



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Licht und Materie</b>	<b>4</b>
1.1	Axiomatische Herleitung der Wellengleichung . . . . .	4
1.2	Monochromatische Felder . . . . .	5
1.3	Einzelstreuer . . . . .	7
1.4	Feldausbreitung im Material . . . . .	11
1.4.1	Modifizierte Maxwell-Gleichungen monochromatischer Felder . . . . .	11
1.4.2	Feldausbreitung im homogenen Material . . . . .	12
1.4.3	Felder an Grenzflächen . . . . .	12
1.4.4	Fresnelsche Formeln . . . . .	14
1.4.5	Der Brewster Winkel . . . . .	16
1.4.6	Totalreflexion . . . . .	17
1.5	Die Polarisation des Materials . . . . .	19
1.5.1	Das Lorentz-Modell . . . . .	19
1.5.2	Ebene Wellen im dispersiven Material . . . . .	20
1.5.3	Die Suszeptibilität realer Materialien . . . . .	21
1.5.4	Metalle . . . . .	22
1.5.5	Kramers-Kronig-Transformation . . . . .	23
1.6	Transparente, doppelbrechende Materialien . . . . .	28
1.6.1	Die dielektrische Funktion . . . . .	28
1.6.2	Die optische Klassifikation von Kristallen . . . . .	29
1.6.3	Wellenausbreitung im doppelbrechenden Material . . . . .	30
1.6.4	Wellenausbreitung im einachsigen Kristall . . . . .	33
1.7	Die Polarisation Elektromagnetischer Felder . . . . .	35
1.7.1	Polarisation ebener Wellen im homogenen Material . . . . .	35
1.7.2	Polarisierende Elemente . . . . .	38
1.7.3	Anwendungen anisotroper Materialien . . . . .	39
<b>2</b>	<b>Geometrische Optik</b>	<b>42</b>
2.1	Gaußsche Optik . . . . .	43
2.1.1	Idee der Matrizenoptik . . . . .	43
2.1.2	Linse . . . . .	44
2.1.3	Abbildungen . . . . .	45
2.1.4	Hauptebenen . . . . .	47
2.2	Abbildungsfehler . . . . .	48
2.2.1	Farbfehler (Chromatische Aberration) . . . . .	48
2.2.2	Abbildungsfehler für monochromatisches Licht . . . . .	48
2.3	Aplanatische Objektive . . . . .	51
<b>3</b>	<b>Beugungsphänomene</b>	<b>55</b>
3.1	Konfiguration und Ausbreitungsgleichung . . . . .	55
3.2	Lösung des Anfangswertproblems . . . . .	55
3.3	Gaußförmige Strahlen in paraxialer Näherung . . . . .	60
3.4	Gaußsche Optik mit q-Parametern . . . . .	64
3.4.1	Einführung der q-Parameter . . . . .	64

---

3.4.2	Dynamik des q-Parameters . . . . .	65
3.4.3	Transfermatrizen für q-Parameter . . . . .	66
3.4.4	Gaußsche Moden im Resonator . . . . .	68
3.4.5	Paraxiale Wellengleichung und höhere Lasermoden . . . . .	70
3.5	Fraunhofer Beugung . . . . .	74
3.5.1	Entstehung des Beugungsbildes . . . . .	74
3.5.2	Grenzen der Fraunhofer-Näherung . . . . .	75
3.5.3	Beugungsbilder . . . . .	77
3.6	Fourier-Optik . . . . .	79
3.6.1	Fouriertransformation an dünnen Linsen . . . . .	79
3.6.2	Bildverarbeitung . . . . .	80
3.7	Auflösungsgrenzen . . . . .	81
3.7.1	Teleskope (Rayleigh-Kriterium) . . . . .	81
3.7.2	Mikroskope (Abbe'sche Auflösungsgrenze) . . . . .	83
3.8	Holographie . . . . .	84
<b>4</b>	<b>Dynamische Phänomene in der Optik</b>	<b>87</b>
4.1	Pulsausbreitung in homogenen Medien . . . . .	87
4.1.1	Das Spektrum . . . . .	87
4.1.2	Pulsausbreitung . . . . .	88
4.1.3	Ausbreitung gaußförmiger Pulse . . . . .	91
4.2	Kohärenz . . . . .	93
4.2.1	Begriffsbestimmung . . . . .	93
4.2.2	Zeitliche Kohärenz . . . . .	94
4.2.3	Zeitliche Kohärenz und Spektrum . . . . .	96
4.2.4	Räumliche Kohärenz . . . . .	97
4.2.5	Ausbreitung räumlich inkohärenter monochromatischer Felder . . . . .	98

# 1 Licht und Materie

## 1.1 Axiomatische Herleitung der Wellengleichung

Die MAXWELL-Gleichungen in differentieller Form lauten im Vakuum mit den Ladungs-  $\rho$  und Stromdichten  $\mathbf{j}$

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (1.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{j} \qquad \vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.2)$$

wobei  $\mathbf{E}$  das elektrische Feld und  $\mathbf{B}$  die magnetische Induktion bezeichnet. Die auftretenden Konstanten lauten

$$\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \qquad \text{Dielektrizitätskonstante des Vakuums} \quad (1.3)$$

$$\mu_0 = 12,566 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \qquad \text{Permeabilität des Vakuums} \quad (1.4)$$

$$c = 299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad \text{Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.} \quad (1.5)$$

Das Einsetzen der MAXWELL-Gleichungen in

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{E} = \vec{\nabla} \times \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial \vec{\nabla} \times \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \quad (1.6)$$

führt zur Eliminierung der magnetischen Induktion. Unter Verwendung der bekannten Identität des rot-rot Operators

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{E} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = \vec{\nabla} \frac{\rho}{\epsilon_0} - \Delta \mathbf{E} \quad (1.7)$$

ergibt sich somit die *Wellengleichung*

$$\underbrace{\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}}_{\text{Feld}} = \underbrace{\vec{\nabla} \frac{\rho}{\epsilon_0} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}}_{\text{Quellen / Treiber}}. \quad (1.8)$$

Die rechte Seite von (1.8) beschreibt die Quellen des elektromagnetischen Feldes.

- $\vec{\nabla} \frac{\rho}{\epsilon_0}$  führt zu quasistatischen Feldern der Ladungen
- $\mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial \rho \dot{\mathbf{r}}}{\partial t} \approx \mu_0 \rho \ddot{\mathbf{r}}$  für  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ .  
 $\Rightarrow$  Dies entspricht einer beschleunigt bewegten Ladung.

Im weiteren soll nun nach speziellen Lösungen der MAXWELL-Gleichungen für Gebiete ohne Quellen ( $\rho = 0, \mathbf{j} = 0$ ) gesucht werden. Als Ansatz wird dafür eine *ebene Welle* gewählt

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]\} \qquad \mathbf{E}_0, \mathbf{k} \in \mathbb{C}^3. \quad (1.9)$$

Dabei bezeichnet  $E_0$  die komplexe Feldamplitude und  $\mathbf{k}$  den Wellenzahlvektor, der prinzipiell auch komplex sein kann, aber vorerst als reell diskutiert wird. Durch einsetzen in die Wellengleichung (1.8) ergibt sich

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] = 0. \quad (1.10)$$

Nichttriviale Lösungen erfordern die Dispersionsbeziehung des Vakuums  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ . Eine weitere Forderung des Ansatzes ist  $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 0$ , welche durch  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0$  erfüllt wird. Zur Berechnung der zum elektrischen Feld gehörenden magnetischen Induktion wird (1.1) verwendet und der Ansatz (1.9) eingesetzt

$$\vec{\nabla} \times \text{Re}\{\mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]\} = \text{Re}\{i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]\} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.11)$$

Dies führt zum Ausdruck für die magnetische Induktion  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B} = \text{Re}\{\mathbf{B}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]\} \quad \text{mit} \quad \mathbf{B}_0 = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0. \quad (1.12)$$

Elektromagnetische Wellen im Vakuum sind transversal im elektrischen Feld und bzgl. der magnetischen Induktion. Ausbreitungsvektor, elektrisches Feld und magnetische Induktion bilden ein orthogonales rechtshändiges Dreibein.

## 1.2 Monochromatische Felder

In der Optik werden monochromatische (einfarbige) Felder als stationär bezeichnet, obwohl sie eine schnelle Zeitabhängigkeit besitzen und nur im zeitlichen Mittel konstant bleiben. Für ein stationäres Lichtfeld ergibt sich der Ausdruck

$$\mathbf{E}_{\text{reell}}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)]. \quad (1.13)$$

In Zukunft wird nur mit komplexen Feldern gerechnet. Die beobachtbaren reellen Felder können jeweils durch Realteilbildung generiert werden.

Zeitableitungen wirken sich folgendermaßen auf monochromatische Felder aus:

$$\frac{\partial \text{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)]}{\partial t} = \text{Re}[-i\omega \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)]. \quad (1.14)$$

Zeitableitungen werden also durch den Ausdruck  $-i\omega$  ersetzt. Somit nehmen die MAXWELL-Gleichungen monochromatischer Felder folgende Form an

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B} \quad \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (1.15)$$

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{B} = -\frac{i\omega}{c^2} \mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{j} \quad \vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.16)$$

Die Wellengleichung für monochromatische Felder erhält man ausgehend von

$$\Delta \mathbf{E}_{\text{reell}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_{\text{reell}}}{\partial t^2} = \vec{\nabla} \frac{\rho_{\text{reell}}}{\epsilon_0} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}_{\text{reell}}}{\partial t} = \mathbf{q}_{\text{reell}} \quad (1.17)$$

mit den allgemeinen Quellen  $\mathbf{q}_{\text{reell}}$ . Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass Zeitableitungen durch  $-i\omega$  ersetzt werden folgt

$$\left( \Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{E} = \mathbf{q}. \quad (1.18)$$

Im freien Raum ( $\rho, \mathbf{j} = 0$ ) ergibt sich die *Helmholtz-Gleichung*

$$\left( \Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) u(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.19)$$

für jede der drei Komponenten des elektrischen Feldes  $u = E_{x/y/z}$ .

Die spezielle Lösung von (1.18) für eine punktförmige Quelle ( $\delta$ -Anregung) mit  $q(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$  ist nach dem Prinzip von HUYGENS die Kugelwelle

$$u(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\exp(ikr)}{r} \quad \text{mit} \quad r = |\mathbf{r}|, \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (1.20)$$

### Poyntingvektor

Der durch elektromagnetische Felder bewirkte Energiefluss wird durch den Poyntingvektor  $\mathbf{s}_{\text{reell}}$  beschrieben (Der Index soll ausdrücken, dass es sich um eine rein reelle Größe handelt. Allerdings gibt es im Sinne der monochromatischen Felder keinen komplexen Poyntingvektor). Allgemein gilt

$$\mathbf{s}_{\text{reell}} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}_{\text{reell}} \times \mathbf{B}_{\text{reell}}, \quad (1.21)$$

wobei die magnetische Induktion die Form  $\mathbf{B}_{\text{reell}} = \text{Re}[\mathbf{B}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)]$  annimmt. Es ergibt sich für den Energiefluss

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{\text{reell}} &= \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{2} (\mathbf{E} e^{-i\omega t} + \mathbf{E}^* e^{i\omega t}) \times \frac{1}{2} (\mathbf{B} e^{-i\omega t} + \mathbf{B}^* e^{i\omega t}) \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left[ \underbrace{\frac{1}{4} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{B})}_{\text{stationär}} + \underbrace{\frac{1}{4} (\mathbf{E} \times \mathbf{B} e^{-2i\omega t} + \mathbf{E}^* \times \mathbf{B}^* e^{2i\omega t})}_{\text{schnell oszillierend}} \right]. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Messgeräte können die schnellen Oszillationen im Energiefluss optischer Felder ( $10^{15}$  Hz) nicht auflösen und registrieren daher einen zeitgemittelten Poyntingvektor  $\langle \mathbf{s} \rangle$ , der nur den stationären Anteil enthält

$$\langle \mathbf{s}_{\text{reell}} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*). \quad (1.23)$$

Die Divergenz von  $\langle \mathbf{s} \rangle$  beschreibt die lokale Generation und Absorption elektromagnetischer Energie.

