizit auf mögliche Zwangsbedingungen Bezug nimmt, im Konfigurationsraum leichter formulieren:

Unter allen möglichen Pfaden entlang derer sich ein System innerhalb eines vorgegeben Zeitintervalls zwischen zwei Punkten im Konfigurationsraum bewegen kann, wird derjenige Pfad ausgewählt, der die Wirkung minimiert.

Wenn wir die LAGRANGE-Funktion durch die verallgemeinerten Koordinaten ausdrücken

$$L = T(q_j, \dot{q}_j; t) - U(q_j; t) = L(q_j, \dot{q}_j; t) \quad (5.23)$$

lautet das Wirkungsprinzip

$$0 = \delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j; t) dt = 0. \quad (5.24)$$

Nach den Regeln der Variationsrechnung führt dies auf die EULER-LAGRANGE-Gleichung

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, S \quad (5.25)$$

für Pfade im Konfigurationsraum.

In der Literatur werden diese Gleichungen oft als „LAGRANGE - Gleichungen zweiter Art“ genannt (die 1. Art folgt weiter unten). Wichtig ist die Gültigkeitsbedingungen für (5.25) festzuhalten:

1. Die zur Dynamik der q_j -Variablen beitragenden Kräfte müssen aus einem Potential ableitbar sein (dies muss nicht für die Kräfte gelten, die zu den Zwangsbedingungen führen).
2. Die Zwangsbedingungen müssen Beziehungen zwischen den Koordinaten herstellen und können von der Zeit abhängen. Mit anderen Worten, die Zwangsbedingungen müssen vom Typ

$$g_k = g_k(x_{\alpha i}, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (5.26)$$

sein.

Falls die Zwangsbedingungen vom Typ (5.26) sind, heißen sie *holonom*.

Falls die Zwangsbedingungen nicht explizit von der Zeit abhängen, heißen sie *skleronom*.

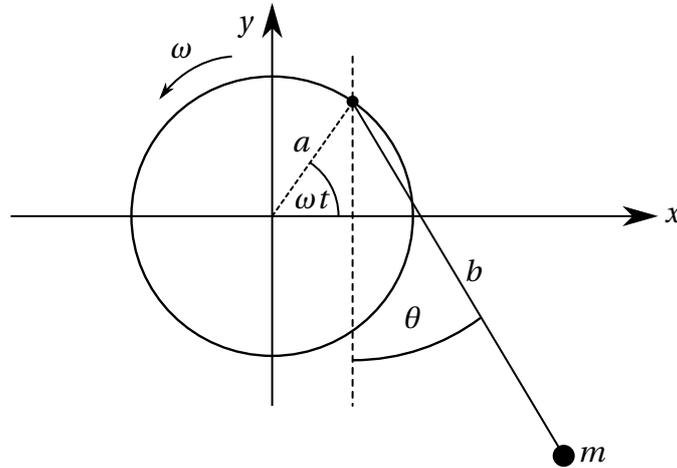
$$g_k = g_k(x_{\alpha i}) = 0. \quad (5.27)$$

Zeitabhängige Zwangsbedingungen nennt man *rheonom*.

Die bisher getroffenen Einschränkung auf konservative Kräfte erfüllen beide Bedingungen. Für die Anwendung des HAMILTON'schen Prinzips ist diese Einschränkung aber nicht notwendigerweise erforderlich. Erweiterungen auf nicht konservative Kräfte ebenso, wie auf bestimmte nicht- holonome Zwangsbedingungen sind möglich.

5.3.1 Mathematisches Pendel an einer Scheibe

Als Beispiel für rheonom-holonome Zwangsbedingungen betrachten wir ein mathematisches Pendel, das an einer rotierenden Scheibe aufgehängt ist:



Die Scheibe rotiert mit Kreisfrequenz ω . Die Position des Massenpunktes m in der xy -Ebene hat die Koordinaten

$$\begin{aligned} x &= a \cos \omega t + b \sin \theta \\ y &= a \sin \omega t - b \cos \theta. \end{aligned} \quad (5.27a)$$

Daraus ergeben sich die Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -a\omega \sin \omega t + b\dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{y} &= a\omega \cos \omega t + b\dot{\theta} \sin \theta, \end{aligned} \quad (5.27b)$$

sowie die Beschleunigungen

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -a\omega^2 \cos \omega t + b(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \\ \ddot{y} &= -a\omega^2 \sin \omega t + b(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta). \end{aligned} \quad (5.27c)$$

Die kinetische Energie ist offensichtlich

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (5.27d)$$

und die potentielle Energie mit Normierung $U(y=0) = 0$ ist

$$U = mgy. \quad (5.27e)$$

Die Zwangsbedingung, die x und y (θ -unabhängig) verknüpft, ist

$$g(x, y; t) = (x - a \cos \omega t)^2 + (y - a \sin \omega t)^2 - b^2 = 0. \quad (5.27f)$$

Wir könnten nun (5.27f) benutzen, um x oder y nach der jeweils anderen Koordinate aufzulösen. Aus der obigen Überlegung geht allerdings hervor, dass die Variable θ als generalisierte

Koordinate unmittelbar geeignet ist, um $x(t)$ und $y(t)$ über (5.27a) direkt zu rekonstruieren. Die LAGRANGE-Funktion lautet in dieser Variablen

$$L = \frac{m}{2}(a^2\omega^2 + b^2\dot{\theta}^2 + 2b\dot{\theta}a\omega \sin(\theta - \omega t)) - mg(a \sin \omega t - b \cos \theta) \quad (5.27g)$$

Die LAGRANGE-Gleichung 2. Art benötigt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mb^2\ddot{\theta} + mb\omega(\dot{\theta} - \omega) \cos(\theta - \omega t) \quad (5.27h)$$

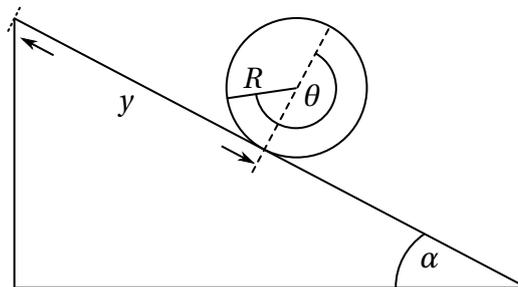
$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mb\theta a\omega \cos(\theta - \omega t) - mgb \sin \theta \quad (5.27i)$$

und führt auf die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\theta} = \frac{\omega^2 a}{b} \cos(\theta - \omega t) - \frac{g}{b} \sin \theta. \quad (5.27j)$$

Für $\omega \rightarrow 0$ entspricht der in (5.15) gefundenen Bewegungsgleichung des mathematischen Pendels. Die Diskussion der Lösung wollen wir hier nicht weiter verfolgen.

5.3.2 Hangabwärts rollender Zylinder



Wir betrachten einen schlupffrei rollenden Zylinder im homogenen Gravitationsfeld auf einer schiefen Ebene.

Die kinetische Energie des Zylinders setzt sich zusammen aus der kinetischen Energie seiner Schwerpunktsbewegung¹

$$T_S = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 \quad (5.28)$$

und seiner Rotationsbewegung

$$T_R = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2, \quad (5.29)$$

wobei M die Masse des Zylinders, und $I = \frac{1}{2} MR^2$ sein Trägheitsmoment¹ ist:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2. \quad (5.30)$$

¹Die Begriffe „Schwerpunkt“ und „Trägheitsmoment“ werden später präzisiert.

Die Potentielle Energie ist

$$U = Mg(l - y) \sin \alpha, \quad (5.31)$$

wobei wir die Länge l so gewählt haben, dass $U = 0$ für $l = y$.

Wir erhalten die LAGRANGE-Funktion

$$L = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - Mg(l - y) \sin \alpha. \quad (5.32)$$

Die Eigenschaft des schlupffreien Rades führt auf eine Zwangsbedingung vergleiche mit (4.49)

$$g(y, \theta) = y - R\theta = 0. \quad (5.33)$$

Wir können nun (5.33) benutzen, um $y = y(\theta)$ als verallgemeinerte Koordinate aufzufassen. Insbesondere gilt

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{y}}{R}. \quad (5.34)$$

Damit erhalten wir die Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{4}MdR^2 \frac{\dot{y}^2}{R^2} - Mg(l - y) \sin \alpha \\ &= \frac{3}{4}M\dot{y}^2 - Mg(l - y) \sin \alpha. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Die EULER-LAGRANGE-Gleichung führt uns auf

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = Mg \sin \alpha - \frac{3}{2}M\ddot{y} \\ &\Rightarrow \boxed{\ddot{y} = \frac{2g \sin \alpha}{3}}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Es ist instruktiv, dieses Resultat mit dem Fall zu vergleichen, dass der Zylinder reibungsfrei die schiefe Ebene herabrutscht. In diesem Fall hätten wir

$$\ddot{y} = g \sin \alpha \quad (5.37)$$

gefunden. D. h. die Zwangsbedingungen des schlupffreien Rades reduziert die Beschleunigung nur um einen Faktor $\frac{2}{3}$.

5.4 Lagrange-Gleichungen 1. Art

Wir haben bereits im Abschnitt 4.2 die Methode der LAGRANGE-Multiplikatoren kennengelernt, um Variationsrechnung mit Zwangsbedingungen behandeln zu können.

Gegeben sei eine Zwangsbedingung der Form (holonom)

$$g_j(q_i, t) = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad i = 1, \dots, n \quad (5.38)$$

und ein dynamisches System mit LAGRANGE-Funktion $L(q_i, \dot{q}_i; t)$ (NB: Wir verwenden hier die Schreibweise der generalisierten Koordinaten q_i , um anzudeuten, dass es sich nicht notwendigerweise um Ortskoordinaten handeln muss! Dennoch lassen wir zu, dass die q_i noch über die Zwangsbedingung (5.38) z. T. noch miteinander verknüpft sein können, so dass nicht alle q_i unabhängig sein müssen).

Nach (4.2) erhalten wir als Bedingung für ein Extremum der Wirkung die „LAGRANGE-Gleichung 1. Art“

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_j \lambda_j(t) \frac{\partial g_j}{\partial q_i} = 0. \quad (5.39)$$

(5.38) und (5.39) ergeben zusammen mit n Bestimmungsgleichungen für $\underbrace{m}_{\lambda_j(t)} + \underbrace{n}_{q_i(t)}$ un-

kannte Funktionen.

Offensichtlich ist in der Praxis die Verwendung der LAGRANGE-Gleichungen 2. Art, bei der die Zwangsbedingungen aufgelöst werden und das Problem unmittelbar durch generalisierte Koordinaten ausgedrückt wird, einfacher, da weniger Differenzialgleichungen zu lösen sind. Der Vorteil der LAGRANGE-Gleichungen 1. Art ist, dass sie eine Bestimmung der LAGRANGE-Multiplikatoren zulässt, die die Bedeutung von *Zwangskräften* haben.

5.4.1 Hangabwärts rollender Zylinder (Version 2)

Wir betrachten erneut die Lagrange-Funktion (5.32)

$$L = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 - Mg(l - y) \sin \alpha \quad (5.40)$$

mit der Zwangsbedingung

$$g(y, \theta) = y - R\theta = 0. \quad (5.41)$$

Aus den Lagrange-Gleichungen 1-Art,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned} \quad (5.42)$$

folgt ($I = \frac{1}{2} MR^2$)

$$Mg \sin \alpha - M\ddot{y} + \lambda = 0 \quad (5.43a)$$

$$-\frac{1}{2} MR^2 \ddot{\theta} - \lambda R = 0. \quad (5.43b)$$

Zusammen mit der Zwangsbedingung (5.41) ergibt sich ein auflösbares Gleichungssystem

$$y = R\theta \implies \ddot{\theta} = \frac{\ddot{y}}{R}. \quad (5.44)$$

Aus (5.43b) folgt damit

$$\lambda = -\frac{1}{2}M\ddot{y}. \quad (5.45)$$

Einsetzen in (5.43a) folgt auf das Resultat (5.36)

$$\ddot{y} = \frac{2}{3}g \sin \alpha. \quad (5.46)$$

Damit ergibt sich der Lagrange-Multiplikator zu

$$\lambda = -\frac{1}{3}Mg \sin \alpha. \quad (5.47)$$

Im Vergleich zum reibungsfreien Rutschen $\ddot{y} \stackrel{(5.37)}{=} g \sin \alpha$ entspricht (5.47) der Kraft, die dem Zylinder bei der Abwärtsbedingung entgegenwirkt, um auf die reduzierte Beschleunigung (5.46) zu führen.

Den Zwangsbedingungen entsprechen somit Zwangskräften, die mit Hilfe der LAGRANGE-Multiplikatoren berechenbar sind.

5.5 Äquivalenz von Lagrange- und Newton-Gleichungen

Bislang haben wir anhand von Beispielen verdeutlicht, dass die NEWTON'schen Axiome und das HAMILTON'sche Prinzip die gleiche Dynamik beschreiben. Die Äquivalenz lässt sich auch direkt nachweisen. Wir beschränken uns im Folgenden auf konservative Kräfte, die die Bewegung eines Massenpunkts beeinflussen. Die LAGRANGE-Gleichung für Ortskoordinaten lautet dann

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad (5.48)$$

bzw. mit $L = T - U$

$$\frac{\partial(T - U)}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial(T - U)}{\partial \dot{x}_i} = 0. \quad (5.49)$$

Da für die gesamten Voraussetzungen

$$T = T(x_i), \quad U = U(x_i) \quad (5.50)$$

gilt, folgt

$$-\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}. \quad (5.51)$$

Die linke Seite ist identisch mit der Kraft

$$-\frac{\partial U}{\partial x_i} = F_i \quad (5.52)$$

während für die rechte Seite folgt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} m \dot{x}_j^2 \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} m \dot{x}_j \delta_{ij} \right) = \frac{d}{dt} (m \dot{x}_i) = \dot{p}_i\end{aligned}\quad (5.53)$$

und somit

$$\boxed{F_i = \dot{p}_i}. \quad (5.54)$$

Falls wir also rechtwinklige (kartesische) Koordinaten wählen, ist die LAGRANGE-Gleichung für eine Komponente x_i identisch mit der NEWTON-Gleichung für eine entsprechende Kraftkomponente F_i .

Wir wollen im Folgenden den umgekehrten Weg beschreiben und von der NEWTON-Gleichung im x_i -Koordinaten zur LAGRANGE-Gleichung in generalisierten Koordinaten übergehen. Wir beginnen mit dem allgemeinen Zusammenhang

$$x_i = x_i(q_j, t) \quad (5.55)$$

aus dem für die Geschwindigkeit

$$\dot{x}_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad (5.56)$$

folgt, und damit

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}. \quad (5.57)$$

Wir definieren nun den *verallgemeinerten* (bzw. *kanonischen*) *Impuls*, der mit der verallgemeinerten Koordinate q_i verknüpft ist, über

$$\boxed{p_j := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}} \stackrel{\text{konserv. Kräfte}}{=} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \quad (5.58)$$

z. B. für ein Teilchen in einer Ebene gilt in Polarkoordinaten

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2), \quad (5.59)$$

sodass wir die verallgemeinerten Impulse

$$\begin{aligned}p_r &= \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \quad (\text{Radialimpuls}) \\ p_\theta &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \quad (\text{Drehimpuls})\end{aligned}\quad (5.60)$$

erhalten. Wir definieren nun verallgemeinerte Kräfte mit Hilfe der „virtuellen“ Arbeit δW , die von einer infinitesimalen Variation δx_i eines Pfades verrichtet wird,

$$\begin{aligned}\delta W &= \sum_i F_i \delta x_i = \sum_{i,j} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j \\ &\stackrel{\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} d\alpha}{=} \sum_j Q_j \delta q_j\end{aligned}\quad (5.61)$$

mit der verallgemeinerten Kraft

$$Q_j = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}, \quad (5.62)$$

die mit der Koordinate q_j verknüpft ist (wenn z. B. q_j ein Winkel ist, ist Q_j ein Drehmoment). Für ein konservatives System (im Sinne verallgemeinerter Koordinaten), ist Q_j durch ein Potential ableitbar

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j}. \quad (5.63)$$

Nun betrachten wir

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_i \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 \right) = \sum_i m \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \stackrel{(5.57)}{=} \sum_i m \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}. \quad (5.64)$$

Für die Zeitableitung erhalten wir folglich

$$\dot{p}_j = \sum_i \underbrace{(m \ddot{x}_i)}_{=F_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + m \dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}. \quad (5.65)$$

Der letzte Term bestimmt sich zu ($x_i = x_i(q_j, t)$)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \sum_k \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k \right) + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial t} \quad (5.66)$$

$$\Rightarrow \dot{p}_j = \underbrace{\sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}}_{\stackrel{(5.62)}{=} Q_j} + \sum_{i,j} m \dot{x}_i \dot{q}_k \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_k} + \sum_i m \dot{x}_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial t}. \quad (5.67)$$

Die beiden letzten Terme folgen ebenso aus

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial q_j} &= \sum_i m \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \stackrel{(5.56)}{=} \sum_i m \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) \\ &= \sum_{ik} m \dot{x}_i \dot{q}_k \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_k} + \sum_i m \dot{x}_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial t}. \end{aligned} \quad (5.68)$$

Damit folgt für die Zeitentwicklung des kanonischen Impulses

$$\dot{p}_j = Q_j + \frac{\partial T}{\partial q_j} \quad (5.69)$$

Mit (5.63) und (5.58) ergibt sich ($L = T - U$),

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0} \quad (5.70)$$

was die Äquivalenz beweist.

5.6 Erhaltungssätze im Lagrange-Formalismus

Die Erhaltungssätze der NEWTON'schen Mechanik spiegeln sich ebenfalls in den Strukturen des LAGRANGE-Formalismus wider.

5.6.1 Energieerhaltung

In unseren Überlegungen zum 1. NEWTON'schen Gesetz haben wir über die Eigenschaft nachgedacht, dass die *Zeit* homogen im Inertialsystem ist. D. h. *geschlossene* Systeme sind invariant unter Zeittranslation $t \rightarrow t + t_a$, $t_a = \text{const.}$

Im LAGRANGE-Formalismus lässt sich diese Homogenität in der Zeit formalisieren durch

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad (5.71)$$

d. h. ein *geschlossenes* (mit keiner „Außenwelt“ wechselwirken) dynamisches System kann nicht explizit von der Zeit abhängen. Andersherum, kann man (5.71) als Definition von geschlossener Systemen betrachten (z. B. das math. Pendel an der rotierenden Scheibe ist nicht geschlossen, da es (5.71) nicht erfüllt; physikalisch gesprochen muss ja die Scheibe irgendwo aufgehängt sein.)

Mit $L = L(q, \dot{q})$ folgt aus (5.71)

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j. \quad (5.72)$$

Einsetzen von $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_j}$ auf der rechten Seite liefert

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \dot{q}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \quad (5.73)$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad (5.74)$$

woraus folgt

$$\frac{d}{dt} \left(L - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0. \quad (5.75)$$

Damit haben wir eine zeitliche Erhaltungsgröße, die wir mit $-H$ bezeichnen, gefunden:

$$H := \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L = \text{const.} \quad (5.76)$$

Mit der Definition des kanonischen Impulse im (5.68), $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$, ergibt sich ebenfalls

$$\boxed{H = \sum_j \dot{q}_j p_j - L}. \quad (5.77)$$

Die Größe H eines Systems, die sich allgemein (5.75) & (5.77) definieren lässt, heißt HAMILTON-Funktion. Für geschlossene Systeme ist sie mit (5.71) eine zeitliche Erhaltungsgröße.

Um ihre physikalische Bedeutung näher zu beleuchten, spezialisieren wir uns auf Systeme, die folgende Bedingungen erfüllen:

1. Wir betrachten Systeme, deren generalisierte Koordinaten q_j so gewählt werden können, dass die Transformation auf rechtwinklige Koordinaten nicht von der Zeit abhängt

$$x_i = x_i(q_j)$$

und deren kinetischer Energie geschrieben werden kann als $T = \sum_{i,j} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$ in diesen Koordinaten (mit Konstanten a_{ij} , z. B. $a_{ij} = \frac{1}{2} m \delta_{ij}$). Für den Fall gilt

$$\begin{aligned} \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} &= 2 \sum_{ijk} \dot{q}_j a_{ik} \dot{q}_i \delta_{jk} \\ &= 2 \sum_{ij} \dot{q}_j a_{jk} \dot{q}_k = \underline{2T}. \end{aligned} \quad (5.78)$$

2. Die Potentielle Energie des Systems hängt nicht von den Geschwindigkeit ab

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = 0. \quad (5.79)$$

Unter diesen Bedingungen folgt aus (5.76)

$$\begin{aligned} \underline{H} &= \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L = \sum_j \dot{q}_j \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \underbrace{\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}}_{\cong 0} \right) - (T - U) \\ &= \underbrace{\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}}_{\cong 2T} - T + U \\ &= \underline{T + U} = E = \text{const.} \end{aligned} \quad (5.80)$$

Unter den gesamten Bedingungen entspricht die HAMILTON-Funktion der gesamten Energie des Systems, und die zeitliche Erhaltung von H entspricht den Energieerhaltungssatz. Die Frage, ob „ $H = E = \text{const.}$ “ ist, hat (zwar oft aber) im Allgemeinen keine einfache Antwort. So kann z. B. die Gesamtenergie eines Systems erhalten sein, aber durch die Wahl von mitbewegten Koordinaten q_j $x_i(q_j, t)$ die Äquivalenz von H und E dennoch nicht gegeben sein.

5.6.2 Zyklische Koordinaten

Ist für ein gegebenes dynamisches System $L(q_i, \dot{q}_i; t)$ die LAGRANGE-Funktion unabhängig von einer bestimmten verallgemeinerten Koordinate q_K ($k = \text{const.}$), so folgt unmittelbar aus der zugehörigen EULER-LAGRANGE-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_K} = \frac{\partial L}{\partial q_K} \stackrel{L \text{ unabh. von } q_K}{=} 0. \quad (5.81)$$

D. h. der zu q_k gehörige kanonische Impuls $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ ist eine Erhaltungsgröße

$$\frac{d}{dt} p_k = 0. \quad (5.82)$$

Die korrespondierende Koordinate q_k heißt *zyklische Koordinate*.

Ist z. B. q_k gleich einer der rechtwinkligen Ortsraum Koordinaten x_k , dann bedeutet

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = 0, \quad (5.83)$$

dass sich die LAGRANGE-Funktion entlang der x_k -Richtung nicht ändert. Im Falle rein Geschwindigkeitsabhängiger kinetischer Energien $T = T(\dot{x}_i)$ entspricht (5.83):

$$\frac{\partial U}{\partial x_n} = 0 \implies F_k = -\frac{\partial U}{\partial x_k} = 0, \quad (5.84)$$

d. h. die Kraft verschwindet in x_k -Richtung. Für den Fall eines Massepunktes

$$T = \sum_j \frac{1}{2} m \dot{x}_j^2 \quad (5.85)$$

entspricht der kanonische Impuls mit

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = \frac{\partial (T(\dot{x}_j) - U(x_j))}{\partial \dot{x}_k} = m \dot{x}_k, \quad (5.86)$$

sodass

$$\frac{d}{dt} p_k \stackrel{(5.82)}{=} 0 \quad (5.87)$$

genau der Impulserhaltung der NEWTON'schen Dynamik entspricht.

Die hier gemachte Beobachtung geht aber weit über die (in der NEWTON'schen Formulierung nahezu triviale) Impulserhaltung hinaus: hat ein dynamisches System eine zyklische Koordinate q_k , d. h.

$$\frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i; t)}{\partial q_k} = 0, \quad (5.88)$$

dann ist das System offensichtlich *invariant unter Verschiebungen* in q_k -Richtung,

$$L(q_1, \dots, q_k + \delta_{q_k}, \dots, \dot{q}_i; t) = L(q_1, \dots, q_k, \dots, \dot{q}_i; t) \quad (5.89)$$

(da L offensichtlich nicht von (5.88) abhängt).

Aus dieser *Invarianz* folgt aus den LAGRANGE-Gleichungen eine *Erhaltungsgröße*, nämlich der kanonische Impuls

$$\boxed{\frac{d}{dt} p_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0}. \quad (5.90)$$

Der Zusammenhang zwischen Invarianz der Wirkung bzw. der LAGRANGE-Funktion, zyklische Koordinaten und Erhaltungsgrößen ist offensichtlich unabhängig von der Natur der zyklischen Koordinate.

Betrachten wir dazu Beispiel einer Winkelkoordinate: Ein Beispiel in einem Zentralkraftpotential hat die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - U(|\mathbf{r}|), \quad (5.91)$$

wobei die potentielle Energie nur vom Abstand $|\mathbf{r}|$ vom Zentrum abhängt. In Zylinderkoordinaten (r, θ, z) ist der Abstand $|\mathbf{r}| = \sqrt{r^2 + z^2}$ unabhängig von θ . In Zylinderkoordinaten lautet die Geschwindigkeit (siehe Übungen)

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \hat{e}_R + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{z} \hat{e}_z, \quad (5.92)$$

sodass die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) \quad (5.93)$$

zwar von r , nicht aber von θ abhängt.

Die LAGRANGE-Funktion ist somit unabhängig von der zyklischen Koordinate θ , $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$. Aus (5.90) folgt, dass

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \quad (5.94)$$

eine Erhaltungsgröße ist, $\frac{d}{dt} p_\theta = 0$.