- $\text{div}\langle \mathbf{s}_{\text{reell}} \rangle > 0$ : Generation (Quelle) elektromagnetischer Energie
- $\text{div}\langle \mathbf{s}_{\text{reell}} \rangle < 0$ : Absorption (Senke) elektromagnetischer Energie

Für die Energieflussbilanz ergibt sich also

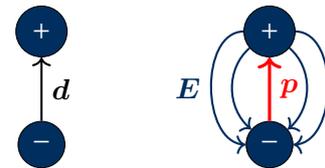
$$\begin{aligned}
 \text{div}\langle \mathbf{s}_{\text{reell}} \rangle &= \frac{1}{4\mu_0} \vec{\nabla} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}^* + cc] \\
 &= \frac{1}{4\mu_0} \mathbf{B}^* \vec{\nabla} \times \mathbf{E} - \frac{1}{4\mu_0} \mathbf{E} \vec{\nabla} \times \mathbf{B}^* + cc \\
 &= \frac{1}{4\mu_0} \mathbf{B}^* i\omega \mathbf{B} - \frac{1}{4\mu_0} \mathbf{E} \left[ +i\omega \frac{1}{c^2} \mathbf{E}^* + \mu_0 \mathbf{j}^* \right] + cc \\
 \text{beachte: } \frac{i\omega}{4\mu_0} \mathbf{B} \mathbf{B}^* + cc &= \frac{i\omega}{4\mu_0} |\mathbf{B}|^2 - \frac{i\omega}{4\mu_0} |\mathbf{B}|^2 = 0 \\
 &= -\frac{1}{4} [\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}^* + \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{j}]. \tag{1.24}
 \end{aligned}$$

Im zweiten Schritt wurde die Vektoridentität  $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{B}$  verwendet. Aus dem Vorzeichen der Divergenz lässt sich folgern, dass durch das Feld induzierte Ströme zum Verlust elektromagnetischer Energie führen.

### 1.3 Einzelstreuer

Bei globaler Ladungsneutralität, wie sie in optischen Systemen gewöhnlich vorherrscht, ist der elektrische Dipol die dominierende Ladungsverteilung und verantwortlich für die Wechselwirkung zwischen Licht und Materie.

Zwei gegensätzliche Punktladungen  $\pm q$  im Abstand  $\mathbf{d}$  bilden einen Dipol  $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$  mit einem charakteristischen Feld. Allgemein ergibt sich das Dipolmoment  $\mathbf{p}$  als erstes Element der Multipolentwicklung einer Ladungsverteilung. Falls Ladungsneutralität vorherrscht, d. h. die Summe über alle Ladungen  $q_i$  verschwindet  $\sum_i q_i = 0$ , ist das Dipolmoment der



gesamten Ladungsverteilung  $\mathbf{p}_{\text{reell}} = \sum_i q_i \mathbf{r}_{i\text{reell}}$  auch unabhängig von der Wahl des Koordinatenursprungs.

Die Zeitableitung der Polarisation der Ladungsverteilung  $\frac{d\mathbf{p}_{\text{reell}}}{dt} = \sum_i q_i \frac{d}{dt} \mathbf{r}_{i\text{reell}}$  stellt bei Erhaltung der Elementarladungen  $q_i$  eine Summe kleiner Elementarströme dar. Wird nun die Polarisationsdichte  $\mathbf{P}_{\text{reell}}(\mathbf{r}, t)$  und Stromdichte  $\mathbf{j}_{\text{reell}}(\mathbf{r}, t)$  mit den Relationen

$$\mathbf{p}_{\text{reell}}(\mathbf{r}, t) = \int dV \mathbf{P}_{\text{reell}}(\mathbf{r}, t), \quad \sum_i q_i \frac{d}{dt} \mathbf{r}_{i\text{reell}} = \int dV \mathbf{j}_{\text{reell}} \tag{1.25}$$

verknüpft, sind diese wegen der freien Wählbarkeit des Integrationsgebietes über die Zeitableitung als

$$\mathbf{j}_{\text{reell}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}_{\text{reell}}(\mathbf{r}, t) \tag{1.26}$$

verbunden. Eine sich verändernde Polarisationsdichte kann also auch Quelle oder Senke elektromagnetischer Strahlung sein.

Im Folgenden wird wieder zu monochromatischen Feldern übergegangen. Gleichung (1.26) nimmt dann die Form

$$\mathbf{j}_{\text{reell}}(\mathbf{r}) = -i\omega \mathbf{P}_{\text{reell}}(\mathbf{r}) \quad (1.27)$$

an. Es wird die Abstrahlung eines Dipols verschwindender räumlicher Ausdehnung  $\mathbf{d} \rightarrow 0$  bei konstant gehaltenem Dipolmoment entsprechend einer Dipoldichte  $\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \mathbf{p}_0 \delta(\mathbf{r})$  betrachtet. Dazu werden die elektromagnetischen Felder durch das Vektorpotential  $\mathbf{A}$  und das skalare Potential  $\Phi$  dargestellt

$$\mathbf{B} = \vec{\nabla} \times \mathbf{A} \quad \mathbf{E} = i\omega \mathbf{A} - \vec{\nabla} \Phi \quad (1.28)$$

und diese in die MAXWELL-Gleichungen eingesetzt

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{A} &= -\frac{i\omega}{c^2} (i\omega \mathbf{A} - \vec{\nabla} \Phi) + \mu_0 \mathbf{j} \\ \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} - \frac{i\omega}{c^2} \Phi \right) - \Delta \mathbf{A} - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{A} &= \mu_0 \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Im zweiten Schritt wurde die Vektoridentität  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{A} = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}$  verwendet. Mithilfe der Lorenzbedingung  $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} - \frac{i\omega}{c^2} \Phi = 0$  ergibt sich

$$\left( \Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} = i\omega \mu_0 \mathbf{p}_0 \delta(\mathbf{r}), \quad (1.30)$$

d. h. eine inhomogene HELMHOLTZ-Gleichung, deren Lösung bereits durch Gleichung (1.20) bekannt ist

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{i\omega \mu_0}{4\pi} \mathbf{p}_0 \frac{\exp(ikr)}{r}. \quad (1.31)$$

Das zum schwingenden Dipol gehörende  $\mathbf{B}$ -Feld ergibt sich zu

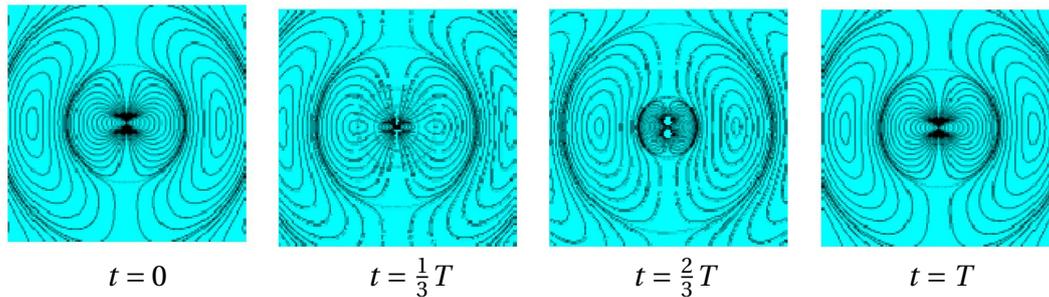
$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= -\frac{i\omega \mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left( \mathbf{p}_0 \frac{e^{ikr}}{r} \right) = \frac{i\omega \mu_0}{4\pi} \mathbf{p}_0 \times \vec{\nabla} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \\ &= \frac{\mu_0 c k^2}{4\pi} (\hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{p}_0) \frac{e^{ikr}}{r} \left( 1 - \frac{1}{ikr} \right), \end{aligned} \quad (1.32)$$

wobei ausgenutzt wurde, dass sich der Gradient bei rein radiusabhängigen Funktionen auf  $\hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r}$  reduziert.

Das elektrische Feld kann über die MAXWELL-Gleichung  $\vec{\nabla} \times \mathbf{B} = -\frac{i\omega}{c^2} \mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{j}$  bestimmt werden zu

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left\{ \underbrace{k^2 \hat{\mathbf{e}}_r \times (\hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{p}_0) \frac{e^{ikr}}{r}}_{\text{Fernfeld}} - \underbrace{[3\hat{\mathbf{e}}_r (\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{p}_0) - \mathbf{p}_0] \left( \frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} \right) e^{ikr}}_{\text{Nahfeld}} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{p}_0 \delta(\mathbf{r}) \quad \leftarrow \text{Feld innerhalb des Dipols.} \end{aligned} \quad (1.33)$$

Das den schwingenden Dipol umgebende Feld besteht aus einem schnell abfallenden Nahfeld- und einem langsam abfallenden Fernfeldanteil. Ständiges Umpolen des Dipols bewirkt ein Ablösen des Feldes vom Dipol, das das Fernfeld zu weit entfernt ist, um seine Polarisation zu wechseln. Es kommt zur Abstrahlung.