Mit

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} &= (\dot{r} \hat{e}_r + z \hat{e}_z) \times (\dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{z} \hat{e}_z) \\ &= r^2 \dot{\theta} \hat{e}_r \times \hat{e}_\theta + r \dot{z} \hat{e}_r \times \hat{e}_z + z \dot{r} \hat{e}_z \times \hat{e}_r + z r \dot{\theta} \hat{e}_z \times \hat{e}_\theta \\ &= r^2 \dot{\theta} \hat{e}_z + (z \dot{r} - r \dot{z}) \hat{e}_\theta - z r \dot{\theta} \hat{e}_z \end{aligned} \quad (5.95)$$

folgt, dass

$$L_z = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_z = m (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})_z = m r^2 \dot{\theta} \stackrel{(5.94)}{\equiv} P_\theta. \quad (5.96)$$

Die entsprechende Erhaltungsgröße ist also die z -Komponente des Drehimpulses. Diese Schlussfolgerung hat auch Bestand für Potentiale, die von r und z abhängen $U(r, z)$. Für Zentralkraftpotentiale ist die Wahl der z -Achse tatsächlich völlig beliebig, so dass mit (5.96) folgt, dass $\mathbf{L} \cdot \hat{e}_z = \text{const.}$ für jedes beliebige \hat{e}_z eine Erhaltungsgröße ist, und somit

$$\mathbf{L} = \text{const.} \quad (5.97)$$

eine Erhaltungsgröße ist.

5.7 Das Noether Theorem

Die vorherigen Überlegungen und Beispiele zeigen einen Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen. Einen allgemeinen solchen Zusammenhang stellt das Noether-Theorem her.

Wir sprechen von einer Symmetrie oder Invarianz, wenn eine Transformation der (generalisierten) Koordinaten und/oder Zeit die Bewegungsgleichungen invariant lassen. Folglich sind auch die Lösungen der Bewegungsgleichungen und damit die physikalischen Observablen invariant.

Im Folgenden betrachten wir infinitesimale Transformationen der Koordinaten

$$\begin{aligned} q_i &\longrightarrow q'_i = q_i + \alpha \tilde{q}_i(t, q, \dot{q}) \\ \text{und/oder der Zeit} & \\ t &\longrightarrow t' = t + \alpha \tilde{t}(t, q, \dot{q}) \end{aligned} \quad (5.98)$$

wobei α ein *kontinuierlicher* infinitesimaler Parameter ist. Nach dem HAMILTON'schen Prinzip bleiben die Bewegungsgleichungen invariant, wenn die Wirkung invariant bleibt. Tatsächlich genügt schon eine schwächere Forderung:

lediglich die Extrempunkte der Wirkung müssen invariant bleiben. Letzteres ist insbesondere erfüllt, wenn die Wirkung sich unter (5.98) um eine Konstante ändert:

$$S \longrightarrow S' = S + \alpha \cdot \text{const.} \quad (5.99)$$

Auf dem Niveau der LAGRANGE-Funktion entspricht dies einer Änderung um eine totale Ableitung

$$S' = \int_{t'_0}^{t'_1} L(q', \dot{q}'; t') dt' = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}; t) dt + \alpha \int_{t_0}^{t_1} \frac{df}{dt} dt = S + \alpha \cdot \text{const.} \quad (5.100)$$

mit einer Funktion f , die von der Zeit und den Koordinaten q abhängen darf. Da bei der Ableitung der EULER-LAGRANGE-Gleichung die Randpunkte $q(t_0)$ und $q(t_1)$ nicht mit variiert werden, trägt $f(q, t)$ nicht zu den Bewegungsgleichungen bei. Mit der Variablensubstitution $t' \rightarrow t$ lässt sich die linke Seite von (5.100) auch schreiben als

$$\int_{t'_0}^{t'_1} L(q', \dot{q}'; t') dt' = \int_{t_0}^{t_1} L(q', \dot{q}'; t') \frac{dt'}{dt} dt. \quad (5.101)$$

Da die Wahl der Zeitpunkte t_0 und t_1 für die Ableitung der Bewegungsgleichung beliebig sind, folgt aus (5.100) mit (5.101) für die Integranden:

$$\alpha \frac{df}{dt} = L(q', \dot{q}'; t') \frac{dt'}{dt} - L(q, \dot{q}; t). \quad (5.102)$$

Nun entwickeln wir die transformierte LAGRANGE-Funktion um $\alpha = 0$:

$$L(q', \dot{q}'; t') \frac{dt'}{dt} = L(q, \dot{q}; t) + \alpha \frac{d}{d\alpha} \left[L(q', \dot{q}'; t') \frac{dt'}{dt} \right]_{\alpha=0} + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (5.103)$$

Die Invarianzbedingung (5.100) an die Wirkung lautet somit

$$L \stackrel{(5.100)}{=} \frac{d}{d\alpha} \left[L(q', \dot{q}'; t') \frac{dt'}{dt} \right]_{\alpha=0}, \quad (5.104)$$

(5.102)
(5.103)

mit f beliebig. Praktisch bedeutet dies, dass man für ein gegebenes System, d. h. gegebenes L , eine Transformation (5.98) ausführt und damit eine rechte Seite von (5.104) erhält. Kann man diese Seite als totale Ableitung $\frac{df}{dt}$ schreiben, dann ist die gewählte Transformation eine Symmetrie des Systems.

Im Folgenden wollen wir zeigen, dass im Fall einer solche Symmetrie eine Erhaltungsgröße existiert. Wir benötigen dazu, vgl. (5.98)

$$\dot{q}'_i = \dot{q}_i + \alpha \dot{\tilde{q}}_i, \quad \frac{dt'}{dt} \equiv \dot{t}' = 1 + \alpha \dot{\tilde{t}}, \quad (5.105)$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{dq'_i}{dt'} &= \frac{dt}{dt'} \dot{q}'_i = (\dot{t}')^{-1} \dot{q}'_i = \frac{\dot{q}_i + \alpha \dot{\tilde{q}}_i}{1 + \alpha \dot{\tilde{t}}} \\ &= \dot{q}_i + \alpha \dot{\tilde{q}}_i - \alpha \dot{q}_i \dot{\tilde{t}} + \mathcal{O}(\alpha^2). \end{aligned} \quad (5.106)$$

Zur Berechnung von (5.104), rechte Seite, benötigen wir nur die Terme bis zur ersten Ordnung in α , d. h.

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &\stackrel{(5.104)}{=} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \underbrace{\frac{dq'_i}{d\alpha}}_{=\dot{q}_i} \Big|_{\alpha=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \underbrace{\left(\frac{dq'_i}{dt'} \right)}_{=\dot{q}_i - \dot{q}_i \dot{\tilde{t}}} \Big|_{\alpha=0} + \frac{\partial L}{\partial t} \underbrace{\frac{dt'}{d\alpha}}_{=\dot{\tilde{t}}} \Big|_{\alpha=0} + L \underbrace{\frac{dt'}{d\alpha}}_{=\dot{\tilde{t}}} \Big|_{\alpha=0} \right] \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \tilde{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{\tilde{q}}_i \right) + \left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \dot{\tilde{t}} + \frac{\partial L}{\partial t} \tilde{t}, \end{aligned} \quad (5.107)$$

wobei hier $L = L(q_i, \dot{q}_i; t)$.

Mit der EULER-LAGRANGE-Gleichung $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ gilt

$$\frac{df}{dt} = \sum_i \left(\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \tilde{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{\tilde{q}}_i \right) + \left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \dot{\tilde{t}} + \frac{\partial L}{\partial t} \tilde{t}. \quad (5.108)$$

Mit

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_i \left(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{\tilde{q}}_i}_{=\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}} \right) + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_i \left(\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{\tilde{q}}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \frac{d}{dt} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \end{aligned} \quad (5.109)$$

und somit

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left(L - \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \quad (5.110)$$

folgt aus (5.108)

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tilde{q}_i + \left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \tilde{t} \right] \quad (5.111)$$

Damit erhalten wir die wichtige Aussage, dass zu jeder Symmetrie der Wirkung, d. h. (5.99) oder (5.100) oder (5.104), unter der Transformation (5.98) die Größe

$$J(q, \dot{q}_i; t) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tilde{q}_i + \left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \tilde{t} - f \quad (5.112)$$

zeitlich erhalten ist, wenn $q_i(t)$ die Bewegungsgleichung erfüllt. Zu jeder kontinuierlichen Transformation (5.98) die einer Symmetrie entspricht, gehört somit eine Erhaltungsgröße.

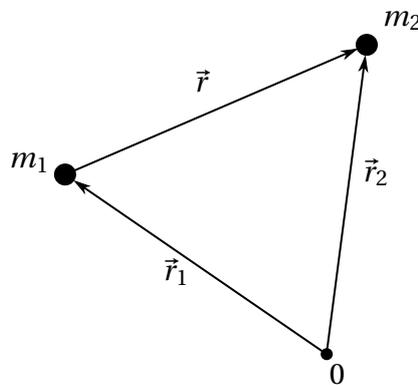
6 Das klassische Zwei-Körper-Problem

Wir betrachten im Folgenden die Bewegung zweier Körper, die aufeinander Kräfte entlang ihrer Verbindungslinie ausüben (Zentralkräfte). Dieses System ist offensichtlich für die Himmelsmechanik von großer Bedeutung. Entspricht die genannte Kraft der Gravitationskraft, spricht man von „KEPLER-Problem“.

Wie wir sehen werden, ist das Problem exakt lösbar (was für das 3-, 4-, etc. Körperproblem nicht mehr gilt).

6.1 Relativkoordinaten

Aufgrund der Zentralkraftnatur kann die potentielle Energie des Systems nur vom Abstand der Körper abhängen.



$$U = U(|\mathbf{r}|) \quad \text{mit} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1. \quad (6.1)$$

Die Lagrange-Funktion lautet somit

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2 - U(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|). \quad (6.2)$$

Der Schwerpunkt des Systems ist definiert durch

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{M} \mathbf{r}_1 + \frac{m_2}{M} \mathbf{r}_2 \quad \text{mit} \quad M = m_1 + m_2. \quad (6.3)$$

Da (6.1) & (6.3) eine lineare Transformation von $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rightarrow (\mathbf{r}, \mathbf{R})$ darstellen, können wir statt \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 auch die Koordinaten \mathbf{r} und \mathbf{R} verwenden. Aus (6.1) & (6.3) folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{R} - \frac{m_2}{M} \mathbf{r} \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{R} + \frac{m_1}{M} \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

In den Koordinaten \mathbf{R} und \mathbf{r} lautet die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 - U(|\mathbf{r}|) \quad (6.5)$$

mit der *reduzierten Masse*

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{M} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (6.6)$$

Der Schwerpunkt \mathbf{R} ist offensichtlich eine zyklische Koordinate $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{R}_i} = 0$, so dass der zugehörige Schwerpunktsimpuls

$$\mathbf{P} = M\dot{\mathbf{R}} = \text{const.} \quad (6.7)$$

eine Erhaltungsgröße ist. Dies ist offensichtlich gleichbedeutend damit, dass sich der Schwerpunkt des Systems kräftefrei bewegt. Damit ist das Koordinatensystem, in dem der Schwerpunkt ruht, ebenfalls ein Inertialsystem, in welchem wir im Folgenden die Dynamik des 2-Körper-Problems beschreiben.

Wir wählen den Ursprung derart, dass $\mathbf{R} = 0$. Das verbleibende Problem ist nun rein in der Relativkoordinate \mathbf{r} formuliert.

$$L = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - U(r), \quad r = |\mathbf{r}|. \quad (6.8)$$

Sobald wir $\mathbf{r}(t)$ kennen, lässt sich \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 mittels (6.4) bestimmen. (6.8) macht deutlich, dass wir das 2-Körperproblem effektiv auf ein äquivalentes Ein-Teilchen-Problem abgebildet haben, bei dem sich ein effektives Teilchen mit reduzierter Masse μ im Zentralkraftpotential $U(r)$ befindet.

6.2 Erhaltungssätze

Das Zwei-Körper-Problem dient auch als gutes Beispiel dafür, wie Symmetrien und Erhaltungssätze die Lösung von Bewegungsgleichungen vereinfachen können. Da $U = U(|\mathbf{r}|)$ gilt, besitzt das Problem sphärische Symmetrie. Wie in (5.91) und folgend gezeigt, impliziert dies die Erhaltung des Drehimpulses

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \text{const.} \quad (6.9)$$

Um (6.9) zu allen Zeiten t zu erfüllen, müssen \mathbf{r} und \mathbf{p} zu allen Zeiten in einer Ebene liegen, deren Normale in \mathbf{L} -Richtung zeigt. Die Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ liegt damit ebenfalls in dieser zeitlich unveränderlichen Ebene, so dass $\mathbf{r}(t)$ durch 2-dimensionale Polarkoordinaten aufgespannt werden kann

$$\mathbf{r} = r\hat{e}_r, \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \quad (6.10)$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r). \quad (6.11)$$

Offensichtlich ist θ eine zyklische Koordinate, deren zugehörige Erhaltungsgröße dem Drehimpuls entspricht,

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \stackrel{(5.94)}{=} \mu r^2 \dot{\theta} = L_z = \text{const.} \quad (6.12)$$

(NB.: da \mathbf{r} in der „polaren“ (x, y) Ebene gewählt wurde, hat \mathbf{L} in diesen Koordinaten nur eine L_z -Komponente.)

Aus Konventionsgründen wir diese Konstante „ l “ genannt:

$$l := \mu r^2 \dot{\theta} = \text{const.} \quad (6.13)$$

Im Zwei-Körper-Problem hat die Drehimpulserhaltung eine einfache anschaulich geometrische Interpretation: die Fläche, die der Vektor $\mathbf{r}(t)$ in einem Zeitintervall dt überstreicht, ist gegeben durch:

$$dA = \frac{1}{2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} d\theta. \quad (6.14)$$

Daraus folgt für die „Flächengeschwindigkeit“

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{l}{2\mu} = \text{const.} \quad (6.15)$$

Der Vektor der Bahnkurve überstreicht also in gleichen Zeiten gleiche Flächen unabhängig vom momentanen Abstand $r(t)$. Dies ist das berühmte 2. KEPLER'sche Gesetz, das KEPLER empirisch aus den Beobachtungen von TYCHO BRAHE herausgelesen hat (KEPLER 1609). Dieses Gesetz ist nicht auf gravitativ wechselwirkende Körper beschränkt, sondern gilt für allgemeine Zentralkräfte.

Als nächstes betrachten wir die Gesamtenergie. Da das System wegen

$$\frac{\partial L}{\partial t} \stackrel{(6.11)}{=} 0 \quad (6.16)$$

abgeschlossen ist, ist die Gesamtenergie erhalten (die Voraussetzungen für $H = E = \text{const.}$ sind erfüllt):

$$T + U = E = \text{const.} \quad (6.17)$$

mit

$$E = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + U(r) \quad (6.18)$$

$$= \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2} + U(r). \quad (6.19)$$

Wegen der Drehimpulserhaltung lässt sich die Energie in der Form eines effektiven 1-dimensionalen Problems schreiben. Der Beitrag des Drehimpulses $\sim \frac{l^2}{r^2}$ hat dabei die Form eines zusätzlichen Potentialterms.

6.3 Bewegungsgleichungen

Sobald eine Potentielle Energie $U(r)$ gewählt ist, kann aus dem Energieerhaltungssatz die gesamte Lösung des Problems bestimmen werden. Dazu lösen wir (6.19) auf nach

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - U(r)) - \frac{l^2}{\mu^2 r^2}}. \quad (6.20)$$

Separation der Variablen führt auf

$$\int_{t_0}^t dt = \pm \int_{r(t_0)}^{r(t)} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} (E - U(r)) - \frac{l^2}{\mu^2 r^2}}} \quad (6.21)$$

woraus sich nach Integration durch Bildung der Umkehrfunktion $r(t)$ bestimmen lässt. Für die (astronomische) Beobachtung ist aber der Abstand als Funktion des Polarwinkels $r(\theta)$ die interessante Größe. Wegen

$$d\theta = \frac{d\theta}{dt} \frac{dt}{dr} dr = \frac{\dot{\theta}}{\dot{r}} dr = \frac{l}{\mu r^2 \dot{r}} dr \quad (6.22)$$

folgt aus (6.21):

$$\theta(r) = \int \frac{l/r^2 dr}{\sqrt{2\mu(E - U(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2})}}. \quad (6.23)$$

Anders als in (6.20) müssen wir in (6.23) Fallunterscheidung in dem Vorzeichen durchführen, da wegen $l = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{const.} > 0$ $\theta(t)$ nur monoton in der Zeit zunehmen kann. Für Potentielle Energien der Form $U(r) \sim r^n$ kann das Integral (6.23) z. T. durch spezielle Funktion dargestellt werden (für bestimmte Werte von n können sich z. B. elliptische Integrale ergeben). Lediglich für $n = 2, -1, -3$ lässt sich die Lösung durch elementare Funktionen darstellen. Dabei ist $n = 2$ der harmonische Oszillator (bzw. äquivalent dazu) und $n = -1$ entspricht dem Gravitationspotential, also dem KEPLER-Problem.

Bevor wir uns konkrete Lösungen der Bewegungsgleichungen erarbeiten, wollen wir einen qualitativen Blick auf das System werfen. Eine entscheidende Rolle für die verschiedenen Lösungstypen spielt der Ausdruck

$$E - U(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2}. \quad (6.24)$$

Den Drehimpuls $\frac{l^2}{2\mu r^2}$ betrachten wir als effektiven Beitrag zum Potential; wir definieren ein effektives Potential durch

$$V(r) = U(r) + U_c(r) \text{ mit } U_c(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} \quad (6.25)$$

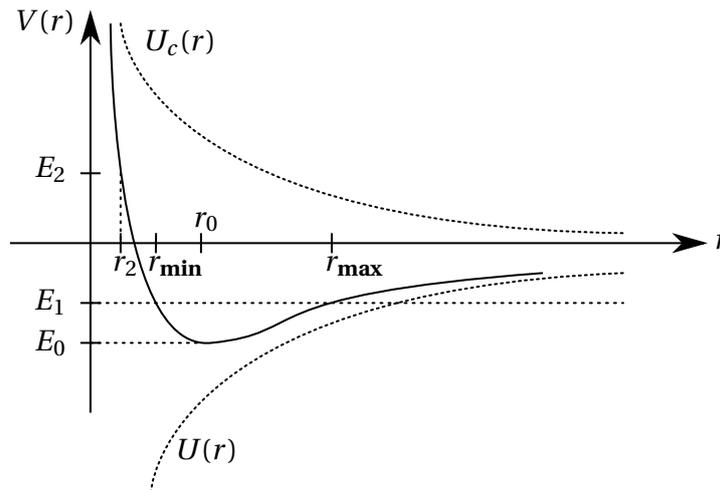
dem „Zentrifugalpotential“. Diesem effektiven Potential können wir eine effektive radiale Kraft zuordnen

$$F_c = -\frac{\partial U_c}{\partial r} = \frac{l^2}{\mu r^3} \stackrel{l=\mu r^2 \dot{\theta}}{=} \mu r \dot{\theta}^2 \quad (6.26)$$

die „Zentrifugalkraft“ (vgl. $F_c = m r \omega^2$).

Dabei handelt es sich um keine eigentliche Kraft im NEWTON'schen Sinne, sondern um eine Hilfsgröße, die sich in der radialen Bewegungsgleichung wie eine radiale Kraft äußert. Für $l > 0$ lassen sich nun anhand von (6.24) die möglichen Lösungstypen klassifizieren: $E - V(r)$. Wir spezialisieren uns auf die gravitative Zentralkraft mit

$$U(r) = -\frac{k}{r} \text{ mit } k = G m_1 m_2. \quad (6.27)$$



Die radiale Geschwindigkeit hatten wir in (6.20) bestimmt

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu}} \sqrt{E - V(r)}. \quad (6.28)$$

Die kleinste sinnvolle Gesamtenergie des Systems ist gemäß Skizze gegeben durch $E_0 = V(r_0)$, wobei r_0 das Minimum des effektiven Potentials beschreibt

$$\begin{aligned} V(r) &= -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2\mu r} \\ \Rightarrow 0 &= \frac{d}{dr} V(r = r_0) = \frac{k}{r_0^2} - \frac{l^2}{\mu r_0^3} = \frac{k}{r_0^3} \left(r_0 - \frac{l}{k\mu} \right) \\ \Rightarrow r_0 &= \frac{l^2}{k\mu} \quad (\text{historisch: } r_0 =: \alpha). \end{aligned} \quad (6.29)$$

Für diese minimale Energie $E = E_0$, löst

$$r(t) = r_0 = \text{const.} \Rightarrow \dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} \underbrace{\sqrt{E_0 - V(r_0)}}_{=0}}$$

die Bewegungsgleichung. Die Bahnkurve hat konstanten Radius, d. h. ihre Zeitentwicklung liegt auf einer Kreisbahn.

(NB: Energien mit $E < E_0$ entsprechen imaginären Geschwindigkeiten und beschreiben daher keine physikalisch sinnvolle Lösungen.)

Falls die Gesamtenergie $E = E_2 \geq 0$ ist, ist die Bewegung ungebunden. Das „Teilchen“ kann sich auf das Kraftzentrum zu bewegen („-“ Vorzeichen in (6.28)), bis für einen Punkt r_2 gilt: $E_2 - V(r_2) = 0$. Hier verschwindet die Geschwindigkeit an diesem Umkehrpunkt r_2 und das Teilchen läuft mit positiver Geschwindigkeit („+“) nach $r \rightarrow \infty$. Für den asymptotischen Fall $E = 0$ gilt die Geschwindigkeit für $r \rightarrow 0$ gegen Null.

Für negative Energien $E_0 < E_1 < 0$ ist die Bewegung gebunden, $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$, und die Bahnkurve bewegt sich zwischen dem Umkehrpunkt $r_{\min/\max}$ an denen die radiale Geschwindigkeit jeweils verschwindet $\dot{r}|_{r_{\min,\max}} = 0$. Die Umkehrpunkte heißen in der Astronomie *Apsiden*.

6.4 Das Kepler-Problem

Für das Gravitationspotential $U(r) = -\frac{k}{r}$ lässt sich der Ausdruck (6.23)

$$\theta(r) = \int \frac{\frac{l}{r^2} dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \sqrt{E - U(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2}}}} \quad (6.30)$$

elementar integrieren (vgl. Übungen). Die Lösung lässt sich in folgender Form darstellen

$$\cos\theta = \frac{\frac{l}{\mu k} \frac{1}{r} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{2\mu k^2}}}, \quad (6.31)$$

wobei die Integrationskonstante üblichen Zusammenhängen angepasst wurde (siehe unten). Der Zusammenhang zwischen (6.31) und (6.30) lässt sich durch Ableiten von (6.31) direkt verifizieren.

Wir definieren die Parameter

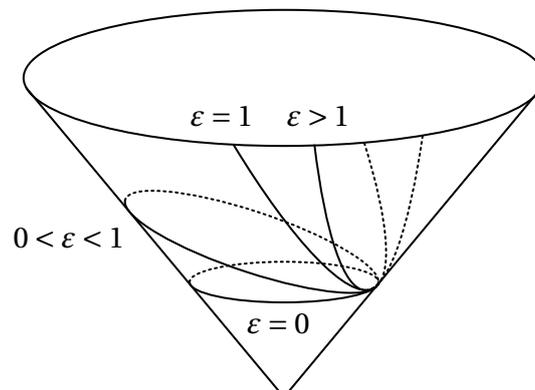
$$\alpha = \frac{l^2}{\mu k}, \quad = r_0, \text{ vgl. (6.29) „latus rectum“} \quad (6.32)$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \text{ „Exzentrizität“,} \quad (6.33)$$

sodass die Bewegungsgleichung (6.31) die einfache Form erhält

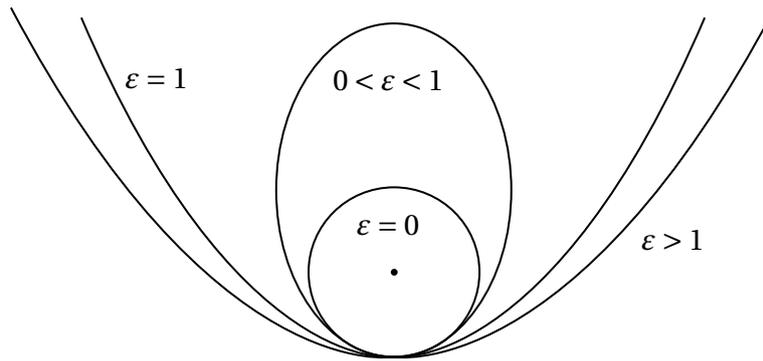
$$\frac{\alpha}{r} = 1 + \varepsilon \cos\theta. \quad (6.34)$$

Die Gleichung beschreibt *Kegelschnitte*, d. h. Schnittkurven zwischen einem Kegel und einer Ebene.



Neben dem Parameter α , der im Wesentlichen vom Drehimpuls gesteuert wird, wird die Form der Bahnkurve von der Exzentrizität ε und damit (für festes l) von der Energie gesteuert.