**Fig. 1:** Abstrahlung eines Dipols ( $T =$  Schwingungsperiode).

Im Folgenden sollen die Terme des Fernfeldes diskutiert werden:

1.  $\frac{e^{ikr}}{r}$

- Kugelwelle (Huygensches Prinzip)
- Das Fernfeld fällt mit  $r^{-1}$  ab und die abgestrahlte Energiedichte mit  $r^{-2}$

2.  $\hat{\mathbf{e}}_r \times (\hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{p}_0)$

- Es gibt keine Abstrahlung in Richtung der Dipolachse (für  $\hat{\mathbf{e}}_r$  bzw.  $\mathbf{r}$  parallel zu  $\mathbf{p}_0$  verschwindet  $\hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{p}_0$ ). Die Feldstärke ist proportional zum Sinus des Winkels zwischen  $\hat{\mathbf{e}}_r$  und  $\mathbf{p}_0$ .
- Das abgestrahlte Feld ist in der Ebene von  $\hat{\mathbf{e}}_r$  und  $\mathbf{p}_0$  senkrecht zu  $\hat{\mathbf{e}}_r$  polarisiert, wegen  $\hat{\mathbf{e}}_r \times (\hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{p}_0) = \hat{\mathbf{e}}_r(\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{p}_0) - \mathbf{p}_0(\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_r) = \hat{\mathbf{e}}_r(\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{p}_0) - \mathbf{p}_0$

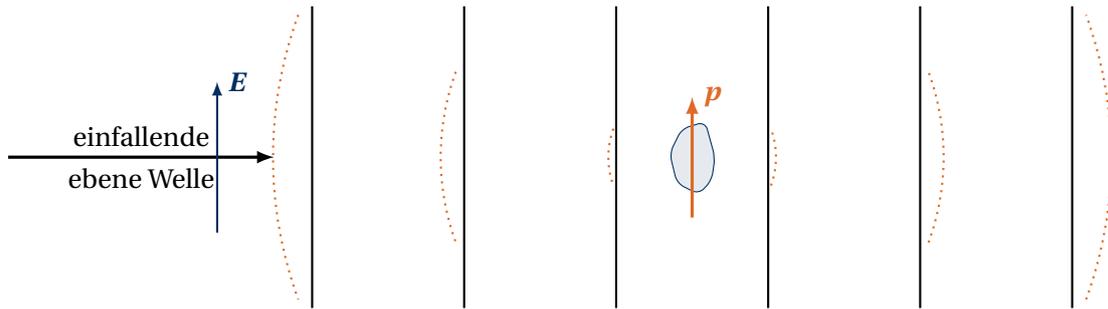
3.  $\omega^2$

- Die Frequenzabhängigkeit der Abstrahlung ist Konsequenz der Tatsache, dass Abstrahlung proportional zur Beschleunigung beteiligter Ladungen ist.
- Die abgestrahlte Leistung ist proportional zu  $\omega^4$ .
- Der Photonenfluss (Zahl der emittierten Photonen  $E_{\text{photon}} = \hbar\omega$  pro Zeit), der von einem angeregten Dipol ausgeht ist proportional zu  $\omega^3$ .
- Die Lebensdauer eines angeregten Zustandes, der durch spontane Emission zerfällt, ist invers zu  $\omega^3$

Bei den hohen Frequenzen der Optik ( $\approx 10^{15}$  Hz) können Dipole nur noch durch das optische Feld erregt werden. Das einfallende optische Feld wirkt auf vorhandenen Einzelladungen mit der Kraft  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$  und induziert Dipole. Diese schwingen mit der Frequenz des einfallenden Feldes und strahlen senkrecht zur Dipolachse ab.

### Anregung der Dipole mit polarisiertem Licht

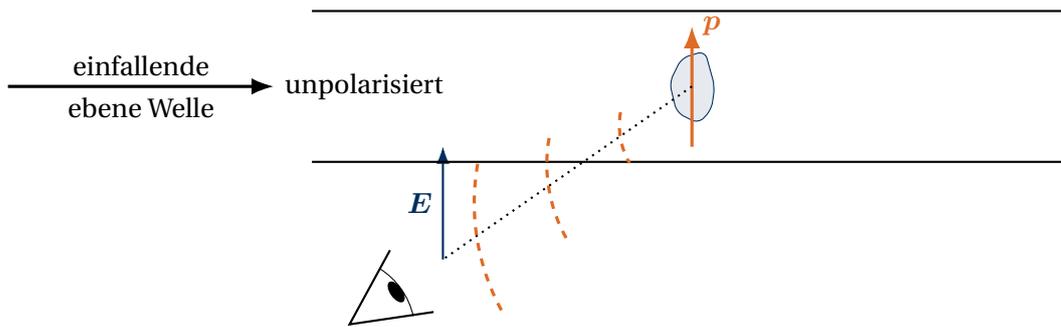
Die Achse des induzierten Dipols zeigt für kleine ( $< \lambda/10$ ) Streuer in Richtung der Polarisation des einfallenden Lichtes. Es erfolgt keine Streuung in Richtung der Dipolachse und damit auch nicht in Richtung der Polarisation des einfallenden Feldes.



**Fig. 2:** Für einfallendes Licht mit vertikaler Polarisation wird kein Licht in vertikale Richtung gestreut.

**Anregung der Dipole mit unpolarisiertem Licht**

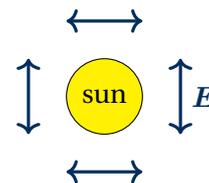
Hier handelt es sich um die Überlagerung unterschiedlich polarisierter Felder, die aber alle senkrecht zur Ausbreitungsrichtung polarisiert sind. Ein Beobachter neben dem Strahl wird vor allem von Streulicht, das von Streuern ausgeht deren induzierte Dipolachse senkrecht auf der Ebene Strahlachse-Beobachter steht, getroffen. Das Streulicht ist daher senkrecht zur Ebene Strahlachse-Beobachter polarisiert.



**Fig. 3:** Für einfallendes unpolarisiertes Licht, erreicht den Beobachter hauptsächlich nur Licht, dessen elektrisches Feld senkrecht zur Ebene Strahlachse-Beobachter steht.

Die Streuung ist weiterhin frequenzabhängig. Blaues Licht wird wesentlich stärker gestreut als rotes, da die gestreute Leistung  $\propto \omega^4$ .

Am Himmel erfolgt die Streuung an stochastischen Dichteschwankungen. Das Himmelslicht ist azimuthal um die Sonne polarisiert.



## 1.4 Feldausbreitung im Material

### 1.4.1 Modifizierte Maxwell-Gleichungen monochromatischer Felder

Jeder Einzelstreuer wird vom Licht zu Schwingungen angeregt, was zu einer oszillierenden Polarisation des Materials führt. Bei monochromatischer Strahlung wird diese durch die Dipoldichte  $\mathbf{P}(\mathbf{r})$  repräsentiert, die durch die gemäß  $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -i\omega\mathbf{P}(\mathbf{r})$  induzierte Stromdichte in die MAXWELL-Gleichungen eingeht als

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{B} = -\frac{i\omega}{c^2}\mathbf{E} + \mu_0\mathbf{j} = -i\omega \left[ \frac{1}{c^2}\mathbf{E} + \mu_0\mathbf{P}(\mathbf{r}) \right]. \quad (1.34)$$

Unter Verwendung von  $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$  lässt sich die dielektrische Verschiebung  $\mathbf{D}$  und das magnetische Feld  $\mathbf{H}$  einführen

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}, \quad (1.35)$$

wobei die für die Optik zutreffende Abwesenheit einer magnetischen Materialresponse angenommen wurde. Die oben angegebene MAXWELL-Gleichung modifiziert sich bei Abwesenheit weiterer, sogenannter externer Ströme für die Optik zu

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{H} = -i\omega\mathbf{D} \quad \vec{\nabla} \cdot \mathbf{D} = 0. \quad (1.36)$$

Der zweite Teil von Gleichung (1.36) ergibt sich durch die Vektoridentität  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \mathbf{A}) = 0$ . Der Zusammenhang zwischen Polarisationsdichte und dielektrischer Verschiebung und wirkenden Feldern kann letztendlich nur experimentell oder durch quantenmechanische Rechnungen ermittelt werden. Bei monochromatischen Feldern nicht zu hoher Intensität gilt jedoch in sehr guter Näherung

$$\mathbf{P}(\omega, \mathbf{r}) = \varepsilon_0\chi(\omega, \mathbf{r})\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}), \quad P_i(\omega, \mathbf{r}) = \varepsilon_0 \sum_{j=1}^3 \chi_{ij}(\omega, \mathbf{r})E_j(\omega, \mathbf{r}),$$

wobei die *Suszeptibilität*  $\chi$  einen Tensor zweiter Ordnung darstellt. Die dielektrische Verschiebung wird damit aus dem elektrischen Feld mittels der relativen Dielektrizitätskonstanten

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega, \mathbf{r}) &= 1 + \chi(\omega, \mathbf{r}) \\ \Rightarrow \mathbf{D}(\omega, \mathbf{r}) &= \varepsilon_0\varepsilon(\omega, \mathbf{r})\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (1.37)$$

gebildet. Vorerst werden  $\chi$  und  $\varepsilon$  als Skalare angenommen, was für eine Vielzahl von Medien zutreffend ist, später wird auch der Effekt nichtverschwindender Tensoreigenschaften diskutiert.

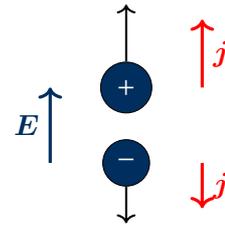
Die in weiten Teilen der Optik relevante Approximation der MAXWELL-Gleichungen für monochromatische Felder stellt sich nun folgendermaßen dar:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{E} = i\omega\mathbf{B} \quad \vec{\nabla} \cdot (\varepsilon\mathbf{E}) = 0 \quad (1.38)$$

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{B} = -i\frac{\omega}{c^2}\varepsilon\mathbf{E} \quad \vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.39)$$

wobei die beiden rechten Gleichungen für  $\omega \neq 0$  durch Divergenzbildung aus den linken Gleichungen folgen, d. h. zur Beschreibung optischer Phänomene reicht es aus, nur die Rotationsgleichungen zu betrachten.

Die relative Dielektrizitätskonstante repräsentiert hier sowohl die Vakuumanteile des Verschiebungsstroms (entsprechend der "1"), als auch der Materialanteile (entsprechend  $\chi$ ), die durch bewegte Polarisationsladungen entstehen und sich trotz unterschiedlicher Vorzeichen der beteiligten Ladungen nicht gegenseitig kompensieren. Für die meisten Materialien ist der Materialanteil der Ströme deutlich höher als der Vakuumanteil (Beispiel Silizium bei  $\lambda = 1000 \text{ nm}$  :  $\chi = 12,24$ ).



### 1.4.2 Feldausbreitung im homogenen Material

Klassische Materialien setzen sich auch aus vielen Einzelstreuern zusammen, die mehr oder weniger gleichmäßig verteilt sind. Vom homogenen Material wird gesprochen, wenn Inhomogenitäten kleiner als  $\approx \lambda/10$  sind, eine Voraussetzung die für klassische optische Materialien gut erfüllt ist. In diesem Fall kann  $\varepsilon(\omega, \mathbf{r})$  als räumlich konstant angenommen werden, d. h. es gilt  $\vec{\nabla}\varepsilon(\omega, \mathbf{r}) = 0$  und damit  $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 0$ . Somit sind die MAXWELL-Gleichungen wieder formal äquivalent zu denen im Vakuum bei Abwesenheit von Ladungen und strömen, nur, dass die Lichtgeschwindigkeit zu

$$c' = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (1.40)$$

verändert wurde. Für  $\varepsilon$  reell und  $\varepsilon > 0$  kann  $c'$  so interpretiert werden, dass durch die im Material induzierten Dipolströme die Lichtgeschwindigkeit  $c$  zu  $c'$  und damit um die Brechzahl  $n = \sqrt{\varepsilon}$  reduziert wird. Ebenfalls wird die Wellenlänge von

$$\lambda = 2\pi \frac{c}{\omega} \quad \text{zu} \quad \lambda' = 2\pi \frac{c'}{\omega} = \frac{\lambda}{n} \quad (1.41)$$

modifiziert. Die Energiebilanz verändert sich unter Verwendung der Beziehung zwischen Stromdichte und Zeitableitung der Polarisation zu

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\langle \mathbf{s} \rangle &\stackrel{(1.24)}{=} -\frac{1}{4} [\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}^* + \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{j}] \stackrel{(1.27)}{=} \frac{i\omega}{4} (\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{P} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{P}^*) \\ &\stackrel{(1.37)}{=} -\frac{\varepsilon_0 \omega}{2} \operatorname{Im}(\chi) |\mathbf{E}|^2 = -\frac{\varepsilon_0 \omega}{2} \operatorname{Im}(\varepsilon) |\mathbf{E}|^2, \end{aligned} \quad (1.42)$$

d. h. Energieverluste treten nur bei einem nicht verschwindenden Imaginärteil der Dielektrizitätskonstanten auf. In passiven Materialien ohne äußere Energiezufuhr muss daher der Imaginärteil der Dielektrizitätskonstanten für positive Frequenzen  $\omega > 0$  stets positiv sein.

### 1.4.3 Felder an Grenzflächen

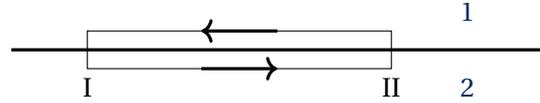
#### Die Übergangsbedingungen

Im weiteren wird nur die Transversalkomponente der Feld (parallel zur Grenzfläche) benötigt, weshalb nur deren Übergangsbedingungen untersucht werden.

Ausgangspunkt ist die MAXWELL-Gleichung für monochromatische Felder (1.38) in integraler Formulierung unter Verwendung des Satzes von STOKES

$$\oint_{\partial C} \mathbf{E} \, d\mathbf{s} = i\omega \iint_C \mathbf{B} \, d\mathbf{f}. \quad (1.43)$$

Die gewählte Kontur soll die Grenzfläche zwischen den Medien 1 und 2 in infinitesimalem Abstand umschließen. Da die magnetische Induktion als physikalisch beobachtbares Feld nicht divergieren kann, verschwindet das Flächenintegral über sie bei verschwindendem Flächeninhalt der Kontur. Damit ergibt sich für die Linienintegrale über die Felder in den beiden Medien an der Grenzfläche



$$\int_I^{II} \mathbf{E}_1 \, d\mathbf{s} + \int_{II}^I \mathbf{E}_2 \, d\mathbf{s} = 0. \quad (1.44)$$

Da in die Linienintegrale nur die Transversalkomponenten eingehen (Skalarprodukt mit  $d\mathbf{s}$ ) und die Punkte I und II beliebig gewählt werden können, müssen die transversalen  $E$ -Felder an der Grenzfläche stetig übergehen. Analog kann gezeigt werden dass die Transversalkomponenten der magnetischen Induktion stetig an der Grenzfläche übergehen

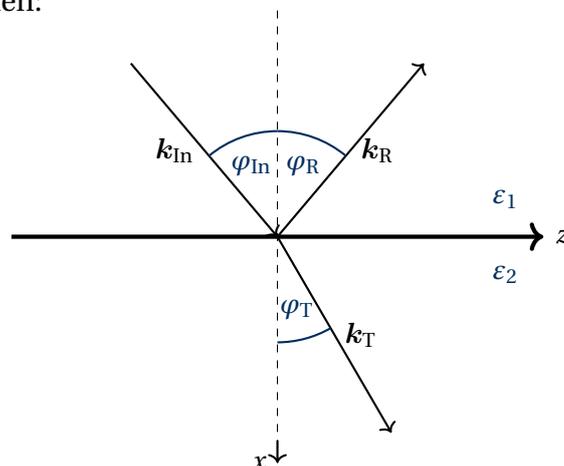
$$\mathbf{E}_1^{\parallel} = \mathbf{E}_2^{\parallel} \quad \mathbf{B}_1^{\parallel} = \mathbf{B}_2^{\parallel}. \quad (1.45)$$

### Das Brechungsgesetz

Es werden homogene Medien und eine ideal glatte Grenzfläche vorausgesetzt. Weiterhin werden ebene Wellen (oder sehr breite Strahlen) mit elektrischen  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = e\mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$  und magnetischen  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = e\mathbf{B}_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$  Komponenten angenommen, wobei die Amplituden von elektrischen und magnetischen Feldern miteinander zusammenhängen

$$\mathbf{B}_0 = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 \quad \mathbf{E}_0 = -\frac{c^2}{\omega \epsilon} \mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 \quad (1.46)$$

und der Wellenvektor der Dispersionsbeziehung  $|\mathbf{k}|^2 = \epsilon \frac{\omega^2}{c^2}$  genügt. Da aus Symmetriegründen alle Wellenzahlvektoren und das Flächenlot in einer Ebene liegen, kann folgende Geometrie verwendet werden:



Jeder Wellenzahlvektor liegt in der Einfallsebene  $x - z$  und besitzt nur zwei Komponenten

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} \kappa \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \text{mit } \beta = n \frac{\omega}{c} \sin \varphi \quad (1.47)$$

An der Grenzfläche bei  $x = 0$  muss wegen der Stetigkeit der Transversalkomponenten der elektrischen Felder gelten:

$$\mathbf{E}_{\text{In}}^{\parallel} e^{i\beta_{\text{In}}z} + \mathbf{E}_{\text{R}}^{\parallel} e^{i\beta_{\text{R}}z} = \mathbf{E}_{\text{T}}^{\parallel} e^{i\beta_{\text{T}}z}. \quad (1.48)$$

Diese Forderung ist nur durch

$$\mathbf{E}_{\text{In}}^{\parallel} + \mathbf{E}_{\text{R}}^{\parallel} = \mathbf{E}_{\text{T}}^{\parallel} \quad \text{und} \quad \beta_{\text{In}} = \beta_{\text{R}} = \beta_{\text{T}} \equiv \beta \quad (1.49)$$

zu erfüllen. Die Transversalkomponente des Wellenzahlvektors geht stetig über. Aus  $\beta_{\text{In}} = \beta_{\text{R}}$  folgt das

$$\varphi_{\text{In}} = \varphi_{\text{R}} \quad \text{Reflexionsgesetz}, \quad (1.50)$$

d. h. die Gleichheit von Einfalls- und Reflexionswinkel. Aus  $\beta_{\text{In}} = \beta_{\text{T}}$  folgt das

$$n_1 \sin \varphi_{\text{In}} = n_2 \sin \varphi_{\text{T}} \quad \text{Brechungsgesetz}. \quad (1.51)$$

#### 1.4.4 Fresnelsche Formeln

Das Einfallfeld kann nach seinen zwei möglichen Polarisationsrichtungen zerlegt werden.

1. TE: Transversal elektrisch  
 $\mathbf{E} \perp$  zur Einfallsebene polarisiert  $\mathbf{E} = E \hat{\mathbf{e}}_y$ ,  
 $\mathbf{B}$  in der Einfallsebene polarisiert
2. TM: Transversal magnetisch  
 $\mathbf{B} \perp$  zur Einfallsebene polarisiert  $\mathbf{B} = B \hat{\mathbf{e}}_y$ ,  
 $\mathbf{E}$  in der Einfallsebene polarisiert

#### Transversal elektrischer Fall

Die Verwendung der Stetigkeit der Transversalkomponenten führt für das

$E$ -Feld ( $y$ -Komponente) zu:  $E_{\text{In}} + E_{\text{R}} = E_{\text{T}}$  und für das

$B$ -Feld ( $z$ -Komponente) zu:  $B_{\text{In},z} + B_{\text{R},z} = B_{\text{T},z}$

Letzteres kann mittels  $B_z = \frac{1}{\omega} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0)_z$  durch das elektrische Feld ausgedrückt werden als:

$$\kappa_{\text{In}} E_{\text{In}} + \kappa_{\text{R}} E_{\text{R}} = \kappa_{\text{T}} E_{\text{T}}. \quad (1.52)$$

Das reflektierte Feld ist von der Grenzfläche weg gerichtet, weshalb  $\kappa_{\text{In}} = -\kappa_{\text{R}}$  und damit  $\kappa_1 (E_{\text{In}} - E_{\text{R}}) = \kappa_2 E_{\text{T}}$  mit  $\kappa_1 = \kappa_{\text{In}} = -\kappa_{\text{R}}$  und  $\kappa_2 = \kappa_{\text{T}}$  gilt.

Damit ergeben sich zwei Gleichungen für die unbekannt reflektierten und transmittierten

Felder, woraus durch Auflösen die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten  $\rho_{\text{TE}}$  und  $\tau_{\text{TE}}$  berechnet werden können

$$\rho_{\text{TE}} = \frac{E_{\text{R}}}{E_{\text{In}}} = \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2}, \quad \tau_{\text{TE}} = \frac{E_{\text{T}}}{E_{\text{In}}} = \frac{2\kappa_1}{\kappa_1 + \kappa_2} \quad (1.53)$$

$$\text{mit } \kappa_1 = \sqrt{n_1^2 \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2}, \kappa_2 = \sqrt{n_2^2 \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2}, \quad \text{und } \beta = n_1 \frac{\omega}{c} \sin \varphi_{\text{In}}$$

### Transversal magnetischer Fall

Die Verwendung der Stetigkeit der Transversalkomponenten führt für das

$B$ -Feld ( $y$ -Komponente) zu:  $B_{\text{In}} + B_{\text{R}} = B_{\text{T}}$  und für das

$E$ -Feld ( $z$ -Komponente) zu:  $E_{\text{In},z} + E_{\text{R},z} = E_{\text{T},z}$

Letzteres kann mittels  $E_z = -\frac{c^2}{\omega \varepsilon} (\mathbf{k} \times \mathbf{B}_0)_z$  durch das  $B$ -Feld ausgedrückt werden als

$$\frac{\kappa_1}{\varepsilon_1} (B_{\text{In}} - B_{\text{R}}) = \frac{\kappa_2}{\varepsilon_2} B_{\text{T}}. \quad (1.54)$$

Analog zum TE-Fall können durch Auflösen der Gleichungen die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten  $\rho_{\text{TE}}$  und  $\tau_{\text{TE}}$  berechnet werden. Hierbei werden  $E$ - und  $B$ -Felder ausgetauscht und  $\kappa_1$  durch  $\kappa_1/\varepsilon_1$  und  $\kappa_2$  durch  $\kappa_2/\varepsilon_2$  ersetzt:

$$\rho_{\text{TE}} = \frac{B_{\text{R}}}{B_{\text{In}}} = \frac{\kappa_1 \varepsilon_2 - \kappa_2 \varepsilon_1}{\kappa_1 \varepsilon_2 + \kappa_2 \varepsilon_1}, \quad \tau_{\text{TE}} = \frac{B_{\text{T}}}{B_{\text{In}}} = \frac{2\kappa_1 \varepsilon_2}{\kappa_1 \varepsilon_2 + \kappa_2 \varepsilon_1} \quad (1.55)$$

### Senkrechter Einfall ( $\varphi_{\text{In}} = 0$ und $\beta = 0$ )

Der TE und TM Fall sind bei senkrechtem Einfall nicht unterscheidbar. Trotzdem ergeben sich für Reflexions- und Transmissionskoeffizienten unterschiedliche Werte, da sich diese Koeffizienten im Fall von TE auf das  $E$ -Feld und bei TM auf das  $B$ -Feld beziehen. Werden zusätzlich noch die Felder ineinander umgerechnet, ergeben sich gleiche Werte, weshalb nur der TE Fall diskutiert wird:

$$\rho_{\text{TE}}(\varphi_{\text{In}} = 0) = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad \tau_{\text{TE}}(\varphi_{\text{In}} = 0) = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}. \quad (1.56)$$

Dabei treten zwei interessante physikalische Effekte auf:

1. Bei der Reflexion am hochbrechenden Material ( $n_2 > n_1$ ) tritt ein Phasensprung von  $\pi$  auf  $\rho_{\text{TE}}(\varphi_{\text{In}} = 0) < 0$ . Das Gesamtfeld als Summe aus einfallendem und reflektiertem Feld wird damit abgeschwächt und effektiv von der Grenzfläche verdrängt (destruktive Interferenz). Diese Verdrängung erfolgt aber nur in einem kleinen Bereich ( $<$  halbe Wellenlänge) vor der Grenzfläche.
2. Beim Austritt aus dem hochbrechenden ins niedrigbrechende Material ( $n_1 > n_2$ ) kommt es zur Verstärkung des elektrischen Feldes ( $|\tau_{\text{TE}}(\varphi_{\text{In}} = 0)|^2 > 1$ ). Der Grund ist, dass im hochbrechenden Material das elektrische Feld abgeschirmt und ein Teil der Feldenergie in der Polarisation gespeichert wird. Diese Energie wird beim Durchgang durch die Grenzfläche wieder in elektrische Feldenergie umgewandelt.