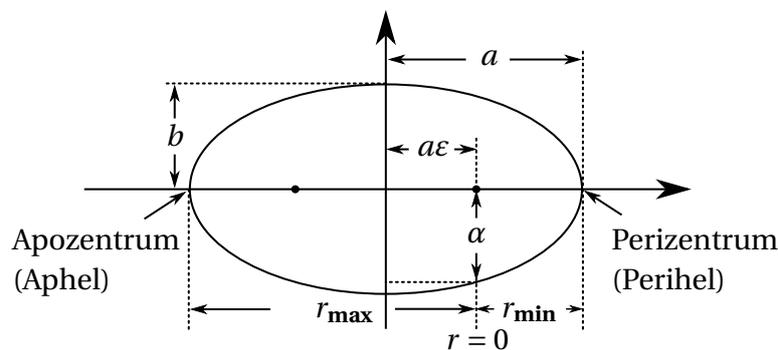
Es ergibt sich:



$\varepsilon = 0$	Kreis
$0 < \varepsilon < 1$	Ellipse
$\varepsilon = 1$	Parabel
$\varepsilon > 1$	Hyperbel

Dabei beschreibt $\varepsilon \geq 1$ die ungebundenen (Streu-)Zustände, wobei $\varepsilon = 1$ genau dem oben beschriebenen asymptotischen Fall $E = 0$ entspricht. $0 \leq \varepsilon < 1$ entspricht den gebundenen Zuständen, die im KEPLER-Problem dem Planetenbahnen zugeordnet werden können und i. A. Ellipsen beschreiben (bzw. Kreis für $\varepsilon = 0$).

Dabei befindet sich der Ursprung $r = 0$ in einem Focus.



Nach (6.34) ergibt sich für die Apsiden ($\theta = 0$ entspricht r_{\min})

$$r_{\min} = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon}, \quad r_{\max} = \frac{\alpha}{1 - \varepsilon}. \quad (6.35)$$

Daraus folgt für die große Halbachse

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}(r_{\min} + r_{\max}) = \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{1 - \varepsilon + 1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \right) \\ &= \frac{\alpha}{1 - \varepsilon^2} = \frac{k}{2|E|}. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Entsprechend kann man die Apsiden durch die große Halbachse ausdrücken

$$r_{\min} = a(1 - \varepsilon), \quad r_{\max} = a(1 + \varepsilon). \quad (6.37)$$

Damit folgt, dass der Fokus (in dem das Kraftzentrum liegt) um $a\varepsilon$ vom Mittelpunkt der Ellipse verschoben ist. Mit elementarer Trigonometrie folgt für die kleine Halbachse aus der Bewegungsgleichung (6.34)

$$b = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{l}{\sqrt{2\mu|E|}}. \quad (6.38)$$

Daraus folgt mit (6.36) der Zusammenhang

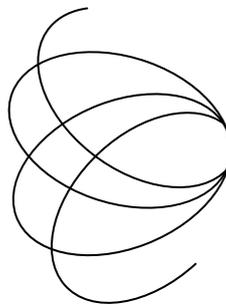
$$b = \sqrt{\alpha a}. \quad (6.39)$$

Die Tatsache, dass die Bahnkurve eine Ellipse ist mit dem Kraftzentrum (z. B. Sonne) in einem Fokus, entspricht genau dem Inhalt des 1. KEPLER'schen Gesetzes. Vom Blickwinkel der allgemeinen Bewegungsgleichung (6.30)

$$\theta(r) = \int \frac{\frac{l}{r^2} dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \sqrt{E - U(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2}}}} \quad (6.40)$$

muss dies als Besonderheit des $U(r) \sim \frac{1}{r}$ -Potentials gewertet werden: dazu muss nämlich das Integral auf der rechten Seite von r_{\min} nach r_{\max} genau π ergeben, damit z. B. nach einem Umlauf in der radialen Bewegung $r_{\min} \rightarrow r_{\max} \rightarrow r_{\min}$ genau ein Winkelumlauf von 2π erreicht ist.

z. B. erwarten wir daher für leichte Abweichungen vom $\frac{1}{r}$ -Potential, dass das obige Integral von r_{\min} bis r_{\max} nicht genau π ergibt. In diesem Fall schließt der Orbit nicht und wir erwarten Verschiebungen des Perihels.



Da in der Tat im Sonnensystem die Anwesenheit weiterer Planeten sowie allgemein Relativistische Effekte zu klaren Abweichungen vom $\frac{1}{r}$ -Potential führen, werden solche Perihelverschiebungen insbesondere beim Merkur (sonnennächster Planet mit größerer Exzentrizität) beobachtet. Tatsächlich war die Erklärung der bis dahin unvollständig verstandenen Perihelverschiebung des Merkurs eines der ersten Triumphe von Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie.

6.5 Beispiel: Eigenschaften der Planetenbahnen im Sonnensystem

	a /[A.U.]	Periode/[Jahre]	ϵ	Masse (Erde)
Sonne	-	-	-	333480
Erde	1	1	0,0167	1
Merkur	0,3781	0,2408	0,2056	0,0543
Mars	1,5237	1,8809	0,0934	0,1071
Saturn	9,5388	29,458	0,0557	95
Pluto	39,518	248,430	0,2486	0.002
Halley	18	76	0,967	$3e-11$

$$A \cdot U = 1,495 \cdot 10^{11} \text{ m}, \text{ Erdmasse} = 5,976 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Schließlich wollen wir die Periode τ der elliptischen Bewegung bestimmen. Diese erhalten wir aus der Flächengeschwindigkeit (6.15)

$$dA = \frac{l}{2\mu} dt \quad (6.41)$$

$$\Rightarrow \int_0^\tau dt = \frac{2\mu}{l} \int_0^A dA \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{2\mu}{l} A}. \quad (6.42)$$

Die Fläche einer Ellipse ist gegeben durch

$$A = \pi ab \stackrel{(6.36)/(6.38)}{=} \pi \frac{k}{2|E|} \frac{l}{\sqrt{2\mu|E|}} = \frac{\pi k l}{2\sqrt{2\mu|E|}^{3/2}} \quad (6.43)$$

$$\stackrel{(6.42)}{\Rightarrow} \boxed{\tau = \pi k \sqrt{\frac{\mu}{2}} |E|^{-3/2}}, \quad (6.44)$$

d. h. im KEPLERproblem hängt die Periode nur von der Energie, nicht aber vom Drehimpuls ab. Da die Energie über $a \stackrel{(6.36)}{=} \frac{k}{2|E|}$ direkt mit der großen Halbachse verknüpft ist, lässt sich die Periode auch in der Form

$$\boxed{\tau^2 = \frac{4\pi^2 \mu}{k} a^3} \quad (6.45)$$

schreiben.

Dieses Resultat, dass die Quadrate der Perioden proportional zu den Kuben der Halbachsen sind, nennt man 3. KEPLER'sche Gesetz.

KEPLER nahm an, dass für alle Planeten die gleiche Proportionalitätskonstante im Gesetz auftaucht. Tatsächlich erfüllt (6.45) die reduzierte Masse $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ und die Konstanten $k = G(m_1 + m_2)$, d. h. es gilt

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2 \cancel{m_1} \cancel{m_2}}{G \cancel{m_1} \cancel{m_2} (m_1 + m_2)} a^3 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3, \quad (6.46)$$

d. h. für jeden Planeten gilt mit $m_1 + m_2 = m_{\text{Sonne}} + m_{\text{Planet}}$ eine leicht veränderte Proportionalitätskonstante. Da im Sonnensystem allerdings $m_{\text{Sonne}} \gg m_{\text{Planet}}$ gilt, ist das 3. KEPLER'sche Gesetz in der Form

$$\tau^2 \approx \frac{4\pi^2}{G m_{\text{Sonne}}} a^3 \quad (6.47)$$

eine sehr gute Näherung.

7 Mechanik eines Systems von Massepunkten

Im Folgenden wollen wir ein allgemeines System von N Massepunkten mit den Massen m_i , $i = 1, \dots, n$ betrachten, die aufeinander Kräfte ausüben und zusätzlich unter dem Einfluss einer äußeren Kraft stehen $\mathbf{F}^{(e)}$. Die Überlegungen finden eine direkte Anwendung bei der Beschreibung von z. B. Kugelsternhaufen, Galaxienhaufen oder Simulationen der Verteilung von Dunkler Materie in Galaxien.

7.1 Schwerpunktsbewegung

Seien die Bahnkurven der Massepunkte gegeben durch die Funktion $\mathbf{x}_i(t)$. Die Kraft des i -ten Massepunkts auf den j -ten sei \mathbf{F}_{ij} . Nach NEWTON III gilt:

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}, \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji} = 0, \quad (7.1)$$

d. h. die inneren Kräfte heben sich paarweise auf.

Die äußere Kraft auf den i -ten Massepunkt sei $\mathbf{F}_i^{(e)}$. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_i^{(e)}. \quad (7.2)$$

Der Schwerpunkt des Systems ist (Verallgemeinerung von (6.3)) definiert durch

$$\mathbf{X} := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i, \quad M = \sum_{i=1}^N m_i \quad (7.3)$$

mit der Gesamtmasse M .

Die Summe der Bewegungsgleichungen ergibt

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \ddot{\mathbf{x}}_i &= \sum_{i,j \neq i} \mathbf{F}_{ji} + \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} \stackrel{j_i = i_j}{=} \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} \underbrace{(\mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_{ij})}_{\stackrel{(7.1)}{=} 0} + \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(e)}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Mit (7.3) lässt sich dies schreiben als

$$M \ddot{\mathbf{X}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(e)}. \quad (7.5)$$

Die inneren Kräfte heben sich also paarweise auf, und die Bewegung des Gesamtsystems ist durch die Bewegung des Schwerpunkts gegeben, an dem die Summe aller äußeren Kräfte angreifen. Wirken keine äußeren Kräfte, folgt

$$M \ddot{\mathbf{X}} = 0 \implies M \dot{\mathbf{X}} = \text{const.} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{X}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \mathbf{P} \quad (7.6)$$

d. h. der Gesamtimpuls bleibt erhalten und die Schwerpunktsbewegung lautet

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 + \frac{\mathbf{P}}{M} (t - t_0). \quad (7.7)$$

7.2 Drehimpuls und Energie

Im Folgenden nehmen wir an, dass die inneren Kräfte längs der Verbindungslinie zwischen den Massepunkten wirken

$$\mathbf{F}_{ij} \parallel (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad , \quad \mathbf{F}_{ji} \times (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = 0 \quad (7.8)$$

wie dies z. B. für gravitativ-wechselwirkende Massepunkte der Fall ist. Der Drehimpuls des i -ten Massepunkts bezüglich des Koordinatenursprungs ist

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{x}_i \times \mathbf{p}_i = m_i(\mathbf{x}_i \times \dot{\mathbf{x}}_i). \quad (7.9)$$

Der Gesamtdrehimpuls ist folglich

$$\mathbf{L} := \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i = \sum_i m_i(\mathbf{x}_i \times \dot{\mathbf{x}}_i). \quad (7.10)$$

Die Zeitableitung des Drehimpulses ergibt

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i(\mathbf{x}_i \times \dot{\mathbf{x}}_i) = \sum_i \left(\mathbf{x}_i \times \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji} \right) + \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} (\mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{x}_j \times \mathbf{F}_{ij}) + \sum_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} \underbrace{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \times \mathbf{F}_{ji}}_{\stackrel{(7.8)}{=} 0} + \sum_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)} \\ &= \sum_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Innere Kräfte tragen also auch zum Gesamtdrehimpuls eines Systems von Massepunkten nicht bei.

Die rechte Seite von (7.11) definieren wir als *Gesamtdrehmoment*

$$\mathbf{M} := \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)}, \quad (7.12)$$

sodass der Drehimpulssatz für ein System von Massepunkten lautet

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}. \quad (7.13)$$

Da der Drehimpuls von der Wahl des Koordinatenursprungs abhängt, gibt es ein günstiges Koordinatensystem, dass durch das System, in dem der Schwerpunkt ruht, gegeben ist. Wir erhalten dieses Schwerpunktsystem (mit dem Schwerpunkt im Koordinatenursprung) durch die Transformation

$$\mathbf{x}_i \longrightarrow \mathbf{x}'_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{X}. \quad (7.14)$$

Aus der Definition des Schwerpunkts folgt

$$\sum_i m_i \mathbf{x}'_i = \sum_i m_i \mathbf{x}_i - M \mathbf{x} = 0 \quad (7.15)$$

und damit auch

$$0 = \sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}'_i, \quad \text{mit } \dot{\mathbf{x}}'_i = \dot{\mathbf{x}}_i - \dot{\mathbf{X}}. \quad (7.16)$$

D. h. der Gesamtimpuls im Schwerpunktsystem verschwindet, $\mathbf{P}' = 0$.

Der Gesamtdrehimpuls im Schwerpunktsystem lässt sich aus der Zerlegung des Drehimpulses im ursprünglichen System extrahieren:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{L}} &= \sum_{i=1}^N (\mathbf{x}_i \times m_i \dot{\mathbf{x}}_i) = \sum_i m_i (\mathbf{X} + \mathbf{x}'_i) \times (\dot{\mathbf{X}} + \dot{\mathbf{x}}'_i) \\ &= \mathbf{X} \times M \dot{\mathbf{X}} + \underbrace{\mathbf{X} \times \sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}'_i}_{\stackrel{(7.16)}{=} 0} + \underbrace{\sum_i m_i \mathbf{x}'_i \times \dot{\mathbf{X}}}_{\stackrel{(7.15)}{=} 0} + \sum_i \mathbf{x}'_i \times m_i \dot{\mathbf{x}}'_i \\ &= \mathbf{X} \times M \dot{\mathbf{X}} + \sum_{i=1}^N \mathbf{x}'_i \times m_i \dot{\mathbf{x}}'_i. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Der erste Term in (7.17) ist der *Drehimpuls* des *Gesamtsystems* bezüglich des Ursprungs und der zweite Term ist der *innere Drehimpuls* des Systems.

Im Folgenden nehmen wir zusätzlich an, dass die inneren und äußeren Kräfte Potentialkräfte seien, es sollen also Potentiale V_{ji} existieren, so dass

$$\mathbf{F}_{ji} = -\nabla_i V_{ji}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|). \quad (7.18)$$

Die Potentiale erfüllen somit $V_{ji} = V_{ij}$, und wir definieren $V_{ii} = 0$. in (7.18) haben wir $\nabla_i := \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i}$ verwendet. Für die äußeren Kräfte gelte entsprechend

$$\mathbf{F}_i^{(e)} = -\nabla_i V_i^{(e)}(\mathbf{x}_i). \quad (7.19)$$

Die Bewegungsgleichung für den i -ten Massepunkt lautet nun

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = - \sum_{j \neq i} \nabla_i V_{ji}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|) - \nabla_i V_i^{(e)}(\mathbf{x}_i). \quad (7.20)$$

Wir multiplizieren mit $\dot{\mathbf{x}}_i$ und summieren über alle i :

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \ddot{\mathbf{x}}_i + \sum_{i,j \neq i} \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \nabla_i V_{ji} + \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \nabla_i V_i^{(e)} = 0 \quad (7.21)$$

was als totale Zeitableitung geschrieben werden kann

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{x}}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ji}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|) + \sum_i V_i^{(e)}(\mathbf{x}_i) \right] = 0. \quad (7.22)$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ im obigen Term kommt aus folgender Überlegung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{i,j} V_{ji}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|) &= \sum_{i,j} (\dot{\mathbf{x}}_i \cdot \nabla_i V_{ji} + \dot{\mathbf{x}}_j \cdot \nabla_j V_{ji}) \\ &= \sum_{i,j} (\dot{\mathbf{x}}_i \cdot \nabla_i V_{ji} + \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \underbrace{\nabla_i V_{ij}}_{=V_{ji}}) = 2 \sum_{i,j} (\dot{\mathbf{x}}_i \cdot \nabla_i V_{ji}). \end{aligned}$$

Gleichung (7.22) entspricht dem Energiesatz für N -Teilchensysteme. Dabei ist

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{x}}_i^2 \quad (7.23)$$

die gesamte kinetische Energie und

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ji} + \sum_i V_i^{(e)} \quad (7.24)$$

die gesamte potentielle Energie, und es gilt

$$E = T + V = \text{const.} \quad (7.25)$$

7.3 Elastische Zwei-Körper-Stöße

Im Zwei-Körper-Problem im Kapitel 6 haben wir die Konzepte Schwerpunkt, Drehimpuls und Energieerhaltung für N -Teilchensysteme bereits für den Spezialfall $N = 2$ und insbesondere gebundene Zustände verwendet. Im Folgenden wollen wir Stoß- oder Streuprozesse diskutieren. Wir führen diese Betrachtung unter zwei Grundannahmen durch

1. Der Stoßprozess verläuft elastisch, d. h. keine Energie geht in innere Anregungen, Deformationen, Reibung, etc. der Stoßteilchen. Die Energieerhaltung wird allein durch die kinetischen und potentiellen (aus der Wechselwirkung entstehenden) Energien getragen
2. Die Wechselwirkung ist "kurzreichweitig", d. h. die potentiellen Energien der Wechselwirkung der Teilchen fallen mit zunehmender Distanz hinreichend schnell ab. Dadurch kann die Energieerhaltung bei "asymptotisch" großen Abständen allein auf Basis der kinetischen Energien diskutiert werden. Beispiele für kurzreichweitige Wechselwirkungen sind Stoßprozesse (Metallkugeln, ...) mit Kontaktwechselwirkung. Hingegen wäre ein Wechselwirkungspotential $V_{ji} \sim |x_i - x_j|^2$ langreichweitig. Das Gravitations- oder COULOMB-Potential von Typ $V(r) \sim \frac{1}{r}$ ist ein Grenzfall. Für die Überlegungen im folgenden Abschnitt dürfen wir es als hinreichend kurzreichweitig betrachten.

7.3.1 Erhaltungssätze

Gegeben seien zwei Teilchen mit den Massen m_1 und m_2 : ihre Geschwindigkeiten seien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ vor und $\tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_2$ nach dem Stoß. Abgesehen von der (kurzreichweitigen) wechselseitigen Wechselwirkung bewegen sich die Teilchen kräftefrei. Daher gilt der *Impulserhaltungssatz*:

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \tilde{\mathbf{v}}_1 + m_2 \tilde{\mathbf{v}}_2. \quad (7.26)$$

Die Energieerhaltung verlangt

$$\frac{m_1}{2} \mathbf{v}_1^2 + \frac{m_2}{2} \mathbf{v}_2^2 = \frac{m_1}{2} \tilde{\mathbf{v}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \tilde{\mathbf{v}}_2^2. \quad (7.27)$$

Der Erhaltungssätze werden im Schwerpunktsystem besonders transparent. Die Koordinaten relativ zum Schwerpunkt lauten

$$\mathbf{x}'_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{X} \quad , \quad \mathbf{X} = \frac{1}{M}(m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2). \quad (7.28)$$

Der Abstand der Teilchen ist natürlich in beiden Systemen identisch

$$\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_2 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2. \quad (7.29)$$

Geschwindigkeiten und Beschleunigungen im Schwerpunktsystem sind

$$\dot{\mathbf{x}}'_i = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{X}} \quad , \quad \ddot{\mathbf{x}}'_i = \ddot{\mathbf{x}}_i - \underbrace{\ddot{\mathbf{X}}}_{=0} = \ddot{\mathbf{x}}_i = -\nabla'_i V(|\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_2|). \quad (7.30)$$

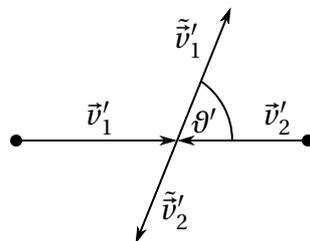
Im Schwerpunktsystem lauten die Erhaltungssätze

$$\frac{m_1}{2} \mathbf{v}'_1{}^2 + \frac{m_2}{2} \mathbf{v}'_2{}^2 = \frac{m_1}{2} \tilde{\mathbf{v}}_1{}^2 + \frac{m_2}{2} \tilde{\mathbf{v}}_2{}^2 \quad (7.31)$$

$$m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2 = m_1 \tilde{\mathbf{v}}_1 + m_2 \tilde{\mathbf{v}}_2 \stackrel{(7.16)}{=} 0 \quad (7.32)$$

(der Gesamtimpuls verschwindet im Schwerpunktsystem, vergleiche mit (7.16)). Damit folgt

$$\begin{aligned} m_1 \mathbf{v}'_1 &= -m_2 \mathbf{v}'_2 \\ m_1 \tilde{\mathbf{v}}_1 &= -m_2 \tilde{\mathbf{v}}_2. \end{aligned} \quad (7.33)$$



Der Winkel zwischen Einfalls- und Ausfallsrichtung heißt *Streuwinkel*. Im Schwerpunktsystem ist er wegen (7.33) für beide Teilchen gleich.

(7.33) kann nun verwendet werden, um im Energiesatz \mathbf{v}'_2 und $\tilde{\mathbf{v}}'_2$ durch \mathbf{v}'_1 , $\tilde{\mathbf{v}}'_1$ auszudrücken:

$$\begin{aligned} m_1 \mathbf{v}'_1{}^2 + m_2 \left(\frac{m_1}{m_2} \mathbf{v}'_1 \right)^2 &= m_1 \tilde{\mathbf{v}}_1{}^2 + m_2 \left(\frac{m_1}{m_2} \tilde{\mathbf{v}}_1 \right)^2 \\ \Rightarrow |\mathbf{v}'_1| &= |\tilde{\mathbf{v}}_1| \quad , \quad |\mathbf{v}'_2| = |\tilde{\mathbf{v}}_2|. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Die Beträge der Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoß sind im Schwerpunktsystem also für beide Massepunkte gleich.

Damit sind die Erhaltungssätze ausgenutzt. Sie machen also keine Aussage über den Streuwinkel $0 \leq \vartheta' \leq \pi$. Dieser hängt von der Form des zwischen den Körpern herrschenden Kraftgesetzes ab.

Andersherum lässt sich aus der Vermessung des Streuwinkels Information über die Natur der Wechselwirkung erlangen.

7.3.2 Transformation der Streuwinkel

Zwar ist die theoretische Beschreibung des Streuprozesses im Schwerpunktsystem am einfachsten, allerdings wird der Streuwinkel i. A. im Laborsystem bestimmt. Wir benötigen also die Transformation der Streuwinkel zwischen den verschiedenen Systemen.

Betrachten wir zunächst den Fall, dass der Massepunkt m_2 im Laborsystem ruht, $\mathbf{v}_2 = 0$, dann gilt für den Schwerpunkt

$$\dot{\mathbf{X}} = \frac{m_1}{M} \mathbf{v}_1. \quad (7.35)$$

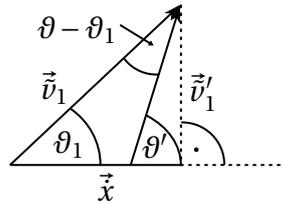
Daraus folgt

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 \equiv \mathbf{v}_1 &= \dot{\mathbf{x}}'_1 + \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{v}'_1 + \frac{m_1}{M} \mathbf{v}_1 \\ \Rightarrow \mathbf{v}'_1 &= \left(1 - \frac{m_1}{M}\right) \mathbf{v}_1 = \frac{m_2}{M} \mathbf{v}_1. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Entsprechend gilt für die Rücktransformation nach dem Stoß

$$\tilde{\mathbf{v}}_1 = \tilde{\mathbf{v}}'_1 + \dot{\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{v}}'_1 + \frac{m_1}{M} \mathbf{v}_1 \quad (7.37)$$

was sich im folgenden Bild verdeutlichen lässt:



Aus dem Bild lässt sich ablesen, dass

$$|\tilde{\mathbf{v}}_1| \sin \vartheta_1 = |\tilde{\mathbf{v}}'_1| \sin \vartheta' \quad (7.38a)$$

$$\begin{aligned} |\tilde{\mathbf{v}}_1| \cos \vartheta_1 &= \dot{\mathbf{X}} + |\tilde{\mathbf{v}}'_1| \cos \vartheta' \\ &= \frac{m_1}{M} |\mathbf{v}_1| + |\tilde{\mathbf{v}}'_1| \cos \vartheta'. \end{aligned} \quad (7.38b)$$

Der Einfachheit halber schreiben wir $v_1 = |\mathbf{v}_1|$, etc.

Damit folgt für den Tangens des Streuwinkels im Laborsystem

$$\tan \vartheta_1 = \frac{\tilde{v}'_1 \sin \vartheta'}{\tilde{v}'_1 \cos \vartheta' + \underbrace{\frac{m_1}{M} v_1}_{\stackrel{(7.36)}{=} \frac{m_1}{m_2} v'_1 \stackrel{(7.34)}{=} \frac{m_1}{m_2} \tilde{v}'_1}} = \frac{\sin \vartheta'}{\cos \vartheta' + \frac{m_1}{m_2}}. \quad (7.39)$$

Dies ist die gesuchte Transformation des Streuwinkels.

Der Streuwinkel des zweiten (ruhenden) Massepunkts lässt sich direkt aus ϑ' rekonstruieren, siehe unten.

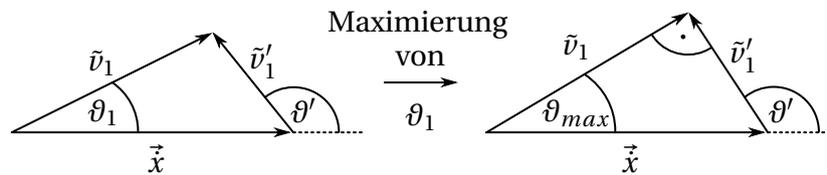
Betrachten wie (7.39) zunächst für verschiedene Limites:

- Für $m_1 \ll m_2$ gilt $\tan \vartheta_1 \approx \frac{\sin \vartheta'}{\cos \vartheta'} = \tan \vartheta'$

$$\Rightarrow \vartheta_1 \approx \vartheta'. \quad (7.40)$$

- Für $m_1 < m_2$ sind alle Streuwinkel erlaubt: $0 \leq \vartheta_1 \leq \pi$.

- Für $m_1 \geq m_2$ gibt es einen maximalen Streuwinkel



mit $|\dot{\mathbf{X}}| = \frac{m_1}{M} v_1 = \frac{m_1}{m_2} \tilde{v}'_1$ folgt

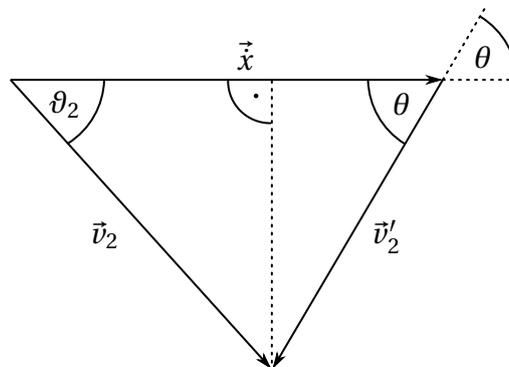
$$\sin \vartheta_{1 \max} = \frac{\tilde{v}'_1}{|\dot{\mathbf{X}}|} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (7.41)$$

- Für $m_1 = m_2$ ist

$$\tan \vartheta_1 = \frac{\sin \vartheta'}{\cos \vartheta' + 1} = \tan \frac{\vartheta'}{2} \quad (7.42)$$

so dass $\vartheta_1 = \frac{\vartheta'}{2}$ folgt.

Der Streuwinkel von m_2 folgt aus der Skizze



$$\begin{aligned} \Rightarrow \tilde{v}_2 \sin \vartheta_2 &= \tilde{v}'_2 \sin \vartheta' \\ \tilde{v}_2 \cos \vartheta_2 &= |\dot{\mathbf{X}}| - \tilde{v}'_2 \cos \vartheta'. \end{aligned} \quad (7.43)$$

Aus diesen Gleichungen folgt unmittelbar (u. A.)

$$\vartheta_2 = \frac{\pi - \vartheta'}{2}. \quad (7.44)$$

7.3.3 Energieübertragung bei elastischer Streuung

Als Beispiel betrachten wir ein Neutron der Masse m , welches an einem Kern der Masse Am elastisch streut. Der Kern ruht im Laborsystem im Ursprung ($\mathbf{v}_2 = 0$).

Die kinetischen Energien des Neutrons vor und nach dem Stoß sind

$$T = \frac{m}{2} \mathbf{v}_1^2 \quad \text{bzw.} \quad \tilde{T} = \frac{m}{2} \tilde{\mathbf{v}}_1^2. \quad (7.45)$$

Es gilt (nach dem Stoß)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}}_1^2 &= (\tilde{\mathbf{v}}_1 + \dot{\mathbf{X}})^2 \stackrel{(7.35)}{=} \left(\tilde{\mathbf{v}}_1' + \frac{1}{1+A} \mathbf{v}_1 \right)^2 \\ &= \tilde{\mathbf{v}}_1'^2 + \frac{2}{1+A} |\tilde{\mathbf{v}}_1'| |\mathbf{v}_1| \cos \vartheta' + \frac{\mathbf{v}_1^2}{(1+A)^2}. \end{aligned} \quad (7.46)$$

Aus der Energieerhaltung folgt zudem

$$\tilde{\mathbf{v}}_1'^2 = \mathbf{v}_1'^2 \stackrel{(7.36)}{=} \left(\frac{m_2}{M} \right)^2 \mathbf{v}_1^2 = \left(\frac{A}{1+A} \right)^2 \mathbf{v}_1^2 \quad (7.47)$$

$$\stackrel{(7.46)}{\implies} \tilde{\mathbf{v}}_1^2 = \mathbf{v}_1^2 \left(1 + \frac{2A}{(1+A)^2} (\cos \vartheta' - 1) \right). \quad (7.48)$$

Damit erhalten wir für die Änderung der kinetischen Energie des Neutrons (bezogen auf die Ausgangsenergie)

$$\frac{T - T'}{T} = 1 - \frac{\tilde{\mathbf{v}}_1^2}{\mathbf{v}_1^2} = \frac{2A}{(1+A)^2} (1 - \cos \vartheta'). \quad (7.49)$$

Wenn wir (ohne die Details der Wechselwirkung zu kennen) der Einfachheit halber annehmen, dass die Streuwinkel im Schwerpunktsystem gleichverteilt sind (wie z. B. für harte Kugeln), erhalten wir für den mittleren relativen Energieverlust des Neutrons

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{T - T'}{T} \right\rangle &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^\pi d\vartheta' \frac{2A}{(1+A)^2} (1 - \cos \vartheta') \sin \vartheta' \\ &= \frac{A}{(1+A)^2} \int_{-1}^1 du (1 - u) = \frac{2A}{(1+A)^2}. \end{aligned} \quad (7.50)$$

Der Energieverlust wird maximal für $A = 1$, d. h. die Streuung von Neutronen an Atomkernen bremst die Neutronen dann am effektivsten, wenn die Atomkerne möglichst leicht sind. Dies macht man sich z. B. bei der Neutronenmoderation z. B. mit Wasser oder Paraffin zu nutze.

7.4 Rutherford Streuung

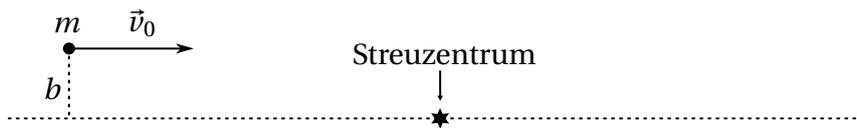
Ein wichtiges Beispiel für die Streuung eines Massepunkts an einem Zentralkraftpotential ist durch die RUTHERFORD'sche Streuformel gegeben, bei der das Zentralkraftpotential der COULOMB-Kraft entspricht, die ebenso wie die Gravitation ein Kraftgesetz der Form $F \sim \frac{1}{r^2}$ erfüllt. Die Anwendung dieser Streuformel auf die Streuung von α -Teilchen an Goldatomen (in einer Folie) hat erheblich zum modernen Verständnis des Aufbaus der Atome beigetragen.

7.4.1 Streuwinkel

Wir betrachten ein Teilchen (Teilchenstrahl), das an einem Zentralkraftpotential der Form $U \sim \frac{1}{r}$ gestreut wird. Die Streuung sei elastisch, so dass Energie und Drehimpuls erhalten sind

$$E = \frac{m}{2} v_0^2 \quad , \quad L_3 = b m v_0 \equiv \ell, \quad (7.51)$$

wobei m die Masse des Teilchens, v_0 die asymptotische Anfangsgeschwindigkeit (bei Abstand $\rightarrow \infty$ vom Streuzentrum) und b der Stoßparameter (*impact parameter*) sei.



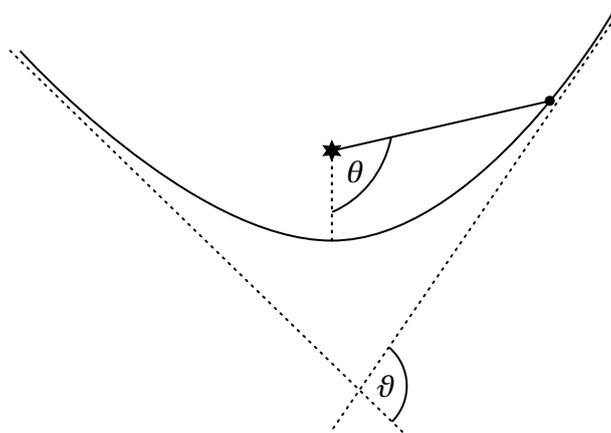
Dieses Problem entspricht dem Kepler-Problem $U = -\frac{k}{r}$ für den Fall $E > 0$, d. h. die Bahnkurve ist eine Hyperbel. Wir nehmen zusätzlich an, dass das Streuzentrum in Ruhe bleibt, dass also der Rückstoß vernachlässigbar ist.

Die Hyperbel erfüllt die Gleichung

$$\frac{\alpha}{r} = 1 + \varepsilon \cos \theta \quad (7.52)$$

mit

$$\varepsilon = \left[1 + \frac{2\ell^2 E}{k^2 m} \right]^{\frac{1}{2}} > 0. \quad (7.53)$$



Für Asymptotische Abstände $r \rightarrow \infty$ geht der Polarwinkel der Hyperbel gegen

$$\theta_{max} \xrightarrow{(7.52)} \arccos\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (7.54)$$

Aus der Skizze wird ersichtlich, dass dieser Winkel direkt mit dem Streuwinkel ϑ über

$$\vartheta = 2\theta_{max} - \pi \quad (7.55)$$

zusammenhängt. Der Streuwinkel erfüllt somit

$$\sin \frac{\vartheta}{2} = \sin\left(\theta_{max} - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\theta_{max} = \frac{1}{\varepsilon}. \quad (7.56)$$

Die Exzentrizität ε lässt sich über die Erhaltungsgrößen (7.51) mit dem Stoßparameter in Verbindung bringen:

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{(bm v_0^2)^2}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (7.57)$$

Mit (7.56) ergibt sich ein Zusammenhang zwischen Stoßparameter und dem Streuwinkel

$$b^2 = \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}} - 1\right) \frac{k^2}{m^2 v_0^4}. \quad (7.58)$$

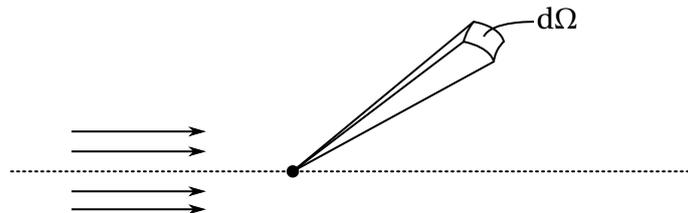
7.4.2 Streuquerschnitt

Gleichung (7.58) liefert basierend auf dem *fundamentalen* Input der zugrundeliegenden Wechselwirkung eine Vorhersage für den Streuwinkel als Funktion der Parameter b und v_0 , die die Anfangsbedingungen des Streuprozesses charakterisieren. Während v_0 vergleichsweise präzise bestimmt werden kann, ist der Stoßparameter für Streuprozesse auf atomaren Skalen keine gute Beobachtungsgröße, da die beteiligten Streupartner nicht genügend gut lokalisiert werden können.

Eine direkte Beobachtungsgröße ist der *differenzielle Wirkungsquerschnitt*, der definiert ist durch

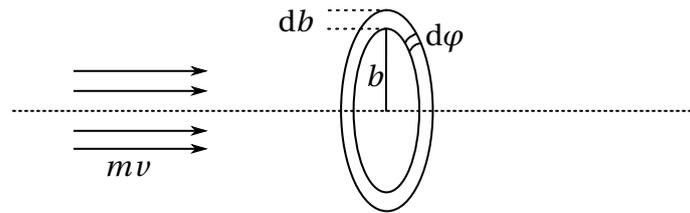
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) d\Omega = \frac{\text{Zahl in Raumwinkelelement } d\Omega \text{ gestreuten Teilchen}}{\text{Anzahl der pro Zeit einlaufenden Teilchen}}. \quad (7.59)$$

(NB: die "Teilchenanzahl pro Zeit" kann man auch als Teilchenstrom auffassen.)



Die Anzahl der pro Zeit gestreuten Teilchen, die innerhalb eines Kreissegments $(b, b + db) d\phi$ einfallen, ist

$$n_v b db d\phi = n_v b \left| \frac{\partial b}{\partial \vartheta} \right| d\vartheta d\phi, \quad (7.60)$$



wobei n_ν die Anzahl der einfallenden Teilchen pro Volumen und Zeit ist. Es folgt

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega}\right)d\Omega = \frac{n_\nu b \left|\frac{\partial b}{\partial\vartheta}\right| d\vartheta d\phi}{n_\nu} = b \left|\frac{\partial b}{\partial\vartheta}\right| \frac{1}{\sin\vartheta} \underbrace{\sin\vartheta d\vartheta d\phi}_{=d\Omega}$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = b \left|\frac{\partial b}{\partial\vartheta}\right| \frac{1}{\sin\vartheta} \quad (7.61)$$

$$\stackrel{(7.58)}{=} \frac{k^2}{2m^2 v_0^4} \frac{\cos\frac{\vartheta}{2}}{\sin^3\frac{\vartheta}{2} \sin\vartheta}$$

$$= \frac{k^2}{4(2E)^2} \frac{1}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}}. \quad (7.62)$$

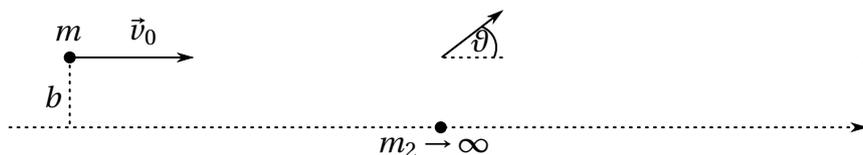
Für die Streuung von Elektronen an Kernen der Ladungszahl Z ist $k = Ze^2$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(Ze^2)^2}{4(2E)^2} \frac{1}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}}, \quad \text{Rutherford'sche Streuformel.} \quad (7.63)$$

7.4.3 Streuung unter kleinen Winkeln

Im Limes kleiner "Ablenkungen", d. h. kleiner Streuwinkel, vereinfacht sich die Berechnung des Wirkungsquerschnitts.

Physikalisch entspricht dies z. B. Streuung bei großen Stoßparametern. In diesem Limes vernachlässigen wir wie in vorhergehenden Abschnitt den Rückstoß von m_2 . Formal kann dies durch den Limes $m_2 \rightarrow \infty$ implementiert werden. Die Berechnung kann komplett im Laborsystem durchgeführt werden (was im formalen Limes $m_2 \rightarrow \infty$ mit dem Schwerpunktsystem identisch ist).



Für die y -Komponente der Geschwindigkeit von m_1 gilt der einfache Zusammenhang

$$\tilde{v}_y = v_0 \sin\vartheta \approx v_0 \vartheta \quad , \quad \vartheta \ll 1. \quad (7.64)$$

Allgemein gilt für die y -Komponente

$$m_1 \tilde{v}_y = \int_{-\infty}^{\infty} dt F_y, \quad (7.65)$$

wobei

$$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \stackrel{\text{Zentralkraft}}{=} -\frac{dV}{dr} \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{dV}{dr} \frac{y}{r}. \quad (7.66)$$

Die Annahme $\vartheta \ll 1$ impliziert, dass auch F_y eine "kleine" Größe ist. Daher ist die weitere Näherung gerechtfertigt, dass das Integral (7.65) entlang der ungestörten Bahn ausgeführt werden kann ($dt = \frac{dx}{v_0}$)

$$m_1 \tilde{v}_y \stackrel{y=b}{\approx} -\frac{b}{v_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dV}{dr} \frac{dx}{r}. \quad (7.67)$$

Mit $r^2 = b^2 + x^2$, $r dr = x dx$ und

$$\frac{dx}{r} = \frac{r dr}{x r} = \frac{dr}{\sqrt{r^2 - b^2}} \quad (7.68)$$

folgt

$$\begin{aligned} \underline{\vartheta} &= -\frac{1}{v_0 m_1} \frac{b}{v_0} 2 \int_b^{\infty} \frac{dV}{dr} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - b^2}} \\ &= -\frac{2b}{m_1 v_0^2} \int_b^{\infty} \frac{dV}{dr} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - b^2}}. \end{aligned} \quad (7.69)$$

Für allgemeine Potentiale $V(r)$ liefert (7.69) einen Zusammenhang zwischen Stoßparameter und Streuwinkel (im *Limes kleiner Streuwinkel*), womit mittels (7.61)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = b \left| \frac{\partial b}{\partial \vartheta} \right| \frac{1}{\sin \vartheta} \approx \left| \frac{\partial b}{\partial \vartheta} \right| \frac{b}{\vartheta} \quad (7.70)$$

der differentielle Wirkungsquerschnitt berechnet werden kann.

7.4.4 Ablenkung von Licht im Gravitationsfeld

Im Rahmen einer (NEWTON'schen) korpuskularen Vorstellung von der Natur des Lichtes (Licht als "Teilchenstrom") kann man (7.69) verwenden, um eine klassische Abschätzung der Ablenkung von Licht z. B. im Gravitationsfeld der Sonne zu erhalten. Der Limes $m_2 \rightarrow \infty$ ist für $m_2 = m_{\odot}$ und $m_1 = m_{\text{Lichtteilchen}}$ sicherlich sehr gut erfüllt. Ebenso erwarten wir wegen der Schwäche der Gravitation sehr kleine Streuwinkel.

Mit $V = -\frac{Gm_1m_2}{r}$ ergibt sich aus (7.69)

$$\vartheta = -\frac{2bGm_1m_2}{m_1v_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r^2\sqrt{r^2-b^2}} dr$$

$$\stackrel{v_0=c}{=} -\frac{2Gm_2b}{c^2} \left. \frac{\sqrt{r^2-b^2}}{r} \right|_b^{\infty} = -\frac{2Gm_2}{c^2b}. \quad (7.71)$$

Der Streuwinkel ist Negativ, da das Licht zur Sonne hingelenkt wird. Wir definieren den *Schwarzschild-Radius*

$$R_s = \frac{2Gm_2}{c^2} \quad (7.72)$$

als eine der Masse m_2 durch die Gravitation zugeordnete charakteristische Längenskala. Damit folgt

$$\vartheta = -\frac{R_s}{b}. \quad (7.73)$$

Diese klassische Abschätzung führt zwar qualitativ zum richtigen Ergebnis. Quantitativ und vollständig kann die Analyse allerdings erst in der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) durchgeführt werden. Das Ergebnis ist genau das Doppelte der NEWTON'schen Vorhersage

$$\vartheta = \frac{2R_s}{b}. \quad (7.74)$$

Mit $m_2 = m_{\odot} \approx 2 \cdot 10^{33}$ kg ergibt sich der Schwarzschildradius der Sonne zu

$$R_{S,\odot} = 3 \text{ km}. \quad (7.75)$$

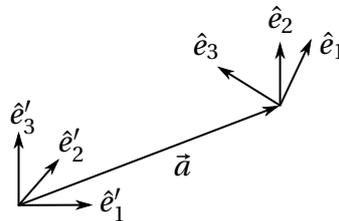
Ein Lichtstrahl der genau am Sonnenrand bei $b = 696000$ km die Sonne passiert, wird nach (7.74) der Strahl um $\vartheta = 1,7''$ abgelenkt. Dieser Wert wurde (im Rahmen der erreichbaren Präzession) 1919 während einer Sonnenfinsternis nachgewiesen.

8 Bewegte Bezugssysteme

Obwohl für viele Experimente im (erdfesten) Labor das Laborsystem ein NEWTON'sches Inertialsystem hinreichend gut approximiert, lassen sich für einige Experimente die Effekte nicht vernachlässigen, in denen sich die Abweichungen des Laborsystems von einem Inertialsystem manifestieren. Ganz allgemein wollen wir uns im Folgenden mit der NEWTON'schen Physik aus der Sicht von bewegten Bezugssystemen beschäftigen.

8.1 Koordinatentransformationen

Betrachten wir zunächst den Zusammenhang zwischen kartesischen Koordinatensystemen.



Gegeben sei ein gestrichenes Bezugssystem mit Basis \hat{e}'_i

$$\hat{e}'_i \cdot \hat{e}'_j = \delta_{ij}. \quad (8.1)$$

Zu einem festen Zeitpunkt befinde sich der Ursprung eines (bewegten) Bezugssystems am Ort \mathbf{a}' , das durch die Basisvektoren \hat{e}_i aufgespannt sei. Auch für diese Basis gilt

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}. \quad (8.2)$$

Im gestrichenem System seien die Komponenten des \hat{e}_i gegeben durch

$$\hat{e}_i = \begin{pmatrix} R_{1i} \\ R_{2i} \\ R_{3i} \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_i = R_{ji} \hat{e}'_j. \quad (8.3)$$

Die neuen Komponenten R_{ij} haben eine einfache geometrische Bedeutung:

$$\hat{e}'_i \cdot \hat{e}_j \stackrel{(8.3)}{=} \hat{e}'_i \cdot R_{kj} \hat{e}'_k = R_{kj} \hat{e}'_i \cdot \hat{e}'_k \stackrel{(8.1)}{=} R_{kj} \delta_{ik} = R_{ij} = \cos(\angle(\hat{e}'_i, \hat{e}_j)), \quad (8.4)$$

d. h. die R_{ij} entsprechen dem Kosinus der Winkel zwischen den Basisvektoren. Aus (8.2) folgt die wichtige Relation

$$\underline{\delta_{ij}} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j \stackrel{(8.3)}{=} R_{ki} \hat{e}'_k \cdot R_{lj} \hat{e}'_l = R_{ki} R_{lj} \underbrace{\hat{e}'_k \cdot \hat{e}'_l}_{\stackrel{(8.3)}{=} \delta_{kl}} = \underline{R_{ki} R_{kj}}. \quad (8.5)$$

Mit der Definition der Matrix-Transposition

$$(R^\top)_{ij} = R_{ji} \quad (8.6)$$

lässt sich (8.5) in Matrixnotation schreiben als

$$R^T R = \mathbb{1} \quad (8.7)$$

bzw. $RR^T = \mathbb{1}$. Matrizen mit dieser Eigenschaft (d. h. $R^T = R^{-1}$) heißen *orthogonal*. Die Matrix R_{ij} hat 9 Komponenten. (8.5) entspricht 6 Gleichungen, d. h. 6 Bedingungen an R_{ij} ; d. h. i. A. sind 3 Matrixelemente der Matrix R unabhängig.

Nach dem Determinantensatz folgt

$$R^T R = \mathbb{1} \implies 1 = \det R^T R = \det R^T \cdot \det R = (\det R)^2. \quad (8.8)$$

Die Menge der orthogonalen Matrizen zerfällt also in zwei Klassen, solche mit $\det R = 1$ und solche mit $\det R = -1$ (eigentliche und uneigentliche orthogonale Matrizen).

Für den Fall, dass $\hat{e}_i \equiv \hat{e}'_i$, gilt offensichtlich

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} \implies R^T R = \mathbb{1} \quad (8.9)$$

$$\implies \det R = 1.$$

Ein Beispiel für eine uneigentliche orthogonale Matrix ist

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} \implies R^T R = \mathbb{1}, \quad \det R = -1. \quad (8.10)$$

Eine uneigentliche Matrix führt also ein rechts- in ein linkshändiges Koordinatensystem über (und umgekehrt).

Mathematisch betrachtet bilden die orthogonalen Matrizen eine Gruppe, die sogenannte $O(3)$ (3×3 Matrizen).

D. h. zu jedem $R \in O(3)$ existiert ein inverses Element R^{-1} , so dass $RR^{-1} = \mathbb{1}$. Wegen (8.7) ist R^{-1} gegeben durch $R^{-1} = R^T$. Es existiert ein „Einselement“ $\mathbb{1} \in O(3)$, so dass $R \cdot \mathbb{1} = R$. Und für zwei Elemente $R_1, R_2 \in O(3)$ gilt unter der Verknüpfung (die in diesem Fall durch die Matrixmultiplikation gegeben ist), dass $R_1 \cdot R_2 \in O(3)$ ebenfalls Element der Gruppe ist. (Letzteres lässt sich mit der Regel $(A \cdot B)^T = B^T A^T$ leicht nachweisen.)

Die eigentlichen orthogonalen Matrizen mit $\det R = 1$ bilden eine Untergruppe der $O(3)$, die sogenannte speziell orthogonale Matrizen $SO(3)$. (NB: die uneigentlichen orth. Matrizen können keine Untergruppe bilden, da sie kein Einselement enthalten).

Die Matrixmultiplikation ist im Allgemeinen nicht kommutativ, d. h.

$$R_1 \cdot R_2 \neq R_2 \cdot R_1. \quad (8.11)$$

Dies gilt: 1. auch für Elemente der $O(3)$ oder $SO(3)$. Physikalisch entspricht dies der Erfahrungstatsache, dass Drehungen die entlang verschiedener Achsen hintereinander ausgeführt werden, nicht miteinander vertauschen.

Betrachten wir schließlich die *Transformation von Ortsvektoren*. Der Ortsvektor \mathbf{x} im ungestrichenen System entspricht im gestrichenem System dem Ortsvektor (vgl. S. 82):

$$\begin{aligned}\mathbf{x}' &= \mathbf{a}' + x_i \hat{e}_i = \mathbf{a}' + x_i R_{ki} \hat{e}'_k \\ \implies x'_k &= a'_k + R_{ki} x_i.\end{aligned}\quad (8.12)$$

Für einen weiteren Punkt \mathbf{y} gilt entsprechend $y'_k = a'_k + R_{ki} y_i$. Der Verbindungsvektor transformiert sich entsprechend wie

$$x'_k - y'_k = R_{ki} (x_i - y_i). \quad (8.13)$$

In der Physik ist es oft üblich, Vektoren als solche Objekte zu definieren, die sich wie (8.13) transformieren. (NB: danach ist ein Ortsvektor strenggenommen kein Vektor; er wird bisweilen als „gebundener“ Vektor bezeichnet.)