### Energieflüsse an Grenzflächen

Für den Energiefluss ist der Poyntingvektor verantwortlich, der in zeitgemittelter Form für ebene Wellen durch die elektrischen oder magnetischen Amplituden folgendermaßen ausgedrückt werden kann:

$$\langle \mathbf{s} \rangle = \frac{1}{2\omega\mu_0} \operatorname{Re}(\mathbf{k}) |\mathbf{E}_0|^2 \quad \text{oder} \quad \langle \mathbf{s} \rangle = \frac{c^2}{2\omega\mu_0} \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{Re}(\mathbf{k}) |\mathbf{B}_0|^2. \quad (1.57)$$

Für das Reflexions-Transmissionsproblem sind jedoch nur die Energieflüsse interessant, welche senkrecht zur Grenzfläche erfolgen, d. h. die  $x$ -Komponente des Poyntingvektors. Für die Reflexion ergibt sich

$$R_{\text{TE}} = \frac{\langle s_{\text{R}} \rangle_x}{\langle s_{\text{In}} \rangle_x} = |\varrho_{\text{TE}}|^2 \quad \text{und} \quad R_{\text{TM}} = \frac{\langle s_{\text{R}} \rangle_x}{\langle s_{\text{In}} \rangle_x} = |\varrho_{\text{TM}}|^2. \quad (1.58)$$

Die Berechnung der Transmission ist schwieriger, das einfallender und transmittierter Strahl in unterschiedlichen Medien "gemessen" werden

$$T_{\text{TE}} = \frac{\langle s_{\text{T}} \rangle_x}{\langle s_{\text{In}} \rangle_x} = \frac{\operatorname{Re}(\kappa_2)}{\kappa_1} |\tau_{\text{TE}}|^2 \quad \text{und} \quad T_{\text{TM}} = \frac{\langle s_{\text{T}} \rangle_x}{\langle s_{\text{In}} \rangle_x} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{\operatorname{Re}(\kappa_2)}{\kappa_1} |\tau_{\text{TM}}|^2. \quad (1.59)$$

#### 1.4.5 Der Brewster Winkel

Es wird nun nach einem Einfallswinkel gesucht, für den die Reflexion komplett verschwindet ( $\varrho_{\text{TE}}(\varphi_{\text{B}}) = 0$ ). Für transversal elektrisch polarisiertes Licht existiert ein solcher Winkel nicht, jedoch immer für TM-Polarisation. Der Brewsterwinkel folgt aus der Forderung:

$$\varrho_{\text{TM}}(\varphi_{\text{B}}) = \frac{\kappa_1 \varepsilon_2 - \kappa_2 \varepsilon_1}{\kappa_1 \varepsilon_2 + \kappa_2 \varepsilon_1} = 0 \quad (1.60)$$

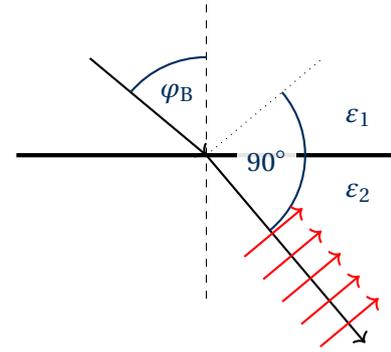
$$\begin{aligned} \Rightarrow \varepsilon_2 \kappa_1 &= \varepsilon_1 \kappa_2 \\ \varepsilon_2^2 \left( \varepsilon_1 \frac{\omega^2}{c^2} - \beta_{\text{B}}^2 \right) &= \varepsilon_1^2 \left( \varepsilon_2 \frac{\omega^2}{c^2} - \beta_{\text{B}}^2 \right) \\ \beta_{\text{B}}^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 \sin^2 \varphi_{\text{B}}. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Für der Brewsterwinkel ergibt sich letztendlich

$$\sin \varphi_{\text{B}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}. \quad (1.62)$$

Weitere Rechnungen zeigen, dass beim Brewsterwinkel transmittierter und verschwindender reflektierter Strahl aufeinander senkrecht stehen.

Daraus ergibt sich eine physikalische Interpretation des Brewsterwinkels: Da der reflektierte Strahl durch die Wirkung von Material 2, d. h. der im Material induzierten Dipole gebildet wird, muss der reflektierte Strahl beim Brewsterwinkel verschwinden, da Dipole nicht in Richtung ihrer Achse abstrahlen können.



### 1.4.6 Totalreflexion

Wird beim Übergang vom hoch- ins niedrigbrechende Medium ( $n_1 > n_2$ ) das Brechungsgesetz angewendet, ergibt sich für Eingangswinkel  $\varphi_{\text{In}}$ , die einen Grenzwinkel  $\varphi_G$  übersteigen, formal ein Wert mit Betrag größer als 1 für den Sinus des Transmissionswinkels. Eine Wellenausbreitung ist im Medium 2 daher nicht möglich. Der Grenzwinkel der Totalreflexion ergibt sich aus der Bedingung  $\sin \varphi_T = 1$  zu

$$\sin \varphi_G = \frac{n_2}{n_1}. \quad (1.63)$$

Die Stetigkeit transversaler Feldkomponenten an der Grenzfläche zwischen beiden Medien erfordert die Existenz eines Feldes kurz hinter der Grenzfläche im Medium 2, selbst dann, wenn Totalreflexion vorliegt ( $\varphi_{\text{In}} > \varphi_G$ ). Ein solches Feld muss sowohl die Wellengleichung, als auch die Übergangsbedingungen erfüllen. Für die gegebene Geometrie und für TE-Polarisation hat es für die  $E_y$ -Feldkomponente die Struktur:

$$E(x, z) = E_T \exp[i(\kappa_2 x + \beta z)], \quad (1.64)$$

wobei die transversale Komponente des Wellenzahlvektors ( $z$ -Komponente) durch den Einfallswinkel im Medium 1 vorgegeben ist ( $\beta = n_1 \frac{\omega}{c} \sin \varphi_{\text{In}}$ ) und sich die longitudinale Komponente ( $x$ -Komponente) aus der Dispersionsrelation  $n_2^2 \frac{\omega^2}{c^2} = \beta^2 + \kappa_2^2$  ergibt:

$$\kappa_2^2 = n_2^2 \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 < \frac{\omega^2}{c^2} (n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \varphi_{\text{In}}). \quad (1.65)$$

Im Bereich der Totalreflexion  $\varphi_{\text{In}} > \varphi_G$  gilt

$$\kappa_2^2 < \frac{\omega^2}{c^2} (n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \varphi_G) = 0, \quad (1.66)$$

d. h.  $\kappa_2$  ist imaginär. Das Feld im Medium 2 hat daher die Form

$$E(x, z) = E_T \exp(i\beta z) \exp(-|\kappa_2|x), \quad (1.67)$$

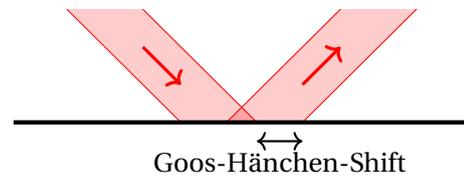
klingt also exponentiell mit Vergrößerung des Abstandes zur Grenzfläche ab. Diese Wellen werden als *evaneszent* bezeichnet.

*Merke:* Felder, denen eine Modulation aufgezwungen wird, die feiner als die Wellenlänge im jeweiligen Material ist, klingen exponentiell ab. Im Fall der Totalreflexion wird dem Feld im Medium 2 an der Grenzfläche durch das Feld aus Medium 1 eine Modulation  $\exp(i\beta z)$  aufgezwungen, die feiner als die Wellenlänge im Medium 2 ist.

### Effekte bei Totalreflexion

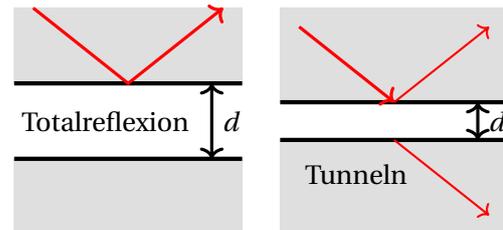
#### Goos-Hänchen-Shift:

Der Strahl wird bei Totalreflexion am optisch dünneren Medium um  $\tan \varphi_{\text{In}}/|\kappa_2|$ , einer Strecke, die der Eindringtiefe  $1/|\kappa_2|$  entspricht, versetzt. Es sieht also so aus, als würde der Strahl erst etwas ins niedrigbrechende Medium eindringen, bevor er zurück reflektiert wird.



#### Tunneleffekt:

Bei optischem Kontakt (Abstand vergleichbar mit der Wellenlänge) kommt es zum Tunneln. Die getunnelte Leistung ist proportional zu  $\exp(-2|\kappa_2|d)$ .



### Phasenverschiebung bei Totalreflexion

Am Beispiel TE-polarisierter Strahlung gilt für die Reflexion nach (1.53)

$$\rho_{\text{TE}} = \frac{E_{\text{R}}}{E_{\text{In}}} = \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} = \frac{\kappa_1 - i|\kappa_2|}{\kappa_1 + i|\kappa_2|}. \quad (1.68)$$

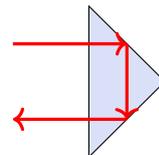
Es gilt  $|\rho_{\text{TE}}|^2 = 1$  und damit  $\rho_{\text{TE}} = e^{i\varphi}$ . Es kommt bei Totalreflexion nur zu einer Phasenverschiebung um den Winkel

$$\varphi = -2 \arctan \left( \frac{|\kappa_2|}{\kappa_1} \right), \quad (1.69)$$

die auch wieder als Folge eines kurzen Eindringens ins niedrigbrechende Medium interpretiert werden kann.