8.2 Zeitabhängige Transformationen

Bewegen sich das gestrichene und das ungestrichene Koordinatensystem beliebig relativ zueinander, so sind die Koordinaten des Ursprungs a'_i und die Orientierung der Achsen i. A. zeitabhängig,

$$\mathbf{a}', R \rightarrow \mathbf{a}'(t), R(t) \quad (8.14)$$

d. h.

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{a}'(t) + R(t) \cdot \mathbf{x}(t). \quad (8.15)$$

Für die Geschwindigkeit gilt dann

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{a}}' &= \dot{\mathbf{a}}' + R \cdot \dot{\mathbf{x}} + \dot{R} \cdot \mathbf{x} \\ &= \dot{\mathbf{a}}' + R \cdot (\dot{\mathbf{x}} + R^\top \dot{R} \cdot \mathbf{x}).\end{aligned}\quad (8.16)$$

Hier taucht die Matrix $R^\top \dot{R}$ auf. Aus $R^\top R = \mathbb{1}$ folgt:

$$0 = \dot{\mathbb{1}} = \dot{R}^\top R + R^\top \dot{R} = (R^\top \dot{R})^\top + R^\top \dot{R}. \quad (8.17)$$

Matrizen mit der Eigenschaft $A^\top + A = 0$ heißen *schiefsymmetrisch*.

Die Matrix $R^\top \dot{R}$ muss also von folgender Form sein:

$$R^\top \dot{R} = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.18)$$

wobei die w_i zunächst unbestimmt sind. Die Vorzeichen in jedem off-diagonal Dreieck sind so gewählt, dass man $R^\top \dot{R}$ mit Hilfe des Levi-Civita Symbols schreiben kann:

$$(R^\top \dot{R})_{ij} = -\varepsilon_{ijk} w_k. \quad (8.19)$$

Damit lässt sich schreiben

$$(R^\top \dot{R} \cdot \mathbf{x})_i = (R^\top \dot{R})_{ij} x_j = -\varepsilon_{ijk} w_k x_j = \varepsilon_{ijk} w_j x_k = (\mathbf{w} \times \mathbf{x})_i \quad (8.20)$$

und (8.16) lautet

$$\dot{\mathbf{x}}' = \dot{\mathbf{a}}' + R \cdot (\dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}). \quad (8.21)$$

Analog folgt für die Transformation eines beliebigen Vektors mit $\mathbf{v}' = R\mathbf{v}$, dass

$$\dot{\mathbf{v}}' = R(\dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}). \quad (8.22)$$

Die Bedeutung von $\boldsymbol{\omega}$ wird aus einem einfachem Beispiel deutlich. Sei \hat{e}'_i gegeben durch

$$\hat{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{e}'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{e}'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8.23)$$

Das ungestrichene Koordinatensystem drehe sich mit Winkelgeschwindigkeit ω um die z -Achse, d. h.

$$\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{e}_2 = \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8.24)$$

Damit ist

$$R = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R^\top = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \\ -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.25)$$

$$\text{und } \dot{R} = \omega \begin{pmatrix} -\sin \omega t & -\cos \omega t & 0 \\ \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

sodass

$$R^\top \dot{R} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}. \quad (8.26)$$

In diesem einfachem Beispiel entspricht $|\boldsymbol{\omega}|$ der Winkelgeschwindigkeit der Drehung, und die Richtung von $\boldsymbol{\omega}$ der Richtung der Drehachse.

Im Allgemeinen sind sowohl Richtung als auch Betrag von $\boldsymbol{\omega}$ zeitabhängig. Betrachten wir R zum Zeitpunkt t und $t + dt$, so folgt zur Ordnung dt

$$\begin{aligned} R(t + dt) &= R(t) + \dot{R}(t) dt \\ &= R(t) \cdot (\mathbb{1} + R^\top(t) \dot{R}(t) dt) \\ \Rightarrow R_{ij}(t + dt) &= R_{ik}(t) \cdot (\delta_{kj} - \varepsilon_{kjl} \omega_l(t) dt). \end{aligned} \quad (8.27)$$

Analog zum obigen Beispiel gibt $\boldsymbol{\omega}(t)$ die momentane Lage der Drehachse zum Zeitpunkt t an. Im Zeitintervall dt findet dann eine Drehung um den Winkel $d\varphi = |\boldsymbol{\omega}| dt$ im positiven Drehsinn (Rechte-Hand-Regel) statt.

Den Faktor $(\delta_{kj} - \varepsilon_{kjl} \omega_l dt) \hat{=} \mathbb{1} + d\varphi x$ kann man als infinitesimale Drehung interpretieren.

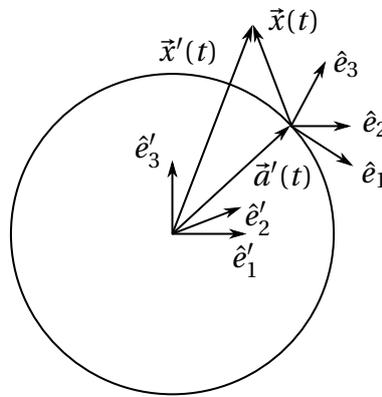
8.3 Scheinkräfte

Im Folgenden betrachten wir das gestrichene Bezugssystem als Inertialsystem, in dem die NEWTON'schen Gesetze gelten und studieren die Beschreibung der NEWTON'schen Physik im ungestrichenem System (Laborsystem).

$$\mathbf{x}' = \mathbf{a}' + R\mathbf{x} = R \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{x}), \quad (8.28)$$

wobei wir die Hilfsgröße \mathbf{a} über $\mathbf{a}' = R \cdot \mathbf{a}$ eingeführt haben.

Sei z. B. das gestrichene System am Erdmittelpunkt angeheftet (in guter Näherung ein Inertialsystem) und das ungestrichene System ein mit der Erdoberfläche mit rotierendes Laborsystem, dann rotiert $\mathbf{a}'(t)$ im gestrichenem Bezugssystem, während \mathbf{a} im Laborsystem zeitlich konstant bleibt.



$$\mathbf{a}'(t) = R(t) \cdot \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = \text{const.} \quad (8.29)$$

Im folgendem beschränken wir uns allgemein auf den Fall $\mathbf{a} = \text{const.}$.

Die Bewegung einer Punktmasse bei $\mathbf{x}'(t)$ wird im Inertialsystem durch die Lagrangefunktion

$$L = T - V = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}'^2 - V(\mathbf{x}'). \quad (8.30)$$

Wir benötigen

$$\dot{\mathbf{x}}' \stackrel{(8.28)}{\stackrel{(8.22)}{=}} R(\dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{a} + \mathbf{x}))$$

und

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}'^2 &\equiv \dot{\mathbf{x}}'^T \cdot \dot{\mathbf{x}}' = (\dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{a} + \mathbf{x}))^T \underbrace{R^T \cdot R}_{=1} (\dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{a} + \mathbf{x})) \\ &= (\dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{a} + \mathbf{x})) \cdot (\dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{a} + \mathbf{x})) \end{aligned} \quad (8.31)$$

und erhalten die Lagrange-Funktion in Laborkoordinaten

$$L = \frac{m}{2} (\dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{a} + \mathbf{x}))^2 - V(\mathbf{x}), \quad (8.32)$$

wobei wir das Potential $V(\mathbf{x}') = V(R \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{x})) =: V(\mathbf{x})$ als Funktion der Laborkoordinaten auffassen. Wir können die Laborkoordinaten als generalisierte Koordinaten auffassen und

die Bewegungsgleichungen im Laborsystem aus den entsprechenden Euler-Lagrange-Gleichungen ableiten. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} &= m(\dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{a} + \mathbf{x})) \\ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} &= m(\dot{\mathbf{x}} \times \boldsymbol{\omega}) + m(\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{a} + \mathbf{x})) \times \boldsymbol{\omega} - \vec{\nabla} V\end{aligned}\quad (8.33)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}[m(\dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{a} + \mathbf{x}))] - [m(\dot{\mathbf{x}} \times \boldsymbol{\omega}) + m(\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{a} + \mathbf{x})) \times \boldsymbol{\omega} - \vec{\nabla} V] = 0 \quad (8.34)$$

bzw.

$$m\ddot{\mathbf{x}} + m[\dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{a} + \mathbf{x})] + 2m(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{x}}) + m[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})] + m[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a})] = -\vec{\nabla} V. \quad (8.35)$$

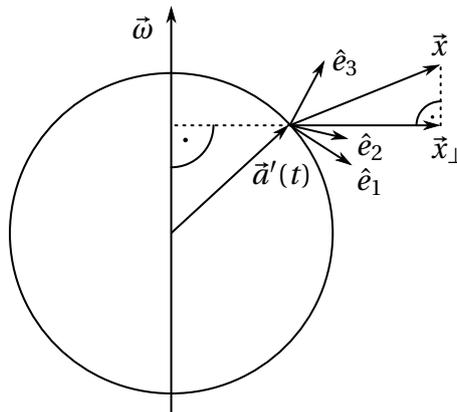
Zusätzlich zur NEWTON'schen Kraft $\mathbf{F} = -\vec{\nabla} V$ treten vier weitere Terme auf, die wir als Scheinkräfte interpretieren können, da alle vier neuen Terme genauso wie $\vec{\nabla} V$ zur Beschleunigung $m\ddot{\mathbf{x}}$ der Punktmasse beitragen können.

Diese Scheinkräfte lassen sich interpretieren:

1. $m[\dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{a} + \mathbf{x})]$: dieser Term tritt nur auf, wenn die Drehachse sich ändert. Für Laborsysteme auf der Erdoberfläche ist $\dot{\boldsymbol{\omega}} \approx 0$ (abgesehen von Präzession und Polschwankungen).
2. $\mathbf{F}_C := 2m(\dot{\mathbf{x}} \times \boldsymbol{\omega})$ (CORIOLIS-Kraft):
Die CORIOLIS-Kraft wirkt aus Massepunkte, die sich im Laborsystem bewegen, $\dot{\mathbf{x}} \neq 0$. Sie steht senkrecht auf $\dot{\mathbf{x}}$ und ist senkrecht zur Drehachse $\boldsymbol{\omega}$.
3. $\mathbf{F}_z := m((\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \times \boldsymbol{\omega})$ (Zentrifugalkraft): Vektoridentitäten führen auf

$$\mathbf{F}_z = m(\boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{x} - \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x})) = m\omega^2 \left(\mathbf{x} - \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\omega})}{\omega^2} \right) := m\omega^2 \mathbf{x}_\perp, \quad (8.37)$$

wobei \mathbf{x}_\perp der Anteil des Vektors \mathbf{x} senkrecht zur Drehachse ist.



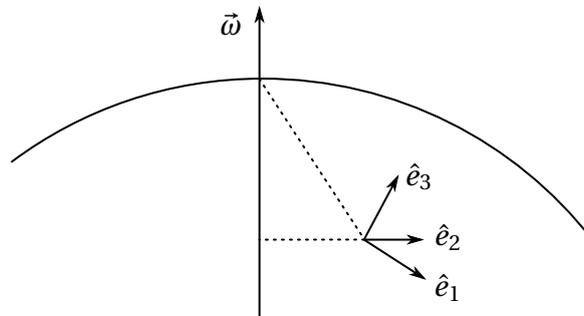
4. $m((\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}) \times \boldsymbol{\omega})$: ist unabhängig von \mathbf{x} . Diese Kraft beschreibt die Zentrifugalkraft auf den Ursprung des Laborsystems. In der Praxis wird sie als Beitrag zur Erdbeschleunigung behandelt.

$$\mathbf{g} \rightarrow \mathbf{g}_{\text{Grav.}} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}) \times \boldsymbol{\omega}. \quad (8.38)$$

Alle Scheinkräfte haben ihren Ursprung in der Massenträgheit $\sim m\ddot{\mathbf{x}}'$. Scheinkräfte zeigen an, dass das gewählte Bezugssystem kein Inertialsystem ist.

8.3.1 Beispiel: Coriolis-Kraft

Seien \hat{e}_1 und \hat{e}_2 nach Süden bzw. Osten orientiert, \hat{e}_3 zeige „nach oben“, d. h. weg vom Erdmittelpunkt. Der Ursprung des Laborsystems befinde sich bei geografischer Breite ϑ (\neq Polarwinkel, $\vartheta = 0$ (Äquator), $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ (Nordpol)).



Im Laborsystem ist der Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ dann gegeben durch

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \begin{pmatrix} -\cos \vartheta \\ 0 \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}. \quad (8.39)$$

Der Drehsinn ist derart, dass das Laborsystem sich in Richtung Osten bewegt. $\boldsymbol{\omega}$ kann in Komponenten horizontal und vertikal zur Erdoberfläche zerlegt werden,

$$\boldsymbol{\omega}_H = \begin{pmatrix} -\omega \cos \vartheta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \sin \vartheta \end{pmatrix}. \quad (8.40)$$

Entsprechend hat die CORIOLIS-Kraft zwei Komponenten

$$\mathbf{F}_C = 2m(\dot{\mathbf{x}} \times \boldsymbol{\omega}_V) + 2m(\dot{\mathbf{x}} \times \boldsymbol{\omega}_H). \quad (8.41)$$

Bei Bewegungen horizontal zur Erdoberfläche ist $\dot{\mathbf{x}} \perp \hat{e}_3$, d. h. der zweite Term zeigt vertikal zur Erdoberfläche. Der erste Term $\sim \dot{\mathbf{x}} \times \boldsymbol{\omega}_V$ zeigt auf der Nordhalbkugel nach rechts (zur Bewegungsrichtung) und auf der Südhalbkugel nach links. Die CORIOLIS-Kraft hat Bedeutung für die Bewegung der Luftmassen in der Atmosphäre, für Meeresströme, Flussläufe und für die Ballistik.

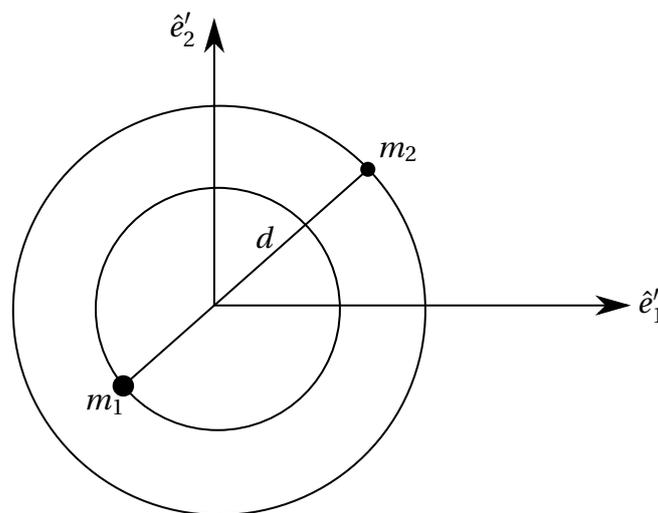
8.4 Das reduzierte Dreikörperproblem

Als Anwendung bewegter Bezugssysteme betrachten wir das reduzierte Dreikörperproblem. „Reduziert“ bedeutet in diesem Fall, eine Reihe von Annahmen zu treffen, unter denen das i. A. schwierige Problem lösbar wird. Trotz der einschränkenden Annahmen hat diese Lösung viele Anwendungen in der Himmelsmechanik.

Wir betrachten eine Testmasse m_3 , die sich in der Nähe von zwei erheblich größeren Massen $m_1, m_2 \gg m_3$ bewegt. (m_1, m_2 seien z. B. die Sonne und ein Planet, m_3 sei ein Asteroid oder eine Raumsonde).

Wir nehmen an, dass sich m_1 und m_2 auf Kreisbahn um ihren Schwerpunkt bewegen. D. h. m_1 und m_2 folgen der Lösung des KEPLER'problems mit Exzentrizität $\varepsilon = 0$. Desweiteren bewege sich m_3 in der Bahnebene von m_1 und m_2 , ohne Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Bahnkurve.

Der Begriff Testmasse soll zum Ausdruck bringen, dass die von m_3 ausgehende Gravitationswirkung auf die gebundene Bewegung von m_1 und m_2 vernachlässigbar ist. In einem Inertialsystem \hat{e}'_i seien Bahnkurven von m_1, m_2 , wie folgt aus z. B. $m_1 > m_2$.



Mit der Definition

$$\mu := \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \quad 1 - \mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (8.42)$$

rotieren die Koordinaten der beiden Massen auf den Bahnkurven

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_1 &= \underbrace{(\mu - 1)}_{<0} d \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x}'_2 &= \mu d \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (8.43)$$

wobei d der Abstand zwischen m_1 und m_2 ist, und ω den konstanten Betrag der Winkelgeschwindigkeit bezeichnet. Nach dem 3. KEPLER'schen Gesetz ist die Umlaufzeit gegeben

durch (vgl. (6.46))

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2 d^3}{G(m_1 + m_2)} \quad (8.44)$$

woraus der Betrag der Winkelgeschwindigkeit folgt:

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{d^3}}. \quad (8.45)$$

Der zugehörige Vektor der nach der rechten-Hand-Regel senkrecht zur \hat{e}'_1, \hat{e}'_2 zeigen muss ist

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}. \quad (8.46)$$

Wir führen nun ein mitbewegtes Koordinatensystem \hat{e}_i ein, das definiert ist durch

$$\begin{aligned} \hat{e}_3 &= \hat{e}'_3 \\ \hat{e}_1 &= \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_2 = \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (8.47)$$

sodass m_1 und m_2 immer auf der \hat{e}_1 -Achse liegen:

$$\mathbf{x}_1 = (\mu - 1)d\hat{e}_1, \quad \mathbf{x}_2 = \mu d\hat{e}_1. \quad (8.48)$$

In diesem System lässt sich die Bahnkurve von m_3 durch die Koordinaten (x, y) parametrisieren

$$\mathbf{x}_3 = x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2. \quad (8.49)$$

Da $\dot{\omega} = 0$ gilt, verschwindet der erste Scheinkraftterm in (8.35). Da die Ursprünge der Koordinatensysteme zusammenfallen, gilt des weiteren $\mathbf{a} = 0$, und wir erhalten die Bewegungsgleichung für m_3 :

$$m_3\ddot{\mathbf{x}}_3 + 2m_3\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{x}}_3 + m_3(\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_3)) + \vec{\nabla}V(\mathbf{x}_3) = 0. \quad (8.50)$$

Die potentielle Energie ist gegeben durch

$$V(\mathbf{x}_3) = -\frac{Gm_1m_3}{r_1} - \frac{Gm_2m_3}{r_2} \quad (8.51)$$

mit den Abständen

$$r_1 = ((x - (\mu - 1)d)^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}, \quad r_2 = ((x - \mu d)^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (8.52)$$

Für die Kreuzprodukte in (8.50) erhalten wir

$$\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{x}}_3 = \underbrace{\begin{pmatrix} -\omega \dot{y} \\ \omega \dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{im } \hat{e}_i \text{ System}}, \quad \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_3) = \begin{pmatrix} -\omega^2 x \\ -\omega^2 y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.53)$$

was auf folgende Bewegungsgleichungen führt:

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x + \frac{1}{m_3} \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y + \frac{1}{m_3} \frac{\partial V}{\partial y} = 0. \quad (8.54)$$

Mit dem effektiven Potential

$$U := \frac{V}{m_3} - \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) \quad (8.55)$$

vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen zu

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \ddot{y} + 2\omega\dot{x} = -\frac{\partial U}{\partial y}. \quad (8.56)$$

Wir multiplizieren die erste mit \dot{x} , die zweite mit \dot{y} , und addieren das Resultat. Wir erhalten

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + U \right) = 0. \quad (8.57)$$

Damit erhalten wir die Jacobi-Konstante

$$C := -2U - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \omega^2(x^2 + y^2) - 2\frac{V}{m_3} - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \text{const.}, \quad (8.58)$$

das einzige bekannte Integral des reduzierten Dreikörperproblems.

Wegen $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 > 0$ muss die Bewegung von m_3 die Bedingung

$$C + 2U < 0 \quad (8.59)$$

erfüllen. Dieser physikalisch zulässige Bereich ist durch die sogenannte *Hill-Kurve* begrenzt, die definiert ist durch

$$\text{Hill-Kurve: } U = -\frac{C}{2}. \quad (8.60)$$

Als einfache Anwendung suchen wir nach Punkten, an denen m_3 (im bewegten Bezugssystem) ruht, d. h. $\dot{x} = \dot{y} = \ddot{x} = \ddot{y} = 0$. Diese Punkte müssen gemäß (8.56) $\vec{\nabla}U = 0$ erfüllen. Wir beginnen die Suche mit der Annahme, dass solche Punkte den gleichen Abstand von den Massen m_1 und m_2 haben könnten: $r = r_1 = r_2$, so dass

$$x = \frac{2\mu - 1}{2}d, \quad r = \sqrt{\frac{d^2}{4} + y^2}. \quad (8.61)$$

Das effektive Potential hat die Ableitung in x-Richtung

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{Gm_1}{r_1} - \frac{Gm_2}{r_2} \right) - \omega^2 x \\ &= \frac{Gm_1}{r_1^3} (x - (\mu - 1)d) + \frac{Gm_2}{r_2^3} (x - \mu d) - \omega^2 x. \end{aligned} \quad (8.62)$$

Mit der Annahme (8.61) finden wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{r_1=r_2=r} &= \frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} (\mu(x - (\mu - 1)d) + (1 - \mu)(x - \mu d)) - \omega^2 x \\ &= \left(\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} - \omega^2 \right) x \stackrel{(8.45)}{=} G(m_1 + m_2) \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{d^3} \right) x. \end{aligned} \quad (8.63)$$

D. h. die Annahme $r_1 = r_2 = r$ liefert zwei Lösungspunkte mit

$$r = d, \quad x = \frac{2\mu - 1}{2}d, \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}d. \quad (8.64)$$

An diesen Orten ist analog zu (8.60) auch

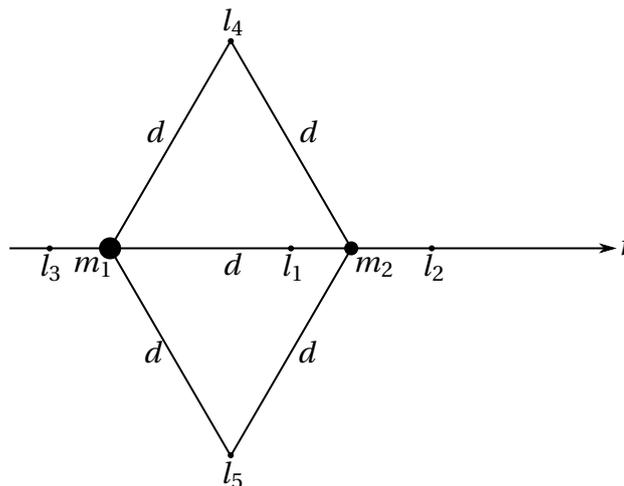
$$\left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{r_1=r_2=r} = \left(\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} - \omega^2 \right) y \stackrel{(8.64)}{\stackrel{(8.45)}{=} } 0. \quad (8.65)$$

Diese Kräftefreien Punkte (im bewegten System)

$$\mathbf{l}_{4,5} := \frac{d}{2} \begin{pmatrix} 2\mu - 1 \\ \pm\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.66)$$

bilden mit m_1 und m_2 gleichseitige Dreiecke.

Weitere drei Lösungen liegen auf der x -Achse und sind Lösungen eines Polynoms 5. Ordnung. Alle 5 Punkte heißen Lagrange-Punkte $\mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_5$.



9 Bewegung starrer Körper

Unter einem starren Körper versteht man eine Ansammlung von Massepunkten, deren relative Abstände zueinander starr fixiert sind. Damit ist auch der Schwerpunkt relativ zu allen Massepunkten fixiert. Somit besitzt der starre Körper 6 Freiheitsgrade. Diese kann man z. B. als die 3 Koordinaten des Schwerpunkts und weitere 3 Winkel, die Drehungen um den Schwerpunkt parametrisieren, verstehen. Alternativ zum Schwerpunkt kann man auch andere ausgezeichnete Punkte des Körpers betrachten (z. B. Kreiselspitzen, etc.).

Für die Beschreibung der Dynamik eines starren Körpers ist es zweckmäßig, zwei Koordinatensysteme zu verwenden. Zum einen natürlich ein Inertialsystem \hat{e}'_i zum zweiten ein körperfestes Bezugssystem \hat{e}_i , in dem alle Massepunkte des starren Körpers konstante zeitunabhängige Koordinaten haben. NB: anstelle einer diskreten Beschreibung eines starren Körpers durch Massepunkte m_i , kann man auch zu einer kontinuierlichen Beschreibung durch eine Massedichteverteilung $\rho(x)$ übergehen.

9.1 Euler-Winkel

Ist ein Punkt des starren Körpers im Inertialsystem fest fixiert (z. B. Schwerpunkt oder Kreiselspitze, etc.), so kann man die Bezugssysteme \hat{e}'_i und \hat{e}_i so wählen, dass die Ursprünge (in diesem Punkt) festgehalten sind. Damit hat der starre Körper noch 3 Freiheitsgrade. Zwischen \mathbf{x}' im Inertialsystem und \mathbf{x} im körperfesten System besteht dann der Zusammenhang

$$\mathbf{x}' = R\mathbf{x} \quad (9.1)$$

mit $R^T R = \mathbb{1}$ einer orthogonalen Matrix. Die Matrixelemente von R lassen sich durch die drei EULER-Winkel (θ, φ, ψ) parametrisieren. Wir wählen hier eine Konvention, bei der θ und φ den Polarwinkel und Azimutalwinkel der Position einer Drehachse in Kugelkoordinaten beschreiben und ψ dann den Drehwinkel um diese Achse angibt, d. h.

$$0 \leq \theta \leq \pi \quad , \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad , \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi. \quad (9.2)$$

Die beschriebene Interpretation liefert zugleich eine Konstruktionsvorschrift für die Drehmatrix R .

Wir stellen und zunächst eine Drehachse in 3-Richtung vor, die wir in Richtung der Winkelkoordinaten (θ, φ) ausrichten. Dazu drehen wir sie zunächst um den Azimutalwinkel φ um sich selbst. Die zugehörige Drehmatrix lautet

$$D_3(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.3)$$

(die Drehachse zeigt danach natürlich immer noch in die gleiche Richtung).

Dann "kippen" wir die Drehachse um den Polarwinkel θ um die nach (9.3) neu entstandene 1-Achse

$$D_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (9.4)$$

(Die durch diese “Kipp-Achse” beschriebene Gerade heißt auch “Knotenlinie”. Dies ist die Linie, in der sich die (\hat{e}'_1, \hat{e}'_2) und die (\hat{e}_1, \hat{e}_2) Ebene schneiden.)

Schließlich drehen wir das System um die gekippte Drehachse um den Winkel ψ :

$$D_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.5)$$

In der Literatur wird oft die Konvention gewählt, bei der im mathematisch negativen Sinn gedreht wird. Das entspricht genau der transponierten Drehmatrizen, d. h.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= D_3^\top(\psi) D_1^\top(\theta) D_3^\top(\varphi) \mathbf{x}' \\ \text{bzw: } \mathbf{x}' &= D_3(\psi) D_1(\theta) D_3(\varphi) \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Damit ergibt sich

$$R = R(\varphi, \theta, \psi) = D_3(\varphi) D_1(\theta) D_3(\psi). \quad (9.7)$$

Die volle Drehmatrix lautet dann (in der \hat{e}_i Basis)

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \theta \sin \psi & -\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \theta \cos \psi & \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \cos \theta \sin \psi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \theta \cos \psi & -\cos \varphi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (9.8)$$

Durch Zeitableitung und entsprechende Matrixmultiplikation (vgl. (8.19)) lässt sich die vektorielle Winkelgeschwindigkeit im körperfesten System \hat{e}_i berechnen

$$(R^\top \dot{R})_{ij} = -\varepsilon_{ijk} \omega_k \stackrel{\ddot{U}A}{\implies} \boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \begin{pmatrix} \cos \psi \\ -\sin \psi \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\varphi} \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \psi \\ \sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \end{pmatrix} + \dot{\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (9.9)$$

9.2 Trägheitstensor und Drehimpuls

Für einen starren Körper bestehend aus N Massepunkten m_i mit körperfesten Koordinaten $\mathbf{x}_i = \text{const.}$ lautet die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\mathbf{x}}'_i)^\top (\dot{\mathbf{x}}'_i). \quad (9.10)$$

Mit

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}'_i &= R \underbrace{(\dot{\mathbf{x}}_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_i)}_{=0} \\ &= R(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_i) \end{aligned} \quad (9.11)$$

folgt daraus

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_i)^\top \underbrace{R^\top R}_{=1} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_i) = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_i)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{x}_i^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}_i)^2) \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_j \left(\sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{x}_i^2 \delta_{jk} - x_{i,j} x_{i,k}) \right) \boldsymbol{\omega}_k, \end{aligned} \quad (9.12)$$

wobei $j, k = 1, 2, 3$ Vektorindizes sind und $i = 1, \dots, N$ die Massepunkte nummeriert.

Im (9.12) ist es nützlich zwischen der momentanen Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}(t)$ als dynamischer Eigenschaft und der Größe

$$\Theta_{jk} := \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{x}_i^2 \delta_{jk} - x_{i,j} x_{i,k}) \quad (9.13)$$

dem *Trägheitstensor* zu unterscheiden. Der Trägheitstensor hängt von der Verteilung der Massepunkte m_i im körperfesten System ab, ist damit zeitlich konstant und kann als reine Eigenschaft des starren Körpers (und nicht seines Bewegungszustandes) verstanden werden. Allerdings ist die Form des Trägheitstensors von den Details der Wahl des körperfesten Koordinatensystems abhängig. Aus einem gegebenen körperfesten System lässt sich z. B. durch eine zeitunabhängige Drehung der Koordinatenachsen ein neues körperfestes System \hat{e}_i^* erzeugen. Sei $S \in SO(3)$, $S = \text{const}$, so ist

$$\hat{e}_i^* := S_{ij}^\top \hat{e}_j \quad (9.14)$$

eine neue orthonormierte Basis $\hat{e}_i^* \cdot \hat{e}_j^* = \delta_{ij}$. Die Koordinaten \mathbf{x}_i^* der Massepunkte m_i in der neuen Basis sind dann mit den alten Koordinaten \mathbf{x}_i verknüpft über ($\hat{e}_j = S_{jk} \hat{e}_k^*$)

$$\mathbf{x}_i = S \mathbf{x}_i^*. \quad (9.15)$$

Wegen der Orthogonalität gilt

$$S_{jl} S_{km} \delta_{lm} = \delta_{jk}. \quad (9.16)$$

Das Skalarprodukt der Ortsvektoren ist natürlich invariant

$$\mathbf{x}^2 = S_{jl} x_l^* S_{jm} x_m^* = \delta_{lm} x_l^* x_m^* = (\mathbf{x}^*)^2. \quad (9.17)$$

Damit lässt sich der Trägheitstensor in der Basis \hat{e}_i^* konstruieren:

$$\begin{aligned} \Theta_{jk} &= \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{x}_i^2 \delta_{jk} - x_{i,j} x_{i,k}) \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \left((\mathbf{x}^*)^2 \delta_{lm} S_{jl} S_{km} - S_{jl} S_{km} x_{i,l}^* x_{i,m}^* \right) \\ &= S_{il} S_{km} \Theta_{lm}^*. \end{aligned} \quad (9.18)$$

Der Trägheitstensor transformiert sich also bezüglich *jedes* euklidischen Index wie ein Vektor. Da er zwei solche Indizes hat, nennt man ihn auch einen Tensor *zweiter Stufe*.

NB:

Eine Größe T_{j_1, \dots, j_n} , $1 \leq j_k \leq d$, heißt Tensor n -ter Stufe, wenn sich T_{j_1, \dots, j_n} bei einem Basiswechsel $x_j = S_{jk} x_k^*$ mit zeitunabhängigen $S \in SO(3)$ transformiert wie

$$T_{j_1, \dots, j_n} = S_{j_1 k_1} S_{j_2 k_2} \dots S_{j_n k_n} T_{k_1, \dots, k_n}^*. \quad (9.19)$$

D. h. die Größe transformiert sich bezüglich jedes ihrer Indizes wie ein Vektor. Entsprechend ist ein Vektor ein „Tensor erster Stufe“ und ein Skalar ein „Tensor nullter Stufe“.

Der Trägheitstensor ist symmetrisch:

$$\Theta_{jk} \equiv \Theta_{kj} \quad , \quad \Theta^T = \Theta \quad (9.20)$$

und reell $\Theta_{jk} \in \mathbb{R}$ für alle j, k .

In Matrix-Schreibweise lautet das Transformationsverhalten (9.18):

$$\boxed{\Theta = S\Theta^*S^T} \implies \Theta_{jk} = S_{jl}\Theta_{lm}^*S_{mk}. \quad (9.21)$$

Ein zentrales Theorem der linearen Algebra besagt, dass reelle, symmetrische Matrizen durch eine orthogonale Transformation vom Typ (9.21) *diagonalisiert* werden können. Physikalisch bedeutet dies, dass es eine Koordinatentransformation gibt, so dass

$$\Theta^* = S^T\Theta S = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix} = \text{diag}(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3). \quad (9.22)$$

Zusammenfassung aus der linearen Algebra:

Sei $A = A^T$ eine reelle, symmetrische Matrix.

1. Dann heißt λ *Eigenwert* der Matrix A , wenn es einen Vektor $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ gibt, für den

$$A\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y} \quad (9.23)$$

gilt. Der Vektor \mathbf{y} heißt *Eigenvektor* von A .

2. Die Eigenwerte λ sind reell und bestimmt durch das charakteristische Polynom $\det(A - \lambda\mathbb{1}) = 0$.
3. Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.
4. Die Eigenvektoren können so gewählt werden, dass sie ein vollständiges Orthonormalsystem bilden.

Bezogen auf den Trägheitstensor bezeichnet man die Eigenwerte $\Theta_{1,2,3}$ als Hauptträgheitsmomente.

Die Eigenvektoren nennt man Hauptträgheitsachsen. Seien $\hat{n}_{1,2,3}$ die Hauptträgheitsachsen. Dann lautet die kinetische Energie bei einer Drehung um die Drehachse $\boldsymbol{\omega} = \omega \cdot \hat{n}_1$ mit $|\hat{n}_1| = 1$

$$T = \frac{1}{2}\omega^2 \hat{n}_1 \Theta \hat{n}_1 = \frac{1}{2}\omega^2 \Theta_1 \underbrace{\hat{n}_1^2}_{=1} = \frac{1}{2}\Theta_1\omega^2. \quad (9.24)$$

Analog für $\hat{n}_2, \Theta_2; \hat{n}_3, \Theta_3$.

Sei \hat{n} ein beliebiger Einheitsvektor $\hat{n}^2 = 1$. Dann ist das Trägheitsmoment um die Achse \hat{n} definiert als

$$\hat{n}^T \Theta \hat{n} = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{x}_i^2 - (\mathbf{x}_i \cdot \hat{n})^2) = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_{i\perp}^2, \quad (9.25)$$

wobei $\mathbf{x}_{i\perp}$ der Anteil von \mathbf{x}_i senkrecht zur Drehachse $\sim \hat{n}$ ist.

In einer beliebigen körperfesten Basis, in der Θ nicht diagonal ist, sind die Diagonalelemente Θ_{jk} die Trägheitsmomente bei Drehungen um die Koordinatenachsen. Die Nicht-Diagonalelemente Θ_{jk} , $j \neq k$ heißen Deviationsmomente.

Die Gleichung

$$\mathbf{y}^T \Theta \mathbf{y} = y_i y_k \Theta_{jk} = 1 \quad (9.26)$$

definiert das „Trägheitsellipsoid“ im Raum aller $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$. Dass es sich bei der Menge alle \mathbf{y} , die (9.26) erfüllen, um ein Ellipsoid handelt, wird im Koordinatensystem deutlich, bei dem die Basisvektoren den Hauptachsen entsprechen

$$\mathbf{y}^\top \Theta \mathbf{y} = \Theta_1 y_1^2 + \Theta_2 y_2^2 + \Theta_3 y_3^2 = 1. \quad (9.27)$$

Alle oben diskutierten Eigenschaften gelten ebenso für den *Trägheitstensor* einer *kontinuierlichen* Masseverteilung mit *Massendichte* $\rho(\mathbf{x})$

$$\Theta_{jk} := \int d^3x \rho(\mathbf{x}) (\mathbf{x}^2 \delta_{jk} - x_j x_k). \quad (9.28)$$

Beispiele für den Trägheitstensor

- Wir betrachten zwei Massepunkte, die durch eine masselose Stange verbunden sind (Länge ℓ), m_2 befinde sich im Ursprung $\mathbf{x}_2 = 0$, m_1 bewege sich lediglich in der (x_1, x_2) -Ebene.

Dann ist mit $\mathbf{x}_1 = \ell \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_1^2 = \ell^2$:

$$\begin{aligned} \Theta &= m_1 \left(\ell^2 \mathbb{1} - \ell^2 \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi & \cos \varphi \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi \cos \varphi & \sin^2 \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= m_1 \ell^2 \begin{pmatrix} \sin^2 \varphi & -\cos \varphi \sin \varphi & 0 \\ -\cos \varphi \sin \varphi & \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9.29)$$

Die Eigenwerte von Θ bestimmen sich aus dem charakteristischen Polynom

$$\begin{aligned} 0 = \det(\Theta - \lambda \mathbb{1}) &= (m_1 \ell^2 - \lambda) \left[\left(\sin^2 \varphi - \frac{\lambda}{m_1 \ell^2} \right) \right. \\ &\quad \left. \left(\cos^2 \varphi - \frac{\lambda}{m_1 \ell^2} \right) - \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \right] m_1^2 \ell^4 \\ &= (m_1 \ell^2 - \lambda) (\lambda^2 - \lambda m_1 \ell^2) \\ &= (m_1 \ell^2 - \lambda) (\lambda - m_1 \ell^2) \lambda. \end{aligned} \quad (9.30)$$

Die drei Lösungen lauten

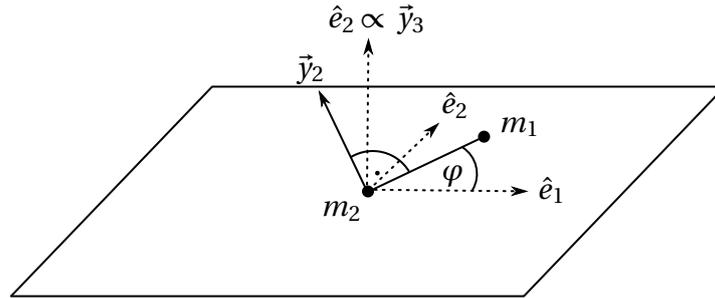
$$\lambda_1 = \lambda_2 = m_1 \ell^2, \quad \lambda_3 = 0. \quad (9.31)$$

Durch direktes Nachrechnen verifiziert man, dass die Eigenvektoren gegeben sind durch

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_3 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9.32)$$

Es ist anschaulich einsichtig, dass die beiden Hauptträgheitsachsen mit nicht-verschwindendem Eigenwert senkrecht zur Verbindungslinie zwischen m_1 und m_2 liegen.

Für Drehungen um diese Verbindungslinie $\sim \mathbf{y}_3$ verschwindet das Trägheitsmoment, da die (idealisierten) Massepunkte keine Ausdehnung besitzen.



2. Für eine *homogene Kugel* mit Dichte ρ und Radius R verschwinden die Deviationsmomente, $\mathbf{x} = r \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$.

z. B.:

$$\Theta_{12} = \rho \int_0^R dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi (r^2 \sin^2\theta \cos\varphi \sin\varphi) = 0. \quad (9.33)$$

Aufgrund der sphärischen Symmetrie müssen alle Hauptträgheitsmomente gleich sein,

$$\begin{aligned} 3\Theta_{11} &= \Theta_{11} + \Theta_{22} + \Theta_{33} \\ &= \rho \int_0^R dr r^2 \underbrace{\int_0^\pi d\theta \sin\theta}_{=2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} \underbrace{(3r^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)}_{-r^2} \\ &= 8\pi\rho \int_0^R dr r^4 = \frac{8\pi\rho}{5} R^5. \end{aligned} \quad (9.34)$$

Mit

$$\rho = \frac{M}{\text{Volumen}} = \frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3} = \frac{3M}{4\pi R^3} \quad (9.35)$$

folgt

$$\Theta_{11} = \Theta_{22} = \Theta_{33} = \frac{2}{5}MR^2. \quad (9.36)$$

(NB: Auch ohne die expliziten Symmetrieanahmen kann man dieses Ergebnis verifizieren.)

Der Drehimpuls im Inertialsystem lautet

$$\mathbf{L}' = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{x}'_i \times \dot{\mathbf{x}}'_i). \quad (9.37)$$

Über den Zusammenhang $\mathbf{x}' = R\mathbf{x}$ und $\dot{\mathbf{x}}' = R(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})$ folgt

$$\mathbf{L}' = \sum_{i=1}^N m_i (R\mathbf{x}_i) \times [R(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_i)]. \quad (9.38)$$

Da beide Vektoren im Kreuzprodukt (1) um die gleiche Drehmatrix gedreht werden, kann man das Kreuzprodukt auch im angedrehten System ausführen und anschließend das Ergebnis drehen:

$$\underline{\mathbf{L}}' = \sum_{i=1}^N m_i R [\mathbf{x}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_i)]. \quad (9.39)$$

Daraus lässt sich der *Drehimpuls im Körperfesten System* extrahieren:

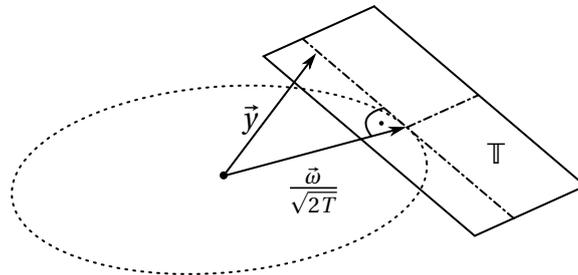
$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{L}} &= R^\top \underline{\mathbf{L}}' = \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{x}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_i)] \\ &= \sum_i m_i [\mathbf{x}_i^2 \boldsymbol{\omega} - \mathbf{x}_i (\mathbf{x}_i \cdot \boldsymbol{\omega})] = \underline{\Theta} \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (9.40)$$

Dieser Zusammenhang besagt, dass $\underline{\mathbf{L}} \parallel \boldsymbol{\omega}$ gilt, wenn die Drehachse $\boldsymbol{\omega}$ einer der Hauptträgheitsachsen des Körpers entspricht. Ansonsten sind $\boldsymbol{\omega}$ und $\underline{\mathbf{L}}$ i.A. nicht parallel.

Eine allgemeine Eigenschaft der Richtung von $\underline{\mathbf{L}}$ lässt sich aus folgender Überlegung extrahieren. Wegen $2T = \boldsymbol{\omega}^\top \underline{\Theta} \boldsymbol{\omega}$ ist $\frac{1}{\sqrt{2T}} \boldsymbol{\omega}$ ein Punkt auf dem Trägheitsellipsoid (vgl. (9.26)). Die Tangentialebene an das Trägheitsellipsoid in diesem Punkt ist

$$\mathbb{T}_{\boldsymbol{\omega}/\sqrt{2T}} = \left\{ \mathbf{y} \mid \mathbf{y}^\top \underline{\Theta} \frac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{2T}} = 1 \right\}, \quad (9.41)$$

d. h. die Menge aller Vektoren \mathbf{y} , deren Projektion auf $\frac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{2T}}$ konstant ist.



Der Drehimpuls $\underline{\mathbf{L}} = \underline{\Theta} \boldsymbol{\omega}$ steht also senkrecht auf der Tangentialebene an das Trägheitsellipsoid im Punkt $\frac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{2T}}$.

Bislang haben wir die Wahl des Ursprungs der Koordinatensysteme völlig offen gelassen. Es liegt nahe zu vermuten, dass die Wahl des Schwerpunkts als Ursprung des körperfesten Systems günstig sein kann. Beginnen wir mit einem beliebigen körperfesten System \mathbf{x} , in dem der Schwerpunkt den Ortsvektor \mathbf{X} hat. Seien \mathbf{x}^* die Koordinaten im Schwerpunktsystem, d. h.

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{x}^*, \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i^* = 0, \quad (9.42)$$

dann gilt für den Trägheitstensor

$$\begin{aligned}
 \Theta_{jk} &= \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{x}_i^2 \delta_{jk} - x_{i,j} x_{i,k}) \\
 &= \sum_i m_i \left[(\mathbf{x}_i^* + \mathbf{X})^2 \delta_{jk} - (x_{i,j}^* + X_j)(x_{i,k}^* + X_k) \right] \\
 &= \sum_i m_i (\mathbf{x}_i^{*2} \delta_{jk} - x_{i,j}^* x_{i,k}^*) + M(\mathbf{X}^2 \delta_{jk} - X_j X_k) \\
 &\quad + 2\delta_{jk} \mathbf{X} \cdot \sum_i m_i \mathbf{x}_i^* - X_j \sum_i m_i x_{i,k}^* - X_k \sum_i m_i x_{i,j}^*,
 \end{aligned} \tag{9.43}$$

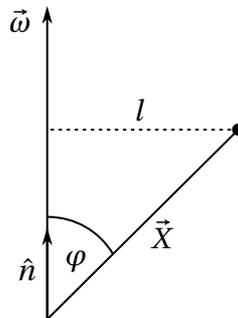
wobei $M = \sum_{i=1}^N m_i$ die Gesamtmasse ist. Aufgrund der Definition des Schwerpunkts (9.42) verschwinden alle 3 letzten Terme in (9.43)

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \Theta_{jk} &= \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{x}_i^{*2} \delta_{jk} - x_{i,j}^* x_{i,k}^*) + M(\mathbf{X}^2 \delta_{jk} - X_j X_k) \\
 &= \Theta_{jk}^* + M(\mathbf{x}^2 \delta_{jk} - X_j X_k).
 \end{aligned} \tag{9.44}$$

Sei \hat{n} nun ein Einheitsvektor, der in Richtung der Drehachse zeige, dann gilt

$$\ell^2 = \mathbf{X}^2 - (\mathbf{X} \cdot \hat{n})^2, \tag{9.45}$$

wobei ℓ den Abstand der Drehachse vom Schwerpunkt bezeichnet:



Damit gilt für das Trägheitsmoment bei Rotation um \hat{n} :

$$\hat{n}^T \Theta \hat{n} \stackrel{(9.44)}{=} \hat{n}^T \Theta^* \hat{n} + M \ell^2 \tag{9.46}$$

bekannt als *Satz von Steiner*.

D. h. dieses Trägheitsmoment ist gleich dem um $M \ell^2$ vermehrten Trägheitsmoment Θ^* im Schwerpunktsystem.

9.3 Eulersche Gleichungen und klassische Kreisel

Bislang haben wir rein kinematische Eigenschaften des starren Körpers diskutiert. Die dynamischen Eigenschaften werden analog zum 2. NEWTON'schen Gesetz für Massepunkte durch die EULER'schen Gleichungen beschrieben, die natürlich aus dem 2. NEWTON'schen Gesetz folgen.

9.3.1 Eulersche Gleichungen

Auf den i -ten Massepunkt wirke im raumfesten Koordinatensystem (Inertialsystem) die äußere Kraft F_i . Dann ist das Drehmoment gegeben durch

$$\mathbf{M}' = \sum_{i=1}^N (\mathbf{x}'_i \times \mathbf{F}'_i) \quad (9.47)$$

und es gilt für den Drehimpuls

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \mathbf{M}', \quad (9.48)$$

was im Inertialsystem die Dynamik des starren Körpers beschreibt. Wir wollen diese Dynamik nun im körperfesten System formulieren.

Es gelten die Zusammenhänge

$$\mathbf{L}' = R\mathbf{L}, \quad \mathbf{M}' = R\mathbf{M}, \quad \mathbf{L} \stackrel{(9.40)}{=} \theta \boldsymbol{\omega} \quad (9.49)$$

und somit

$$\begin{aligned} R\mathbf{M} &= \frac{d}{dt}(R\mathbf{L}) = R\dot{\mathbf{L}} + \dot{R}\mathbf{L} = R(\dot{\mathbf{L}} + R^\top \dot{R}\mathbf{L}) \\ &= R(\dot{\mathbf{L}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}). \end{aligned} \quad (9.50)$$

Nach Multiplikation mit R^\top folgt

$$\boxed{\mathbf{M} = \dot{\mathbf{L}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \theta \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \theta \boldsymbol{\omega}}. \quad (9.51)$$

Dies sind die EULER'schen Gleichungen. Wählt man das körperfeste System so, dass die Koordinatenachsen den Hauptträgheitsachsen entsprechen, gilt komponentenweise:

$$\begin{aligned} M_1 &= \theta_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \omega_3 (\theta_3 - \theta_2) \\ M_2 &= \theta_2 \dot{\omega}_2 + \omega_1 \omega_3 (\theta_1 - \theta_3) \\ M_3 &= \theta_3 \dot{\omega}_3 + \omega_1 \omega_2 (\theta_2 - \theta_1). \end{aligned} \quad (9.52)$$

Im Folgenden betrachten wir die EULER-Gleichungen für wichtige (einfache) Spezialfälle.

9.3.2 Kräftefreier Symmetrischer Kreisel

Für einen starren Körper, der rotationssymmetrisch um eine Achse ist, z. B. die 3-Achse, folgt, dass die Trägheitsmomente senkrecht zu dieser Achse identisch sein müssen, d. h. $\theta_1 = \theta_2$.

Für den Fall einer kräftefreien Bewegung ($F = 0 \implies M = 0$) folgt aus den EULER'schen Gleichungen:

$$\begin{aligned}(\theta_1 - \theta_3)\omega_2\omega_3 - \theta_1\dot{\omega}_1 &= 0 \\(\theta_3 - \theta_1)\omega_3\omega_1 - \theta_1\dot{\omega}_2 &= 0 \\ \theta_3\dot{\omega}_3 &= 0.\end{aligned}\tag{9.53}$$

Wir nehmen desweiteren (o. B. d. A.) an, dass der Ursprung des Koordinatensystems im Schwerpunkt liegt. Für den Fall, dass die Rotationsachse $\boldsymbol{\omega}$ entlang einer der Hauptachsen des Körpers liegt, d. h.

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{pmatrix},$$

reduzieren sich die EULER'schen Gleichungen auf entweder

$$\theta_1\dot{\omega}_1 = 0, \quad \theta_1\dot{\omega}_2 = 0 \quad \text{oder} \quad \theta_3\dot{\omega}_3 = 0$$

und die Lösungen sind trivialerweise Rotationen mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um diese Hauptachsen.