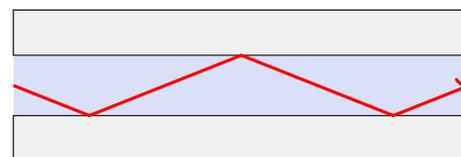
### Anwendungen der Totalreflexion

*Umlenkprisma:* Es wird 100 % Reflexion an einer einfachen Glasfläche erzielt. Somit ist eine teure Verspiegelung nicht erforderlich.



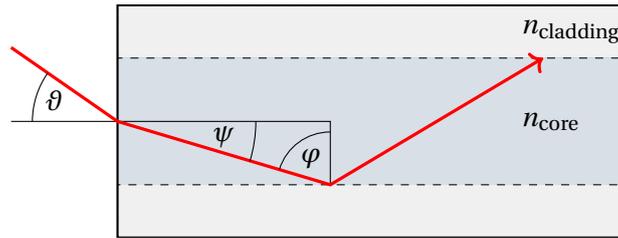
*Wellenführung:* Licht wird durch permanente Totalreflexion im hochbrechenden Material geführt. Beispiele dafür sind optische Leiter oder Fasern.

Nur das Licht, das innerhalb eines bestimmten Winkelbereiches auf die Stirnfläche einer Faser fällt, kann innerhalb der Faser durch Totalreflexion geführt werden.



Der halbe Öffnungswinkel  $\vartheta$  des durch die Faser akzeptierten Lichtbündels ("Apertur" der Faser) lässt sich mithilfe des Winkels für die Totalreflexion  $\sin \varphi = n_{\text{cladding}}/n_{\text{core}}$  und des Brechungsgesetzes herleiten:

$$\sin \vartheta = n_{\text{core}} \sin \psi = n_{\text{core}} \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}. \quad (1.70)$$



**Fig. 4:** Zur Herleitung des Akzeptanzwinkels für Totalreflexion in einer optischen Faser. Für Totalreflexion muss  $n_{\text{core}} > n_{\text{cladding}}$  gelten.

Damit folgt schließlich

$$\sin \vartheta = \sqrt{n_{\text{core}}^2 - n_{\text{cladding}}^2}. \quad (1.71)$$

## 1.5 Die Polarisation des Materials

### 1.5.1 Das Lorentz-Modell

Die Idee von LORENTZ war die Beschreibung des Materials als ein Ensemble von durch das optische Feld (treibende Kraft) getriebenen Oszillatoren. Die induzierte Auslenkung entspricht der Polarisation.

Die Evolutionsgleichung der Elongation  $\mathbf{d}$  eines ‐Oszillators‐ lautet

$$\underbrace{m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{d}_{\text{reell}}}_{\text{Trägheit}} + \underbrace{m\gamma \frac{d}{dt} \mathbf{d}_{\text{reell}}}_{\text{Dämpfung}} + \underbrace{m\omega_0^2 \mathbf{d}_{\text{reell}}}_{\text{Rückstellkraft}} = \underbrace{q \mathbf{E}_{\text{reell}}}_{\text{Treiber}} \quad (1.72)$$

mit der Eigenfrequenz  $\omega_0$ , der Dämpfungsrate  $\gamma$ , der Masse  $m$  und der Ladung  $q$ . Das durch die Bewegung induzierte mikroskopische Dipolmoment ergibt sich zu  $\mathbf{p}_{\text{reell}} = q\mathbf{d}_{\text{reell}}$ . Die makroskopische Polarisation ergibt sich durch Multiplikation mit der Dipoldichte  $N$  als  $\mathbf{P}_{\text{reell}} = N\mathbf{p}_{\text{reell}}$  (Achtung  $\mathbf{p}_{\text{reell}}$  und  $\mathbf{P}_{\text{reell}}$  haben verschiedene Einheiten). Damit ergibt sich die Bewegungsgleichung der makroskopischen Polarisation zu

$$\left[ \frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right] \mathbf{P}_{\text{reell}} = N \frac{q^2}{m} \mathbf{E}_{\text{reell}}. \quad (1.73)$$

Bei einem monochromatischen Treiberfeld ergibt sich die komplexe Amplitude der Polarisation zu

$$\mathbf{P}(\omega) = \varepsilon_0 \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \mathbf{E}(\omega) \quad (1.74)$$

mit der Oszillatorstärke  $f = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{q^2 N}{m}$ .

Da  $\mathbf{P}(\omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega) \mathbf{E}(\omega)$  gilt, folgt für die komplexe Suszeptibilitätsfunktion

$$\chi(\omega) = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}. \quad (1.75)$$

Aus der Suszeptibilität ergibt sich die relative Dielektrizitätskonstante zu

$$\begin{aligned}\varepsilon(\omega) &= \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega) = 1 + \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \\ \Rightarrow \varepsilon'(\omega) &= 1 + \frac{f(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \\ \varepsilon''(\omega) &= \frac{f\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}.\end{aligned}\tag{1.76}$$

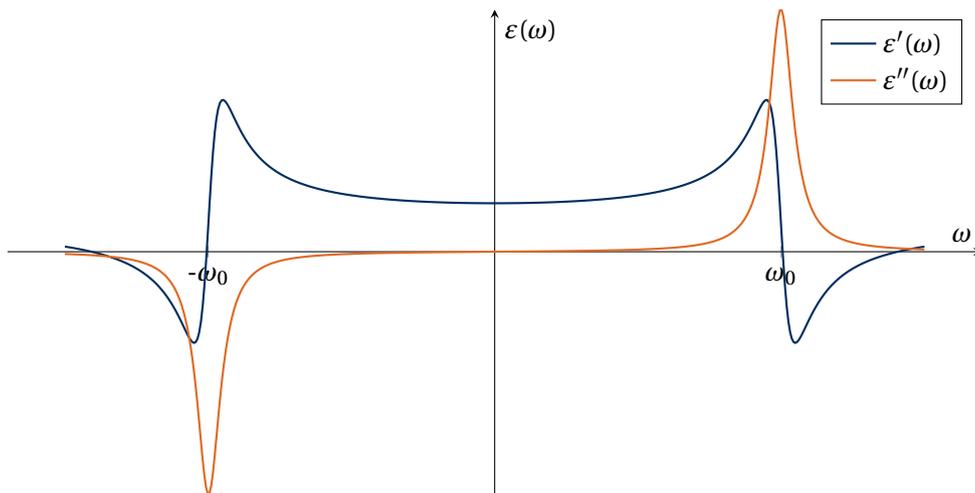


Fig. 5: Real- und Imaginärteil der komplexen Dielektrizitätskonstante.

Die Dielektrizitätskonstante ist vor allem in der Nähe von Resonanzen stark frequenzabhängig (dispersiv). Der Realteil/Imaginärteil der Dielektrizitätskonstanten ist bzgl.  $\omega = 0$  symmetrisch/antisymmetrisch. Der Imaginärteil der Dielektrizitätskonstanten ist nur in der Nähe von Resonanzen wesentlich von Null verschieden (starke Abnahme bei Entfernung von der Resonanz), während der Realteil in einem wesentlich größeren Frequenzbereich von der Resonanz beeinflusst wird.

### 1.5.2 Ebene Wellen im dispersiven Material

Da sich die MAXWELL-Gleichungen für das homogene isotrope Material gegenüber denen des Vakuums formal nicht geändert haben, beschreibt die HELMHOLTZ-Gleichung ebenfalls die Ausbreitung monochromatischer Felder, wobei die Lichtgeschwindigkeit des Vakuums durch  $c/\sqrt{\varepsilon}$  ersetzt wird

$$\left(\Delta + \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}\right) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0.\tag{1.77}$$

Lösungen davon sind beispielsweise ebene Wellen  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ , deren Wellenzahlvektor die Dispersionsrelation  $\mathbf{k}^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}$  erfüllt. In Abhängigkeit vom Frequenzbereich treten nun drei interessante Fälle auf:

1.  $\varepsilon$  ist reell (fern von Resonanzen)

$\mathbf{k}$  kann (aber muss nicht) reell sein. "Normale" Wellen sind möglich. In der Nähe einer Grenzfläche (z. B.) bei Totalreflexion sind Wellen der Form  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0 \exp(i\mathbf{k}_R \mathbf{r}) \exp(-\mathbf{k}_i \mathbf{r})$  möglich. Es muss dann gelten

$$\mathbf{k}_R^2 - \mathbf{k}_i^2 = \varepsilon' \frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{und} \quad \mathbf{k}_R \cdot \mathbf{k}_i = 0, \quad (1.78)$$

d. h. Realteil (Ausbreitungsrichtung der Phasenfronten) und Imaginärteil (Richtung des Abklingens) des Ausbreitungsvektors stehen senkrecht aufeinander.

2.  $\varepsilon$  ist komplex (nahe der Resonanz)

$\mathbf{k} = \mathbf{k}_R + i\mathbf{k}_i$  ist komplex. Es handelt sich um eine in Richtung von  $\mathbf{k}_i$  exponentiell  $\propto \exp(-\mathbf{k}_i \mathbf{r})$  abklingende Welle. Der nicht verschwindende Imaginärteil der Dielektrizitätskonstanten bewirkt einen Energieverlust (Absorption).

3.  $\varepsilon$  ist reell und negativ (oberhalb einer Resonanz, bei schwacher Dämpfung und großer Oszillatorstärke)

$$\mathbf{k}^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = -|\varepsilon| \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (1.79)$$

Mindestens ein der drei Komponenten des Wellenzahlvektors ist imaginär. Es tritt eine Dämpfung in die entsprechende Richtung auf. Daran ändert sich auch nichts, wenn  $\varepsilon$  bei negativem Realteil ebenfalls einen Imaginärteil besitzt.

CAVE: Exponentiell anwachsende Lösungen sind nur in einem Halbraum, d. h. in der Nähe einer Grenzfläche möglich, weil sonst unbegrenzt hohe Felder auftreten.

### 1.5.3 Die Suszeptibilität realer Materialien

Reale Systeme haben stets mehrere Resonanzen mit meistens unterschiedlichen Resonanzfrequenzen  $\omega_m$ , Dämpfungen  $\gamma_m$  und Oszillatorstärken. Das Lorentz-Modell wird daher modifiziert zu:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \sum_m \frac{f_m}{\omega_m^2 - \omega^2 + i\gamma_m \omega}. \quad (1.80)$$

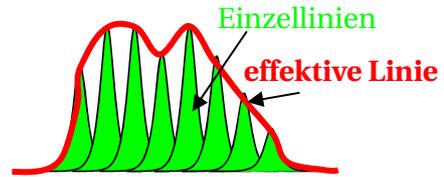
Die Breite der Resonanz (Breite der Absorptionslinie) wird durch die Dämpfung bestimmt und ist proportional zu  $\gamma$ . Materialien mit schwacher Dämpfung besitzen daher eine schmale Absorptionslinie.