Betrachten wir also den allgemeinen Fall, in dem zu gegebener Zeit mindestens zwei Komponenten $\omega_i \neq 0$.

Für die Rotation um die 3-Achsen gilt:

$$\theta_3\dot{\omega}_3 = 0 \implies \omega_3 = \text{const.}\tag{9.54}$$

mit einem Wert ω_3 , der durch die Anfangsbedingungen fixiert ist. Die beiden anderen EULER'schen Gleichungen lauten dann

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= - \left[\frac{\theta_3 - \theta_1}{\theta_1} \omega_3 \right] \omega_2 \\ \dot{\omega}_2 &= \left[\frac{\theta_3 - \theta_1}{\theta_1} \omega_3 \right] \omega_1.\end{aligned}\tag{9.55}$$

Mit der Definition

$$\Omega = \frac{\theta_3 - \theta_1}{\theta_1} \omega_3 \stackrel{(9.54)}{=} \text{const.}\tag{9.56}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 + \Omega\omega_2 &= 0 \\ \dot{\omega}_2 - \Omega\omega_1 &= 0.\end{aligned}\tag{9.57}$$

Wir führen an dieser Stelle ein komplexe Hilfsvariable ein

$$\eta := \omega_1 + i\omega_2, \quad (9.58)$$

welche die Differenzialgleichung

$$\dot{\eta} - i\Omega\eta \stackrel{(9.57)}{=} 0 \quad (9.59)$$

erfüllt. Die Gleichung wird durch

$$\eta(t) = Ae^{i\Omega t} \quad (9.60)$$

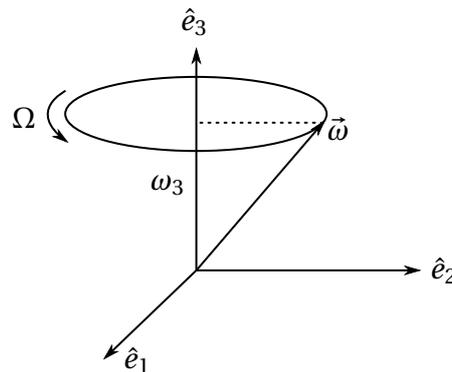
und somit

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= A \cos \Omega t \\ \omega_2(t) &= A \sin \Omega t \end{aligned} \quad (9.61)$$

gelöst. (Entsprechend phasenverschobene Funktionen $\eta = Ae^{i\Omega t + \delta}$ sind natürlich ebenfalls Lösungen). Mit $\omega_3 = \text{const.}$ gilt ebenfalls

$$|\boldsymbol{\omega}| = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} = \sqrt{A^2 + \omega_3^2} = \text{const.} \quad (9.62)$$

Damit beschreibt die Drehachse $\boldsymbol{\omega}(t)$ eine Kreisbahn parallel zur \hat{e}_1, \hat{e}_2 Ebene, die mit „Winkelgeschwindigkeit“ bzw. *Präzessionsgeschwindigkeit* Ω durchlaufen wird.



Im körperfesten System schneidet also $\boldsymbol{\omega}$ einen Kegel aus, der rotationssymmetrisch um die Symmetrieachse liegt.

Da wir eine kräftefreie Bewegung betrachten, ist der Drehimpuls im Inertialsystem \hat{e}'_i zeitlich erhalten, das bedeutet allerdings, dass wir einen zeitlich veränderlichen Drehimpuls im körperfesten System erwarten.

Eine weitere Erhaltungsgröße im kräftefreien Fall ist die kinetische Energie. Im körperfesten Schwerpunktsystem beschreibt diese rein die Rotationsenergie und ist gegeben durch

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^\top \underbrace{\boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\omega}}_{=\mathbf{L}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} = \text{const.} \quad (9.63)$$

Dies bedeutet, dass der Winkel zwischen $\boldsymbol{\omega}$ und \mathbf{L} immer konstant bleibt (aus der Erhaltung des Drehimpulses im Inertialsystem $\mathbf{L}' = \text{const.} \implies \mathbf{L}'^2 = \text{const.}$ folgt mit $\mathbf{L}' = R\mathbf{L}$, dass auch der Betrag von \mathbf{L} im körperfesten System konstant bleibt, $\mathbf{L}^2 = \text{const.}$)

Da $\boldsymbol{\omega}$ im körperfesten System um die \hat{e}_3 -Achse präzediert, steht $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ senkrecht auf der durch \hat{e}_3 und $\boldsymbol{\omega}$ aufgespannten Ebene, was sich anhand der Lösung (9.54) & (9.60) direkt verifizieren lässt. Aus (9.62) folgt dann

$$0 = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}) = \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{L} + \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{L}} \quad (9.64)$$

$$\stackrel{(9.63)}{\implies} \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{L} = 0.$$

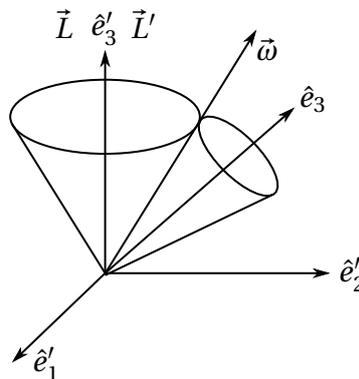
Dies bedeutet das \mathbf{L} ebenfalls in der Ebene liegen muss, die durch $\boldsymbol{\omega}$ und \hat{e}_3 aufgespannt wird. Da $\boldsymbol{\omega}$ um \hat{e}_3 präzediert, präzediert ebenfalls $\mathbf{L}(t)$ mit Präzessionswinkelgeschwindigkeit

$$\Omega = \frac{\theta_3 - \theta_1}{\theta_1} \omega_3 \quad (9.65)$$

um die \hat{e}_3 -Achse.

Wir können diese Präzession auch vom Inertialsystem aus interpretieren. Da in diesem $\mathbf{L}' = \text{const.}$ ist, können wir die \hat{e}'_3 -Achse entlang \mathbf{L}' wählen. Der Zusammenhang $\mathbf{L}' = R\mathbf{L}$ impliziert nur, dass die Hauptträgheitsachse \hat{e}_3 des körperfesten Systems vom Inertialsystem aus betrachtet um die \hat{e}'_3 -Achse mit Ω präzediert. Entsprechend präzediert $\boldsymbol{\omega}$ so, dass \hat{e}'_3 , \hat{e}_3 und $\boldsymbol{\omega}$ immer in einer Ebene liegen.

Diese Situation lässt sich im Bild von zwei auseinander abrollenden Kegeln verdeutlichen:



Vernachlässigt man die von Sonne, Mond und anderen Planeten auf die Erde ausgeübten Drehmomente, kann die Erde näherungsweise als kräftefreier Kreisel betrachtet werden. Zudem ist die Erde keine perfekte Kugel, sondern wegen der Abplattung an den Polen ein symmetrischer Kreisel mit

$$\frac{\theta_3 - \theta_1}{\theta_1} = \frac{1}{300} \quad (9.66)$$

Mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_3 \approx \omega = \frac{2\pi}{\text{Tag}}$$

folgt eine Präzessionswinkelgeschwindigkeit von $\Omega \approx \frac{2\pi}{300 \text{ Tage}}$.

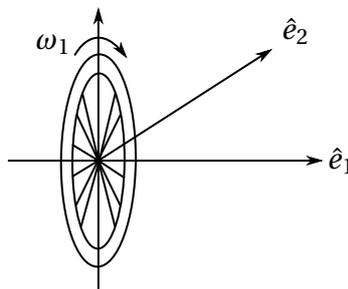
In der Tat ist die Drehachse nicht identisch mit der Hauptträgheitsachse, was bedeutet, dass die Drehachse nicht fest mit der Erde verbunden ist. Sie wandert um den geografischen

Nordpol innerhalb eines Radius von $\approx 4,5\text{m}$ (mit starken Schwankungen herum). Die tatsächliche Periode beträgt im Durchschnitt ≈ 427 Tage für die Präzessionsbewegung. Der Unterschied zu den oben geschätzten 300 Tagen wird der Tatsache zugeschrieben, dass die Erde kein starrer Körper ist, sondern elastische Eigenschaft besitzt.

9.3.3 Symmetrischer Kreisel im Gravitationsfeld

Die Änderung seiner Drehachse, mit der ein Kreisel auf ein einwirkendes Drehmoment antwortet, ist typischerweise nicht im Einklang mit der naiven Intuition.

Betrachten wir z. B. einen um die 1-Achse symmetrischen Kreisel, d. h. $\theta_2 = \theta_3$, der um die Symmetrieachse mit $\omega_1 = \text{const.}$ rotiert. ($\omega_2 = \omega_3 = 0$).



Wenn wir nun eine Kraft auf eine Seite der Drehachse in \hat{e}_2 -Richtung ausüben, entspricht dies einem Drehmoment in \hat{e}_3 -Richtung, d. h. $M_3 \neq 0$.

Gemäß

$$M_3 = \theta_3 \dot{\omega}_3 + \omega_1 \underbrace{\omega_2}_{=0} (\theta_2 - \theta_1) = \theta_3 \dot{\omega}_3 \quad (9.67)$$

führt dies (wie erwartet) zu einer Drehbewegung um die 3-Achse $\omega_3 \neq 0$. Für die 2. Komponente bedeutet dies

$$0 = M_2 = \theta_2 \dot{\omega}_2 + \omega_1 \omega_3 (\theta_1 - \underbrace{\theta_3}_{=\theta_2}). \quad (9.68)$$

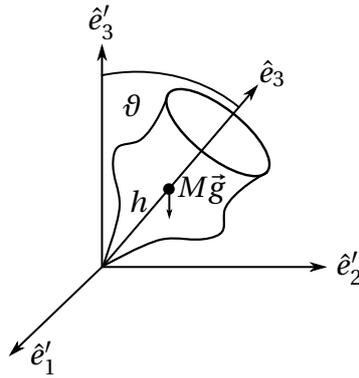
Der zweite Term verschwindet nun nicht mehr. Obwohl kein Drehmoment M_2 angelegt wird, erzwingt diese EULER-Gleichung ebenfalls eine Änderung der Drehachse mit endlicher ω_2 -Komponente. Es ergibt sich also eine (naiv unerwartete) Drehbewegung um die 2-Achse.

Diese grundlegende in den EULER-Gleichungen enthaltene Mechanismus wird in Kreisel-spielzeugen (und Instrumenten wie z. B. Gyroskope) ausgenutzt und kommt auch im symmetrischen Kreisel im Gravitationsfeld zum tragen: Konkret betrachten wir einen symmetrischen Kreisel mit $\theta_1 = \theta_2$, der an einem Aufpunkt (i.A. \neq Schwerpunkt) festgestellt wird und sich im Gravitationsfeld befindet. Zur Beschreibung wählen wir ein Inertialsystem und ein körperfestes System, die ihren gemeinsamen Ursprung in diesem Aufpunkt haben.

Die Schwerkraft wirkt in negative 3'-Richtung und greift am Schwerpunkt mit den Betrag Mg an, wobei M die Gesamtmasse des Kreisels ist. Sei h der Abstand des Schwerpunkts vom Aufpunkt.

Die kinetische Energie ist (Betrachtung im körperfesten Hauptachsensystem):

$$T = \frac{1}{2} \theta_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} \theta_3 \omega_3^2. \quad (9.69)$$



Im Folgendem verwenden wir das Resultat aus (9.9), das die Konstruktion von ω durch EULER-Winkel im körperfesten System beschreibt:

$$\omega = \dot{\vartheta} \begin{pmatrix} \cos \psi \\ -\sin \psi \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\varphi} \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \psi \\ \sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \end{pmatrix} + \dot{\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (9.70)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= (\dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi)^2 \\ &= \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \psi + 2\dot{\varphi} \dot{\vartheta} \sin \vartheta \sin \psi \cos \psi + \dot{\vartheta}^2 \cos^2 \psi \\ \omega_2^2 &= (\dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi)^2 \\ &= \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \psi - 2\dot{\varphi} \dot{\vartheta} \sin \vartheta \sin \psi \cos \psi + \dot{\vartheta}^2 \sin^2 \psi, \end{aligned} \quad (9.71)$$

sodass

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2. \quad (9.72)$$

Außerdem gilt nach (9.70):

$$\omega_3^2 = (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2. \quad (9.73)$$

Die kinetische Energie lautet folglich

$$T = \frac{1}{2} \theta_1 (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2} \theta_3 (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2. \quad (9.74)$$

Die potentielle Energie zur Gravitationskraft ist

$$U = Mgh \cos \theta, \quad (9.75)$$

sodass die Lagrange-Funktion lautet:

$$L = \frac{1}{2} \theta_1 (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2} \theta_3 (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2 - Mgh \cos \theta. \quad (9.76)$$

Offenbar sind φ und ψ beides zyklische Koordinaten da L nur von $\dot{\varphi}$ und $\dot{\psi}$ abhängt. Die zugehörigen kanonisch konjugierten Impulse sind daher Erhaltungsgrößen:

$$\begin{aligned} p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = (\theta_1 \sin^2 \vartheta + \theta_3 \cos^2 \vartheta) \dot{\varphi} + \theta_3 \dot{\psi} \cos \vartheta = \text{const.} \\ p_\psi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \theta_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta) = \text{const.} \stackrel{(9.73)}{=} \theta_3 \omega_3. \end{aligned} \quad (9.77)$$

Da die zyklischen Koordinaten Winkel sind, entsprechend die kanonischen Impulse enthaltenen Drehimpulsen entlang der Achsen, bezüglich der φ und ψ Drehwinkel sind. Dies sind die \hat{e}'_3 -Achse im Inertialsystem (für φ) bzw. die \hat{e}_3 -Achse im körperfesten System (für ψ). Dies ist einsichtig, da die Gravitationskraft ein Drehmoment entlang der *Knotenlinie* (vgl. Kommentar unter (9.4)) erzeugt, welche senkrecht auf \hat{e}_3 und \hat{e}'_3 steht.

Die Gleichungen (9.77) können nach $\dot{\varphi}$ und $\dot{\psi}$ aufgelöst werden. Aus der zweiten folgt z. B.

$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi - \theta_3 \dot{\varphi} \cos \vartheta}{\theta_3}. \quad (9.78)$$

Einsetzen in die erste Gleichung liefert

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \vartheta}{\theta_1 \sin^2 \vartheta} \quad (9.79)$$

und damit aus (9.78)

$$\Rightarrow \dot{\psi} = \frac{p_\psi}{\theta_3} - \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \vartheta) \cos \vartheta}{\theta_1 \sin^2 \vartheta}. \quad (9.80)$$

Da das System konservativ ist, gilt desweiteren die Energieerhaltung

$$E = \frac{1}{2} \theta_1 (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2} \theta_3 \omega_3^2 + Mgh \cos \vartheta = \text{const.} \quad (9.81)$$

Da wegen (9.77), $p_4 = \theta_3 \omega_3$, der zweite Term separat eine Konstante ist, betrachten wir die Erhaltungsgröße

$$E' := E - \frac{1}{2} \theta_3 \omega_3^2 = \frac{1}{2} \theta_1 (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + Mgh \cos \vartheta = \text{const.} \quad (9.82)$$

Mit (9.79) können wir in E' die Abhängigkeit von $\dot{\varphi}$ eliminieren:

$$E' = \frac{1}{2} \theta_1 \dot{\vartheta}^2 + V(\vartheta) \quad (9.83)$$

mit

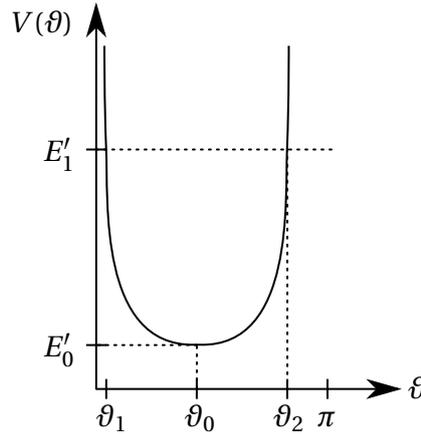
$$V(\vartheta) := \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \vartheta)^2}{2\theta_1 \sin^2 \vartheta} + Mgh \cos \vartheta \quad (9.84)$$

als effektivem Potential für die Bewegung in ϑ . Der „Kippwinkel“ ϑ der Rotationsachse zur senkrechten ist zunächst grundsätzlich auf $0 \leq \vartheta \leq \pi$ beschränkt. Für endliche $p_\varphi, p_\psi = \text{const.}$ (bestimmt durch Anfangsbedingungen) hat $V(\vartheta)$ typischerweise die im Bild gezeigte Form.

Der Term $\sim \frac{1}{\sin^2 \vartheta}$ erzeugt Potentialbarrieren bei $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$. Für (durch Anfangsbedingungen) gegebenes $E' = \text{const.}$, z. B. $E' = E'_1 < \infty$ ist die Bewegung des Kippwinkels auf ein endliches Intervall

$$0 < \vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2 < \pi$$

beschränkt. Die Winkel ϑ_1 und ϑ_2 spielen die Rolle von Umkehrpunkten analog zum 2-Körper-Problem. Für eine minimale Energiekonstante $E' = E'_0$ wird das Potentialminimum bei einem Winkel ϑ_0 eingenommen. D. h. für dieses E'_0 kann der Kippwinkel für die gesamte Bewegung nur einen festen Wert $\vartheta = \vartheta_0$ annehmen. Die verbleibende Bewegungsfreiheit des



Kreisels in diesem Fall ist eine Präzession um die \hat{e}'_3 -Achse. Der Winkel ϑ_0 lässt sich analytisch untersuchen:

$$0 = \frac{\partial V(\vartheta_0)}{\partial \vartheta} = \frac{-\cos \vartheta_0 (p_\varphi - p_\psi \cos \vartheta_0)^2 + p_\psi \sin^2 \vartheta_0 (p_\varphi - p_\psi \cos \vartheta_0)}{\theta_1 \sin^3 \vartheta_0} - Mgh \sin \vartheta_0. \quad (9.85)$$

Mit der Definition

$$\beta = p_\varphi - p_\psi \cos \vartheta_0 \quad (9.86)$$

folgt:

$$\beta^2 \cos \vartheta_0 - \beta p_\psi \sin^2 \vartheta_0 + Mgh \theta_1 \sin^4 \vartheta_0 = 0. \quad (9.87)$$

Diese quadratische Gleichung in β hat die Lösungen

$$\beta_{\pm} = \frac{p_\psi \sin^2 \vartheta_0}{2 \cos \vartheta_0} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4Mgh\theta_1 \cos \vartheta_0}{p_\psi^2}} \right). \quad (9.88)$$

Da β eine reelle Größe sein muss, muss für den Fall das $\vartheta_0 < \frac{\pi}{2}$ ist, gelten

$$p_\psi^2 \geq 4Mgh\theta_1 \cos \vartheta_0. \quad (9.89)$$

Mit (9.77), $p_\psi = \theta_3 \omega_3$, folgt

$$\omega_3 \geq \frac{2}{\theta_3} \sqrt{Mgh\theta_1 \cos \vartheta_0}. \quad (9.90)$$

Daraus können wir schließen, dass eine mögliche Präzessionsbewegung bei festem ϑ_0 nur möglich ist, falls die Winkelgeschwindigkeit ω_3 größer als der durch (9.90) gegebene Wert ist.

Die Präzessionsbewegung wird beschrieben durch $\dot{\varphi}$. Für den Fall, dass $\vartheta = \vartheta_0$, folgt aus (9.79):

$$\dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi} \Big|_{\vartheta=\vartheta_0} = \frac{\beta}{\theta_1 \sin^2 \vartheta_0}. \quad (9.91)$$

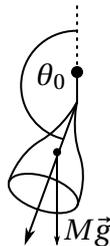
Für die beiden verschiedenen Werte von $\beta = \beta_{\pm}$ gibt es also zwei verschiedene Präzessionsbewegungen:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{0+} &= \frac{\beta_+}{\theta_1 \sin^2 \vartheta_0} \text{ (schnelle Präzession)} \\ \dot{\varphi}_{0-} &= \frac{\beta_-}{\theta_1 \sin^2 \vartheta_0} \text{ (langsame Präzession)}. \end{aligned} \quad (9.92)$$

Im Falle eines „schnellen Kreisels“, d. h. ω_3 bzw. p_4 groß ist die Wurzel in (9.88) entwickelbar und es folgt für die Präzession

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{0+} &= \frac{\theta_3 \omega_3}{\theta_1 \cos \vartheta_0} \\ \dot{\varphi}_{0-} &= \frac{Mgh}{\theta_3 \omega_3}. \end{aligned} \tag{9.93}$$

Gewöhnlich beobachtet man die langsame Präzession $\dot{\varphi}_{0-}$. Diese Ergebnisse haben wir für den Fall $\vartheta_0 < \frac{\pi}{2}$ abgeleitet, d. h. wir haben angenommen, dass der Schwerpunkt über dem Auflagepunkt ist. Mit geeigneter Aufhängung lässt sich auch der Fall $\vartheta_0 > \frac{\pi}{2}$ realisieren.



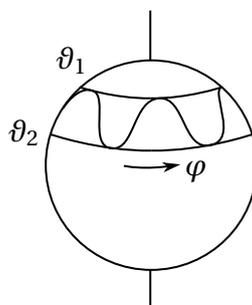
In diesem Fall ist der Radikand in (9.88) immer positiv, und es gibt folglich keine Einschränkung an ω_3 . Da die Wurzel dann größer als 1 ist, haben die langsame und schnelle Präzession $\dot{\varphi}_0$ dann unterschiedliche Vorzeichen, insbesondere wechselt $\dot{\varphi}_{0-}$ für $\vartheta_0 > \frac{\pi}{2}$ im Vergleich zu $\vartheta_0 < \frac{\pi}{2}$ das Vorzeichen, d. h. die Präzessionsrichtung.

Für den allgemeinen Fall, in dem $E' > E'_0$, überstreicht ϑ das Intervall $\vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2$. Aus (9.79),

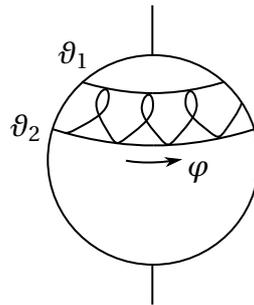
$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \vartheta}{\theta_1 \sin^2 \vartheta} \tag{9.94}$$

wird deutlich, dass $\dot{\varphi}$ je nach Werten für p_φ und p_ψ das Vorzeichen wechseln kann (aber nicht muss).

Falls $\dot{\varphi}$ das Vorzeichen nicht wechselt, präzediert der Kreisel monoton in eine Richtung um die \hat{e}'_3 -Achse, und die \hat{e}_3 -Figurenachse oszilliert während der Präzession zwischen $\vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2$. Diese Bewegung wird „Nutation“ genannt. Der Pfad der Figurenachse projiziert auf eine den Kreisel umgebende Kugeloberfläche und sieht dann folgendermaßen aus:



Für den Fall, dass $\dot{\varphi}$ das Vorzeichen wechselt, müssen $\dot{\varphi}$ bei ϑ_1 und $\dot{\varphi}$ bei ϑ_2 unterschiedliches Vorzeichen haben. Die Präzessionsbewegung verläuft also in Schleifen:



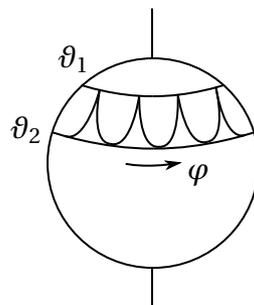
Im Grenzfall, dass p_φ und p_ψ so gewählt sind, dass

$$(p_\varphi - p_\psi \cos \vartheta) \Big|_{\vartheta=\vartheta_1} = 0 \quad (9.95)$$

gilt

$$\dot{\varphi}(\vartheta) = 0, \quad \dot{\vartheta} \Big|_{\vartheta=\vartheta_1} = 0. \quad (9.96)$$

Die Präzession/Nutation entwickelt also Spitzen („cusps“).



Dieser Grenzfall wird tatsächlich natürlicherweise angenommen, wenn man einen (bereits angetriebenen) Kreisel im Schwerfeld loslässt. Der Moment des Loslassens entspricht einen „Cusp“.

9.3.4 Stabilität von kräftefreien Rotationen starrer Körper

Für den Fall von rotierenden starren Körpern, die ohne Krafteinwirkung rotieren, wollen wir die Frage untersuchen, welche Rotationsbewegungen stabil sind. Stabilität bedeutet, dass kleine Störungen der Bewegung wieder zur Bewegung hinführen (mit möglichen kleinen Schwingungen um diese Bewegung).

Wir betrachten einen allgemeinen Körper mit Hauptträgheitsmomenten $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ und beschränken uns auf Rotationen um eine Hauptträgheitsachse. Sei o. B. d. A.

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1. \quad (9.98)$$

Eine kleine Störung dieser Bewegung parametrisieren wir durch

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \lambda \hat{e}_2 + \mu \hat{e}_3 \quad (9.99)$$

mit $\frac{\lambda}{\omega_1}, \frac{M}{\omega_1} \ll 1$.

Die EULER-Gleichungen lauten dann

$$\begin{aligned}(\theta_2 - \theta_3)\lambda\mu - \theta_1\dot{\omega}_1 &= 0 \\(\theta_3 - \theta_1)\mu\omega_1 - \theta_2\dot{\lambda} &= 0 \\(\theta_1 - \theta_2)\lambda\omega_1 - \theta_3\dot{\mu} &= 0.\end{aligned}\tag{9.100}$$

Vernachlässigen wir Terme quadratisch in den Störungen λ, μ , so besagt die erste Gleichung $\theta_1\dot{\omega}_1 = 0 \implies \omega_1 \approx \text{const.}$

Daraus folgt:

$$\dot{\lambda} = \left(\frac{\theta_3 - \theta_1}{\theta_2} \omega_1 \right) \mu \tag{9.101}$$

$$\dot{\mu} = \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_3} \omega_1 \right) \lambda, \tag{9.102}$$

wobei die Terme in Klammern zeitlich konstant sind. Differenzieren der ersten Gleichung und einsetzen der Zweiten führt auf

$$\ddot{\lambda} + \frac{(\theta_1 - \theta_3)(\theta_1 - \theta_2)}{\theta_2\theta_3} \omega_1^2 \lambda = 0, \tag{9.103}$$

ähnlich für μ :

$$\ddot{\mu} + \frac{(\theta_1 - \theta_3)(\theta_1 - \theta_2)}{\theta_2\theta_3} \omega_1^2 \mu = 0. \tag{9.104}$$

Für

$$\frac{(\theta_1 - \theta_3)(\theta_1 - \theta_2)}{\theta_2\theta_3} > 0 \tag{9.105}$$

handelt es sich jeweils um harmonische Oszillator-Gleichungen mit entsprechend oszillierenden Lösungen

$$\lambda, \mu \sim \cos(\Omega t + \delta) \tag{9.106}$$

mit

$$\Omega = \sqrt{\frac{(\theta_1 - \theta_3)(\theta_1 - \theta_2)}{\theta_2\theta_3}}. \tag{9.107}$$

Die Bedingung (9.105) bedeutet also, dass solche Rotationen unter kleinen Störungen λ, μ stabil sind und oszillatorische Schwingungen in den Störungen um die ungestörte Bewegung $\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1$ ausführen. Die *Stabilitätsbedingung* (9.105) ist erfüllt für

$$(1) \quad \theta_1 > \theta_2, \theta_3, \quad \text{oder} \quad (2) \quad \theta_1 < \theta_2, \theta_3. \tag{9.108}$$

Fall (1) beschreibt Rotationen um die Hauptträgheitsachsen mit dem größten, bzw. Fall (2) mit dem kleinsten, Trägheitsmoment. Diese Rotationsachsen sind stabil.

Bedingung (9.105) ist nicht erfüllt für den Fall

$$(3) \quad \theta_2 < \theta_1 < \theta_3. \tag{9.109}$$

In diesem Fall enthalten die Lösungen von (9.103), (9.104) exponentiell anwachsende Komponenten $\lambda, \mu \sim e^{|\Omega|t}$. D. h. kleine Störungen führen schnell weg von der anfänglichen Bewegung. Diese Rotationsachse ist instabil. Das Ergebnis lässt sich mit einem Tennisschläger leicht experimentell verifizieren.

10 Kanonische Bewegungsgleichungen - Hamiltonsche Dynamik

Bei der Diskussion des HAMILTON'schen Prinzips war die LAGRANGE-Funktion $L(q_i, \dot{q}_i; t)$ von zentraler Bedeutung. Obwohl der LAGRANGE-Formalismus sowohl vom praktischen Standpunkt betrachtet die Beschreibung vieler Systeme vereinfacht als auch viele der Mechanik zugrunde liegenden Strukturen offenbart, verbleiben gewisse strukturelle Defizite. So wird z. B. die Abhängigkeit der Funktion L von q und \dot{q} einerseits unabhängig von einander betrachtet, andererseits sind q und \dot{q} durch Zeitableitung miteinander verknüpft.

Desweiteren bestimmt die Wahl eines Punktes im Konfigurationsraum q_j die Dynamik eines Systems nicht vollständig, da verschiedene Trajektorien durch den selben Punkt im Konfigurationsraum mit unterschiedlicher Geschwindigkeit laufen können.

10.1 Kanonische Bewegungsgleichungen

Diese „Mängel“ werden in der *kanonischen* Formulierung der Mechanik behoben, die gleichzeitig die formale Grundlage für Strukturen der Quantenmechanik liefert.

Als alternative dynamische Variable zu \dot{q}_j bietet sich der kanonische Impuls an,

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}. \quad (10.1)$$

Die LAGRANGE-Bewegungsgleichung $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j}$ schreibt sich dann unmittelbar

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}. \quad (10.2)$$

Es sei zudem an die HAMILTON-Funktion erinnert

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L, \quad (10.3)$$

die unter bestimmten Voraussetzungen der Gesamtenergie entspricht und zeitlich erhalten ist.

Um nun die verallgemeinerten Geschwindigkeiten \dot{q}_j als Variable loszuwerden, können wir (10.1) implizit nach \dot{q}_j auflösen:

$$p_j = \frac{\partial L(q_j, \dot{q}_j; t)}{\partial \dot{q}_j} \implies \dot{q}_j = \dot{q}_j(q_j, p_j; t) \quad (10.4)$$

Einsetzen von (10.4) in (10.3) liefert die HAMILTON-Funktion als Funktion von q_j und p_j .

$$H(q_j, p_j; t) = \sum_j p_j \dot{q}_j - L(q_j, \dot{q}_j; t), \quad \text{mit } \dot{q}_j = \dot{q}_j(q_j, p_j; t) \quad (10.5)$$

(NB: (10.4) definiert eine „Legendre-Transformation“).

Im Folgenden wollen wir immer die HAMILTON-Funktion als Funktion der Variablen q_j und p_j (und t) betrachten. Die Menge aller q_j und p_j eines Systems bildet den „Phasenraum“. Das totale Differenzial von H lautet

$$dH = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (10.6)$$

Gemäß der Definition (10.4) gilt ebenfalls

$$\begin{aligned} dH &= \sum_k \left(\dot{q}_k dp_k - p_k d\dot{q}_k - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_k}}_{=\dot{p}_k} dq_k - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}_{=p_k} d\dot{q}_k \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_k (\dot{q}_k dp_k - \dot{p}_k dq_k) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Da die Differenziale dp_k , dq_k , dt unabhängig voneinander sind und beliebig gewählt werden können, folgen aus (10.6) und (10.7) per Koeffizientenvergleich die HAMILTON'schen Bewegungsgleichungen

$$\boxed{\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}} \quad \boxed{\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}}, \quad (10.8)$$

sowie

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (10.9)$$

Die HAMILTON'schen Bewegungsgleichungen werden wegen der gleichberechtigten Behandlung von q_k und p_k auch *kanonische* Bewegungsgleichungen genannt.

Hat ein System s Freiheitsgrade q_k , $k = 1, \dots, s$, so wird seine Dynamik durch die $2s$ HAMILTON'schen-Bewegungsgleichungen beschrieben, die jeweils Differentialgleichungen 1. Ordnung sind (im Vergleich zu s Bewegungsgleichungen 2. Ordnung in der LAGRANGE-Formulierung.)

Für die totale Zeitableitung von H folgt aus (10.5):

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \sum_k \left(\underbrace{\frac{\partial H}{\partial q_k}}_{-p_k} \underbrace{\frac{dq_k}{dt}}_{\dot{q}_k} + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_k}}_{\dot{q}_k} \underbrace{\frac{dp_k}{dt}}_{\dot{p}_k} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \\ &\Rightarrow \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}, \end{aligned} \quad (10.10)$$

d. h. die HAMILTON-Funktion ist eine Erhaltungsgröße, falls sie explizit zeitunabhängig ist, $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$.

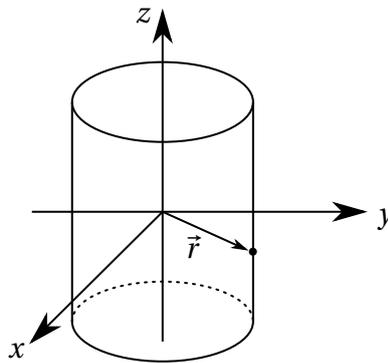
In früheren Kapiteln haben wir bereits diskutiert, dass $H = E$ (gesamte Energie) = $T + U$ gilt, sofern das Potential nicht von der Geschwindigkeit abhängt und die Transformation von kartesischen auf generalisierte Koordinaten nicht explizit von der Zeit abhängt.

10.1.1 Beispiel:

Wir betrachten die Bewegung eines Massepunkts auf einer Zylinderoberfläche:

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (10.11)$$

Zusätzlich wird der Massepunkt zum Zentrum hin angezogen:



$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r}, \quad \text{harmonisches Kraftgesetz.} \quad (10.12)$$

Das zugehörige Potential ist

$$U = \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2}k(R^2 + z^2). \quad (10.13)$$

Die Geschwindigkeit in zylindrischen Koordinaten lautet

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2. \quad (10.14)$$

Wegen $\rho = R = \text{const.}$, folgt $\dot{\rho} = 0$, so dass die kinetische Energie gegeben ist durch

$$T = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2). \quad (10.15)$$

Daraus können wir die LAGRANGE-Dichte konstruieren

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}k(R^2 + z^2). \quad (10.16)$$

Betrachten wir θ und z als verallgemeinerte Koordinaten, dann sind die zugehörigen kanonischen Impulse:

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta} \quad (10.17)$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}.$$

Die Geschwindigkeiten lassen sich nun nach den Impulsen auflösen,

$$\ddot{\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2}, \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m} \quad (10.18)$$

und die HAMILTONfunktion folgt (gemäß Legendre-Transformation)

$$\begin{aligned} H &= p_\theta \dot{\theta} + p_z \dot{z} - L \Big|_{\dot{\theta} \rightarrow p_\theta, \dot{z} \rightarrow p_z} = \frac{p_\theta^2}{mR^2} + \frac{p_z^2}{m} - L \\ &= \frac{p_\theta^2}{mR^2} + \frac{p_z^2}{m} - T + U. \end{aligned} \quad (10.19)$$

Mit

$$T = \frac{1}{2} m (R^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) \stackrel{(10.18)}{=} \frac{1}{2} m \left(\frac{p_\theta^2}{m^2 R^2} + \frac{p_z^2}{m^2} \right) \quad (10.20)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} H &= \frac{p_\theta^2}{mR^2} + \frac{p_z^2}{m} + \frac{1}{2} k (R^2 + z^2) \\ &\equiv T + U \quad (\text{wie erwartet}). \end{aligned} \quad (10.21)$$

Die kanonischen Bewegungsgleichungen folgen unmittelbar:

$$\begin{aligned} 1.) \quad \dot{p}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \\ 2.) \quad \dot{p}_z &= -\frac{\partial H}{\partial z} = -kz \\ 3.) \quad \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2} \\ 4.) \quad \dot{z} &= \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}. \end{aligned} \quad (10.22)$$

Die letzten beiden Gleichungen reproduzieren (10.17) bzw. (10.18).

Während (10.17) im Lagrange-Formalismus eine Definition ist, sind (3) & (4) ein *Ergebnis* des HAMILTON-Formalismus.

(1) & (3) zusammen besagen, dass

$$p_\theta = mR^2 \dot{\theta} = \text{const.} \quad (10.23)$$

gilt, was der Drehimpulserhaltung um die z -Achse entspricht. (2) & (4) liefern schließlich

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0 \quad \text{mit} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}. \quad (10.24)$$

Die Bewegung in z -Richtung ist also eine harmonische Schwingung.

10.2 Poisson-Klammern

Da die Dynamik eines HAMILTON'schen Systems durch die Zeitentwicklung im Phasenraum bestimmt ist, ist jede physikalische Größe als Funktion der Phasenraumvariablen bestimmbar. Solche allgemeine Funktionen $f(q_j, p_j; t)$ heißen *Observable*.

Ihre Zeitableitung lautet

$$\frac{df}{dt} = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (10.25)$$

Verwendung der kanonischen Gleichung führt auf

$$\frac{df}{dt} = \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (10.26)$$

Die hier auftretende Struktur fasst man in der Definition der *Poisson-Klammer* zusammen. Für zwei beliebige Observable $f(q_j, p_j; t)$, $g(q_j, p_j; t)$ ist diese definiert durch

$$\{f, g\} := \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right). \quad (10.27)$$

Damit lässt sich die Zeitevolution von f in der kompakten Form

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (10.28)$$

schreiben. Diese Notation verdeutlicht die Relevanz der HAMILTON-Funktion, die die Zeitentwicklung der Observablen steuert.

Mit der Poisson-Klammer können nun auch Erhaltungssätze in einer kompakten Form geschrieben werden. Nach (10.28) ist eine nicht explizit zeitabhängige Observable f genau dann eine Erhaltungsgröße, wenn ihre Poisson-Klammer mit der HAMILTON-Funktion verschwindet:

$$\{f, H\} = 0 \iff \frac{df}{dt} = 0, \quad \left(\text{falls } \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \right). \quad (10.29)$$

Ein einfaches Beispiel ist offensichtlich eine nicht explizit zeitabhängige HAMILTON-Funktion H , $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, für die bereits aus der Definition (10.27) folgt

$$\{H, H\} = 0, \quad (10.30)$$

d. h. solche HAMILTON-Funktionen sind zeitlich erhalten.

Betrachten wir die Beispiele

$$f(q, p; t) = q_j \text{ oder } p_j,$$

so finden wir durch direktes nachrechnen

$$\frac{\partial q_j}{\partial t} = \{q_j, H\} \stackrel{(10.27)}{=} \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad (10.31)$$

bzw.

$$\frac{dp_j}{dt} = \{p_j, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad (10.32)$$

d. h. die Bewegungsgleichungen lassen sich durch die Poisson-Klammern ausdrücken.

Werfen wir einen näheren Blick auf (10.32):

$$\dot{p}_j = \sum_i \left(\underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial q_i}}_{=0} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial p_i}}_{=\delta_{ij}} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad (10.33)$$

dann ist der kanonische Impuls p_j erhalten, $\dot{p}_j = 0$, genau dann, wenn H nicht von q_j abhängt, $\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0$.

Aus der Definition der HAMILTON-Funktion

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L(q, \dot{q}; t) \quad (\text{aufgefasst als Funktion von } q, \dot{q})$$

ist erkennbar, dass dies zutrifft, wenn

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (10.34)$$

d. h. wenn q_j eine zyklische Koordinate ist.

Hier stoßen wir wieder auf einen Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen:

Ist $H(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s) = H(q_1, \dots, q_j + \Delta q_j, p_1, \dots, p_s)$ (Invarianz unter beliebiger Verschiebung einer Phasenraumkoordinate), dann ist $\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0$ und der zugehörige kanonische Impuls ist erhalten $\dot{p}_j = 0$.

Abschließend listen wir wichtige Eigenschaften der Poisson-Klammern auf, die direkt aus der Definition folgen:

1. Linearität:

$$\{c_1 f + c_2 g, h\} = c_1 \{f, h\} + c_2 \{g, h\}. \quad (10.35)$$

2. Antisymmetrie:

$$\{f, g\} = -\{g, f\}. \quad (10.36)$$

3. Existenz eines Nullelements

$$\{c, f\} = 0 \text{ mit } c = \text{const.} \quad (10.37)$$

4. Produktregel:

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g. \quad (10.38)$$

Da diese Regel der Leibniz-Regel von Ableitungen ähnelt, zählt auch die Poisson-Klammer mathematisch auch zu den Derivationen.

5. Jacobi-Identität:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0. \quad (10.39)$$

6. Fundamentale Poisson-Klammern:

$$\{q_i, q_j\} = 0 = \{p_i, p_j\} \quad (10.40)$$

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}.$$

Aus der Jacobi-Identität folgt z. B.: sind f und g Erhaltungsgrößen, so ist auch $\{f, g\}$ eine Erhaltungsgröße:

$$\{\{f, g\}, H\} = -\underbrace{\{g, H\}, f}_{=0} - \underbrace{\{H, f\}, g}_{=0} = 0. \quad (10.41)$$

Neben ihrer Bedeutung in der klassischen Mechanik, findet sich die gleiche Algebraische Struktur der Poisson-Klammern auch in der Quantenmechanik in Form der *Kommutatoren* wieder.

10.3 Stabilität dynamischer Systeme, Lyapunov-Exponenten

Wir wollen im Folgenden der Frage nachgehen, wie die Stabilität von dynamischen Systemen klassifiziert und quantifiziert werden kann. Dies wollen wir im Rahmen und als Beispiel von HAMILTON'schen Systemen tun, auch wenn sich diese Diskussion nach allgemeiner fassen lässt.

Sei ein Dynamisches System gegeben durch die HAMILTON-Funktion $H(\Gamma)$, wobei

$$\Gamma = (q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s) \quad (10.42)$$

einen Punkt im Phasenraum beschreibt. Die Dynamik des Systems ist gegeben durch die kanonischen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d\Gamma}{dt} \equiv \dot{\Gamma} = \left(\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial q_s}, -\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial p_s} \right) =: F(\Gamma) \quad (10.43)$$

für die wir hier eine verkürzte Notation eingeführt haben. Für den Fall, dass F explizit zeitu-nabhängig ist, nennt man das System *autonom*.

Der Begriff der Ruhelage in einem Newtonschen System verallgemeinert sich auf den Begriff eines *Fixpunktes* Γ_* des HAMILTON'schen Systems, der definiert ist durch

$$\frac{d\Gamma_*}{dt} = F(\Gamma_*) = 0. \quad (10.44)$$

Im Folgenden sei angenommen, das unser HAMILTON'sches System einen oder mehrere Fixpunkte hat. Nun betrachten wir eine Trajektorie $\Gamma(t)$, die für eine gewisse Zeit nahe an einem Fixpunkt vorbeiläuft und daher in diesem Zeitraum durch

$$\Gamma(t) = \Gamma_* + \delta\Gamma(t) \quad (10.45)$$

parametrisiert werden kann. Wegen $\dot{\Gamma}_* = 0$ gilt

$$\frac{d\delta\Gamma(t)}{dt} = \frac{d\Gamma(t)}{dt} = F(\Gamma_* + \delta\Gamma(t)). \quad (10.46)$$

Wir beschränken uns nun auf die Trajektorien, bzw. die Zeiträume, für die eine linearisierte Beschreibung zu niedrigster Ordnung in $\delta\Gamma(t)$ hinreichend genau ist. Für die i -te Komponente lautet dann die Zeitevolution

$$\begin{aligned} \frac{d\delta\Gamma_i}{dt} &= F_i(\Gamma_* + \delta\Gamma) = \underbrace{F_i(\Gamma_*)}_{=0} + \left. \frac{\partial F_i}{\partial \Gamma_j} \right|_{\Gamma_*} \delta\Gamma_j + \mathcal{O}((\delta\Gamma)^2) \\ &= B_{ij}\delta\Gamma_j + \mathcal{O}((\delta\Gamma)^2). \end{aligned} \quad (10.47)$$

Die Jacobi-Matrix B_{ij} heißt auch *Stabilitätsmatrix*. Wir nehmen nun an, dass wir $\delta\Gamma_i$ durch *Rechtseigenvektoren* von B_{ij} aufspannen können:

$$\delta\Gamma_j = C_A \gamma_{Aj} \quad (10.48)$$

mit Koordinaten C_A und den Rechtseigenvektoren γ_{Ai} für die gilt:

$$B_{ij}\gamma_{Aj} = \lambda_A \gamma_{Aj}, \quad (10.49)$$

mit den Eigenwerten λ_A . Diese heißen auch *Lyapunov-Exponenten*.

Nebenbemerkung: Da B_{ij} nicht notwendigerweise symmetrisch ist, müssen die λ_A nicht reell sein. I. A. sind $\lambda_A \in \mathbb{C}$. Auch folgt aus $B_{ij}\gamma_{Aj}$ i. A. nicht, dass auch $\gamma_{Ai}B_{ij} = \lambda_A \gamma_{Ai}$. Die Eigenwerte λ_A lassen sich aber immer noch aus dem charakteristischen Polynom $\det(B - \lambda \mathbb{1}) = 0$ bestimmen.

Da für autonome Systeme $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ gilt, folgt ebenso $\frac{\partial B_{ij}}{\partial t} = 0$ und $\frac{\partial \gamma_{Ai}}{\partial t} = 0 = \frac{\partial \lambda_A}{\partial t}$. Die Bewegungsgleichung ist daher

$$\frac{d\delta\Gamma_i}{dt} = \dot{C}_A \gamma_{Aj} = C_A B_{ij} \gamma_{Aj} = C_A \lambda_A \gamma_{Aj}. \quad (10.50)$$

Für linear unabhängige γ_{Ai} folgt daraus

$$\dot{C}_A = \lambda_A C_A \quad (10.51)$$

mit der Lösung

$$C_A(t) = C_A(0) \exp(\lambda_A \cdot t). \quad (10.52)$$

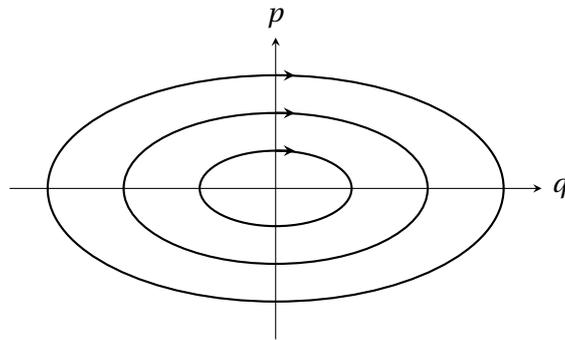
Die Lyapunov-Exponenten erlauben es uns nun, die Fixpunkte und ihre Stabilitätseigenschaften zu klassifizieren:

1. Alle λ_A haben negativen Realteil, $\text{Re } \lambda < 0 \Rightarrow C_A(t \rightarrow \infty) \rightarrow 0$
 \Rightarrow der Fixpunkt ist attraktiv $\Gamma(t) \rightarrow \Gamma_*$
 \Rightarrow alle Phasenraumtrajektorien in der Nähe des Fixpunktes werden in der Nähe des Fixpunktes "angezogen".
2. mindestens ein λ_A hat positiven Realteil $\text{Re } \lambda_A > 0$ für mindestens einen Eigenwert. Der Fixpunkt ist instabil, es existieren Trajektorien, die sich exponentiell schnell vom Fixpunkt entfernen.

3. mindestens ein Eigenwert hat Realteil = 0, alle anderen haben negativen Realteil. Sei z. B. $\lambda_1 = i \operatorname{Im} \lambda_1$, dann gibt es Trajektorien, die um den Fixpunkt oszillieren

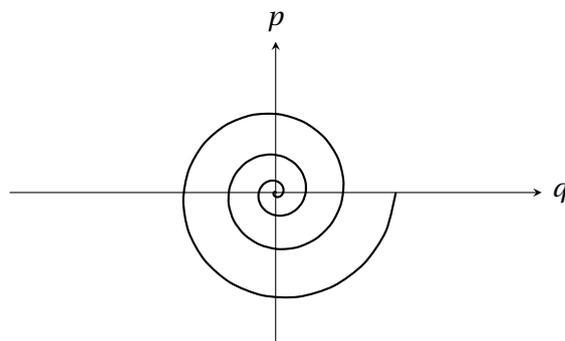
$$C_A(t) = C_1(0) \exp(i|\lambda_1|t). \quad (10.53)$$

Ob der Fixpunkt wirklich stabil oder instabil ist, entscheiden dann Terme der Ordnung $(\delta\Gamma)^2$. Fall 3 mit sogar allen $\operatorname{Re} \lambda_A = 0$ kann in konservativen Systemen auftreten z. B. der harmonische Oszillator hat Phasenraum-Trajektorien, die Ellipsen entsprechen.



Der Fixpunkt $\Gamma_* = (0, 0)$ liegt im Zentrum aller Ellipsen. Jede kleine Störung $\delta\Gamma$ führt zu oszillatorischem Verhalten muss also dem Fall (10.53) entsprechen.

Fall 1 ist charakteristisch für dissipative System wie z. B. dem harmonischen Oszillator mit Dämpfung.



Eine kleine Störung spiralisiert in den Fixpunkt $\Gamma_* = (0, 0)$.

Beispiel: Mathematisches Pendel

Für das mathematische Pendel lautet die HAMILTON-Funktion

$$H = \frac{p_\varphi^2}{2ml^2} - mgl \cos \varphi. \quad (10.54)$$

Im Phasenraum $\Gamma = \begin{pmatrix} \varphi \\ p_\varphi \end{pmatrix}$ lautet die Bewegungsgleichung

$$\dot{\Gamma} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} \\ -\frac{\partial H}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \frac{p_\varphi}{ml^2} \\ -mgl \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (10.55)$$

Damit ergeben sich die Fixpunkte

$$\Gamma_{*,n} = \begin{pmatrix} n\pi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10.56)$$

mit der Stabilitätsmatrix

$$B = \begin{pmatrix} c0 & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl \cos \varphi|_{\varphi=n\pi} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c0 & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl(-1)^n & 0 \end{pmatrix} \quad (10.57)$$

und den Eigenwerten (Lyapunov-Exponenten):

$$0 = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \left| \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl(-1)^n & -\lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 + \frac{g}{l}(-1)^n. \quad (10.58)$$

$$n = 0, 2, 4, \dots \quad \lambda_{\pm}^{\text{unten}} = \pm i \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \Rightarrow \text{Fall 3}$$

$$n = 1, 3, 5, \dots \quad \lambda_{\pm}^{\text{oben}} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \Rightarrow \text{Fall 2} \quad (10.59)$$