Einzelatome, -moleküle oder Gase bei geringem Druck:

- schwache Wechselwirkung der Atome bzw. Moleküle
- schwache Dämpfung ( $\gamma = 1/T_{\text{Dämpfung}}$  mit Dämpfungszeiten zwischen 100 ps und mehreren Nanosekunden)
- schmale Absorptionslinien (Linienbreite  $< 10^{-3}$  nm)

Festkörper:

- starke Wechselwirkung der Einzeloszillatoren
- homogene Verbreiterung durch verstärkte Dämpfung  $\gamma = 1/T_{\text{Dämpfung}}$  mit Dämpfungszeiten um 100 fs und Linienbreiten  $> 1 \text{ nm}$
- inhomogene Verbreiterung durch Überlagerung vieler nebeneinander liegender Resonanzen

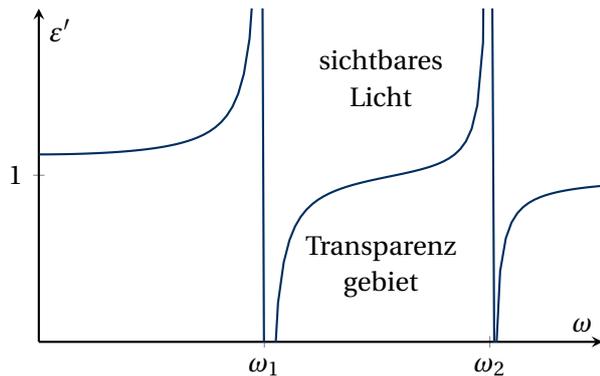


### Transparente Materialien im sichtbaren Spektralbereich

Im Transparenzgebiet herrscht keine Absorption, d. h. Resonanzen sind weit entfernt. Es kann sich gewöhnlich auf die Wirkung zweier benachbarter Resonanzen beschränkt werden und die Dämpfung vernachlässigt werden  $\gamma \approx 0$ :

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_\infty + \frac{f_1}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{f_2}{\omega_2^2 - \omega^2} \quad \text{für } \omega_1 < \omega < \omega_2 \quad (1.81)$$

Der Parameter  $\epsilon_\infty$  beschreibt den Einfluss weit entfernter Resonanzen. Die erste Resonanz  $\omega_1$  liegt im Infraroten und die Zweite  $\omega_2$  im Ultravioletten. Für  $\epsilon_\infty$  wurde im nebenstehenden Bild  $\epsilon_\infty = 1$  gewählt. Im Transparenzgebiet gilt meistens  $\frac{\partial \epsilon}{\partial \omega} = 0$ , ein Verhalten, das als "normale" Dispersion bezeichnet wird.



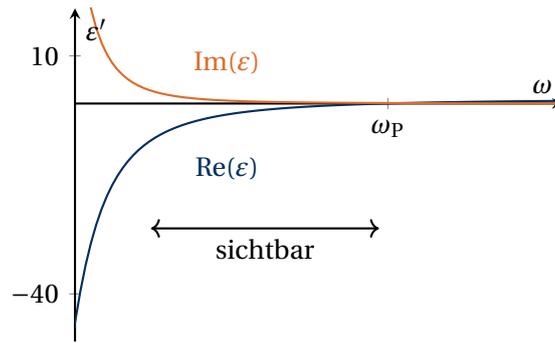
#### 1.5.4 Metalle

Metalle sind durch eine hohe Dichte freier Ladungsträger gekennzeichnet. In der entsprechenden Bewegungsgleichung fehlt daher die Rückstellkraft:

$$\underbrace{m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{d}_{\text{reell}}}_{\text{Trägheit}} + \underbrace{m\gamma \frac{d}{dt} \mathbf{d}_{\text{reell}}}_{\text{Dämpfung}} = \underbrace{q \mathbf{E}_{\text{reell}}}_{\text{Treiber}} \quad (1.82)$$

Die oben abgeleiteten Formeln können sofort auf Metalle übertragen werden. Wird  $\omega_0 = 0$  gesetzt, ergibt sich

$$\chi(\omega) = -\frac{q^2 N}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega^2 + i\gamma\omega} = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega} \quad (1.83)$$



**Fig. 6:** Real- und Imaginärteil der Dielektrizitätskonstanten eines Metalls.

mit der Plasmafrequenz  $\omega_p^2 = \frac{q^2 N}{\epsilon_0 m}$  und der Dielektrizitätskonstanten

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega}. \quad (1.84)$$

Ein Beispiel für Silber bei  $\lambda = 1 \mu\text{m}$  ergibt folgende Werte: Dielektrizitätskonstante:  $\text{Re}(\epsilon) = -49, \text{Im}(\epsilon) = 5$ , Plasmafrequenz:  $\omega_p = 5,65 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$  entsprechend einer Wellenlänge  $\lambda_p = 330 \text{ nm}$ .

Im Allgemeinen haben die Dielektrizitätskonstanten von Metallen

- einen negativen Realteil im sichtbaren Spektralbereich,
- einen sehr großen Absolutbetrag aufgrund der hohen Zahl an Ladungsträgern,
- einen großen Imaginärteil und
- eine Plasmafrequenz im nahen UV

Für  $\omega < \omega_p$  und für vernachlässigbaren  $\text{Im}(\epsilon)$  ( $\epsilon(\omega) \approx 1 - \omega_p^2/\omega^2 < 0$ ) fallen ebene Wellen im Metall exponentiell ab, da die Elektronen das optische Feld abschirmen. Oberhalb der Plasmafrequenz können die Elektronen der schnellen Oszillation des optischen Feldes nicht mehr stark genug folgen, die Abschirmung bricht zusammen und das Metall verhält sich wie ein "normales" Dielektrikum. In diesem Frequenzbereich gilt das oben eingeführte Modell oft nicht mehr so gut, da neben dem Einfluss freier Ladungsträger auch andere Übergänge relevant werden.

### 1.5.5 Kramers-Kronig-Transformation

Bisher wurden ausschließlich monochromatische Felder  $\mathbf{P}(\omega) = \epsilon_0 \chi(\omega) \mathbf{E}(\omega)$  betrachtet. Im Fall beliebiger Zeitverläufe bestimmen sich die reellen Felder durch die Überlagerung vieler monochromatischer Felder

$$\mathbf{P}_{\text{reell}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{\mathbf{P}}(\omega) e^{-i\omega t} \quad \text{und} \quad \mathbf{E}_{\text{reell}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{\mathbf{E}}(\omega) e^{-i\omega t} \quad (1.85)$$

mit den spektralen Amplituden

$$\tilde{\mathbf{P}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathbf{P}_{\text{reell}}(t) \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{E}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathbf{E}_{\text{reell}}(t). \quad (1.86)$$

Eine Analyse des Spektrums monochromatischer Felder zeigt, dass falls die Polarisation linear vom elektrischen Feld monochromatischer Felder abhängt, dies auch für allgemeine Spektralampplituden  $\tilde{\mathbf{P}}(\omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\omega)$  gelten muss. Wird diese Formel in die Gleichung (1.85) eingesetzt und  $\tilde{\mathbf{E}}(\omega)$  ersetzt, ergibt sich

$$\mathbf{P}_{\text{reell}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau R(\tau) \mathbf{E}_{\text{reell}}(t - \tau) \quad (1.87)$$

$$\text{mit der Responsefunktion} \quad R(\tau) = \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \chi(\omega) e^{-i\omega\tau} \quad (1.88)$$

Die Responsefunktion muss folgende Forderungen erfüllen:

1.  $R$  muss reell sein, da  $\mathbf{P}_{\text{reell}}(t)$  und  $\mathbf{E}_{\text{reell}}$  reell sind.
2.  $R$  muss kausal sein, d. h. es muss  $R(\tau) = 0$  für  $\tau < 0$  gelten, da sonst die Polarisation  $\mathbf{P}_{\text{reell}}(t)$  zum Zeitpunkt  $t$  durch elektrische Felder aus der Zukunft  $\mathbf{E}_{\text{reell}}(t' > t)$  beeinflusst würde.

Umgekehrt kann die Suszeptibilität auch aus der Responsefunktion mittels Fouriertransformation generiert werden

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau R(\tau) e^{i\omega\tau}. \quad (1.89)$$

Die oben genannten Forderungen an  $R$  übertragen sich auch auf  $\chi$ . Aus der Tatsache, dass  $R$  reell ist folgt:

$$\chi(\omega) \stackrel{(1.89)}{=} \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau [R(\tau) e^{-i\omega\tau}]^* = \chi(-\omega)^*. \quad (1.90)$$

Diese Beziehung gilt generell, wenn reelle Größen fouriertransformiert werden. Sie demonstriert, dass der Raum negativer Frequenzen  $\omega < 0$  keine neuen Informationen enthält und damit nur den positiven Frequenzbereich reproduziert.

Aus der Forderung des kausalen Verhaltens von  $R$  folgt, dass Real- und Imaginärteil der Suszeptibilität  $\chi$  miteinander verbunden sind, dass das eine aus dem anderen folgt. Dieser Zusammenhang wird mit der KRAMERS-KRONIG-Transformation repräsentiert.

### Herleitung der Kramers-Kronig-Transformation

Ausgangspunkt zur Herleitung der KRAMERS-KRONIG Transformation stellen folgende Annahmen dar:

- $R$  ist kausal ( $R(\tau < 0) = 0$ )
- $R$  ist beschränkt ( $|R(\tau)| \leq R_{\text{max}}$ )

- $\chi(\omega)$  fällt mindestens mit  $|\omega|^{-\varepsilon}$  mit  $\varepsilon > 0$

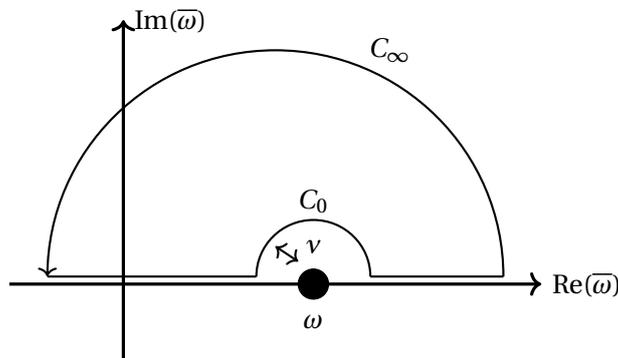
Aus den ersten beiden Annahmen folgt, dass

$$\chi(\omega_R + i\omega_i) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau R(\tau) e^{i\omega_R \tau} e^{-\omega_i \tau} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^{\infty} d\tau R(\tau) e^{i\omega_R \tau} e^{-\omega_i \tau} \quad (1.91)$$

analytisch in der oberen komplexen Halbebene ist ( $\omega_i > 0$ ), da

$$|\chi(\omega_R + i\omega_i)| \leq \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^{\infty} dt R_{\max} e^{-\omega_i t} = \frac{R_{\max}}{\varepsilon_0 \omega_i} \quad (1.92)$$

gilt. Wird nun die Funktion  $\frac{\chi(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega}$  entlang einer geschlossenen Kontur  $C$  bezüglich  $\bar{\omega}$  integriert, enthält diese



- eine Integration entlang der reellen Achse von  $-R_0$  bis  $\omega - \nu$ ,
- einen Halbkreis  $C_0$  mit Radius  $\nu$ ,
- eine Integration entlang der reellen Achse von  $\omega + \nu$  bis  $+R_0$  und
- einen Halbkreis  $C_\infty$  mit Radius  $R_0$  in der oberen komplexen Halbebene, der die Kontur schließt.

Da der Integrand innerhalb der Kontur analytisch ist, verschwindet das Integral

$$0 = \oint_C d\bar{\omega} \frac{\chi(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} = \int_{-R_0}^{\omega - \nu} d\bar{\omega} \frac{\chi(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} + \int_{\omega + \nu}^{+R_0} d\bar{\omega} \frac{\chi(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} + \int_{C_\infty} d\bar{\omega} \frac{\chi(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} + \int_{C_0} d\bar{\omega} \frac{\chi(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega}$$

Wird nun der Radius des großen Halbkreises  $R_0$  gegen Unendlich geführt, verschwindet das Integral über die Kontur  $C_\infty$ , da der Integrand mindestens wie  $|\bar{\omega}|^{-1-\varepsilon}$  fällt. Weiterhin lassen wir den Radius  $\nu$  des kleinen Halbkreises um  $\omega$  gegen null gehen. Dann kann  $\chi(\bar{\omega})$  innerhalb des Halbkreises als konstant angenommen werden und es gilt

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \int_{C_0} d\bar{\omega} \frac{\chi(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} = \chi(\omega) \int_{C_0} d\bar{\omega} \frac{1}{\bar{\omega} - \omega} = \chi(\omega) \int_{\pi}^0 d\varphi \frac{i\nu e^{i\varphi}}{\nu e^{i\varphi}} = -i\pi\chi(\omega) \quad (1.93)$$

wobei  $\bar{\omega} - \omega = v e^{i\varphi}$  und  $d\bar{\omega} = i v e^{i\varphi} d\varphi$  gesetzt wurde.  
Damit folgt die Kramer-Kronig-Beziehung zu

$$\chi(\omega) = \frac{1}{i\pi} \lim_{\nu \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{\omega-\nu} d\bar{\omega} \frac{\chi(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} + \int_{\omega+\nu}^{\infty} d\bar{\omega} \frac{\chi(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} \right] \quad (1.94)$$

$$= \frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\omega} \frac{\chi(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega}, \quad (1.95)$$

wobei  $\mathcal{P} \int$  den Cauchy'schen Hauptwert darstellt.

Diese Gleichung verbindet Real- und Imaginärteil der Suszeptibilität und erlaubt z. B. eine Herleitung des Realteils aus dem Imaginärteil

$$\operatorname{Re}[\chi(\omega)] = \frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\omega} \frac{\operatorname{Im}[\chi(\bar{\omega})]}{\bar{\omega} - \omega}, \quad (1.96)$$

d. h. absorptive Prozesse ( $\operatorname{Im}[\chi(\bar{\omega})]$ ) sind mit refraktiven ( $\operatorname{Re}[\chi(\omega)]$ ) eng verbunden. Eine nicht-verschwindende Suszeptibilität hat stets Real- und Imaginärteil, ist also eine komplexe Funktion der Frequenz.

### Alternative Herleitung der Kramers-Kronig-Transformation

Eine andere Herleitung soll ohne die Verwendung von Sätzen der Funktionentheorie oder Integration in der komplexen Ebene auskommen.

Zunächst wird die Fouriertransformation der Theta-Funktion

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (1.97)$$

benötigt.  $\theta(t)$  ist nur als Grenzwert transformierbar, da die Funktion nicht absolut integrabel ist. Mit  $\theta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \theta(t) e^{-\varepsilon t}$  folgt

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}(\omega) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \theta(t) e^{-\varepsilon t} e^{i\omega t} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon - i\omega} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \omega^2} + i \frac{\omega}{\varepsilon^2 + \omega^2} \right] \quad \text{Achtung: } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \omega^2} \neq 0 \end{aligned} \quad (1.98)$$

Der Wert des Grenzwertes wird durch die Auswertung des Integrals über die Funktion sichtbar

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \omega^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right) \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right)^2 + 1} = \arctan\left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi \\ \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \omega^2} &= \pi \delta(\omega). \end{aligned} \quad (1.99)$$

Für die Fouriertransformierte der  $\theta$ -Funktion ergibt sich also

$$\tilde{\theta}(\omega) = \frac{1}{2}\delta(\omega) + \frac{i}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\omega}{\varepsilon^2 + \omega^2}. \quad (1.100)$$

Unter Verwendung der *Kausalität* der Responsefunktion ( $R(\tau < 0) = 0$ ) folgt für die Suszeptibilität

$$\begin{aligned} \chi(\omega) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \theta(\tau) R(\tau) \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \tilde{\theta}(\omega') e^{-i\omega'\tau} \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega'' \chi(\omega'') e^{-i\omega''\tau} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \tilde{\theta}(\omega') \int_{-\infty}^{\infty} d\omega'' \chi(\omega'') \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i(\omega - \omega' - \omega'')\tau}}_{=2\pi\delta(\omega - \omega' - \omega'')} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \tilde{\theta}(\omega') \chi(\omega - \omega') \\ \chi(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \left[ \frac{1}{2}\delta(\omega') + \frac{i}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\omega'}{\varepsilon^2 + \omega'^2} \right] \chi(\omega - \omega') \\ &= \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\omega'}{\varepsilon^2 + \omega'^2} \chi(\omega - \omega') \\ \text{Substitution: } \omega - \omega' &= \bar{\omega} \Rightarrow d\omega' = -d\bar{\omega} \\ \chi(\omega) &= \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\omega} \frac{\bar{\omega} - \omega}{\varepsilon^2 + (\bar{\omega} - \omega)^2} \chi(\bar{\omega}) \end{aligned} \quad (1.101)$$

Die Funktion  $\frac{\bar{\omega} - \omega}{\varepsilon^2 + (\bar{\omega} - \omega)^2}$  divergiert mit verschwindendem  $\varepsilon$  an der Stelle  $\bar{\omega} = \omega$ , wobei das Integral über diese Polstelle verschwindet

$$\int_{\omega-\varepsilon}^{\omega+\varepsilon} d\bar{\omega} \frac{\bar{\omega} - \omega}{\varepsilon^2 + (\bar{\omega} - \omega)^2} = \frac{1}{2} \ln[\varepsilon^2 + (\bar{\omega} - \omega)^2] \Big|_{\omega-\varepsilon}^{\omega+\varepsilon} = 0 \quad (1.102)$$

Es ergibt sich also ebenfalls

$$\chi(\omega) = \frac{1}{i\pi} \lim_{\nu \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{\omega-\nu} d\bar{\omega} \frac{\chi(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} + \int_{\omega+\nu}^{\infty} d\bar{\omega} \frac{\chi(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} \right] \quad (1.103)$$

in Übereinstimmung mit Gleichung (1.94).

## 1.6 Transparente, doppelbrechende Materialien

### 1.6.1 Die dielektrische Funktion

Bisher wurden nur isotrope (richtungsunabhängige) Materialien betrachtet. Hier wird die dielektrische Verschiebung  $\mathbf{D}(\omega) = \varepsilon_0 \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\omega)$  mit einem skalaren  $\varepsilon(\omega)$  gebildet.

In anisotropen (richtungsabhängigen) Materialien wird die dielektrische Verschiebung zu einem Tensor zweiter Stufe  $\hat{\varepsilon}(\omega)$ . In Komponentenschreibweise lässt sich dieser Zusammenhang durch

$$D_i = \varepsilon_0 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} E_j \quad (1.104)$$

darstellen. Der mikroskopische Grund ist gewöhnlich das Vorhandensein nicht äquivalenter Kristallachsen, die auf ein einwirkendes elektrisches Feld unterschiedlich stark mit einer induzierten Materialpolarisation reagieren. Die so entstehende Polarisation und damit die dielektrische Verschiebung  $\mathbf{D}(\omega)$  ist daher gewöhnlich nicht parallel zum wirkenden elektrischen Feld  $\mathbf{E}(\omega)$  ausgerichtet. Im folgenden werden nur transparente Materialien betrachtet, d. h. es muss Energieerhaltung gelten. Aus

$$\operatorname{div} \langle \mathbf{s}_{\text{reell}} \rangle = -\frac{1}{4} \{ \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}^* + \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{j} \} \quad \text{und} \quad \mathbf{j} = -i\omega \mathbf{P} = -i\omega (\mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E}) \quad (1.105)$$

$$\text{folgt} \quad \operatorname{div} \langle \mathbf{s}_{\text{reell}} \rangle = \frac{i\omega}{4} (\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{D} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^*) = \frac{i\omega \varepsilon_0}{4} \sum_{i,j=1}^3 E_i^* E_j (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ji}^*). \quad (1.106)$$

Im verlustfreien Fall, d. h. für *transparente* Medien muss dieser Ausdruck für alle möglichen elektrischen Felder verschwinden. Für den dielektrischen Tensor folgt also

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}^*, \quad (1.107)$$

d. h. der dielektrische Tensor  $\hat{\varepsilon}(\omega)$  ist hermitesch. Damit besitzt  $\hat{\varepsilon}(\omega)$  nur *reelle* Eigenwerte und ein orthogonales Set von Eigenvektoren, die im Fall doppelbrechender Materialien, soweit diese orthogonal sind, den Kristallachsen entsprechen.

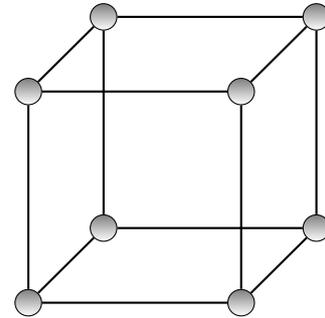
Im Fall doppelbrechender Kristalle (kein magnetooptischer Effekt, keine Chiralität des Materials), sind außerdem alle Komponenten von  $\hat{\varepsilon}(\omega)$  reell, auch die außerhalb der Diagonalen. Damit besitzen die Eigenvektoren nur reelle Komponenten und können als Basissystem genutzt werden, was im Weiteren auch getan wird, um eine Diagonalisierung von  $\hat{\varepsilon}(\omega)$  zu erreichen. Im System der Eigenvektoren ergibt sich

$$\hat{\varepsilon}(\omega) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad (1.108)$$

## 1.6.2 Die optische Klassifikation von Kristallen

## Isotrope Kristalle

Isotrope Kristalle besitzen drei äquivalente Kristallachsen. Damit gilt  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon$  und  $\hat{\varepsilon} = \varepsilon \mathbf{1}$ . Isotrope Kristalle besitzen daher kubische Symmetrie und verhalten sich für geringe Intensitäten (keine nichtlinearen Effekte) wie Gase, amorphe Flüssigkeiten oder Glas. Typische Beispiele für diese Kristallklasse sind Diamant oder Silizium.



## Einachsige Kristalle

einachsige Kristalle besitzen zwei äquivalente Kristallachsen, die sich von einer dritten senkrecht dazu stehenden Kristallachse unterscheiden. Sie besitzen damit genau eine Drehachse mit höherer Zähligkeit als zwei. Zwei der Eigenwerte des Dielektrizitätstensor sind entartet. Für Kalkspat, ein sehr stark doppelbrechendes einachsiges Mineral ergeben sich  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = n_o^2$  und  $\varepsilon_3 = n_e^2$  mit einem ordentlichen (engl. "ordinary") Brechungsindex  $n_o = 1.66$  und einem außerordentlichen (engl. "extra ordinary") Brechungsindex  $n_e = 1.49$ .

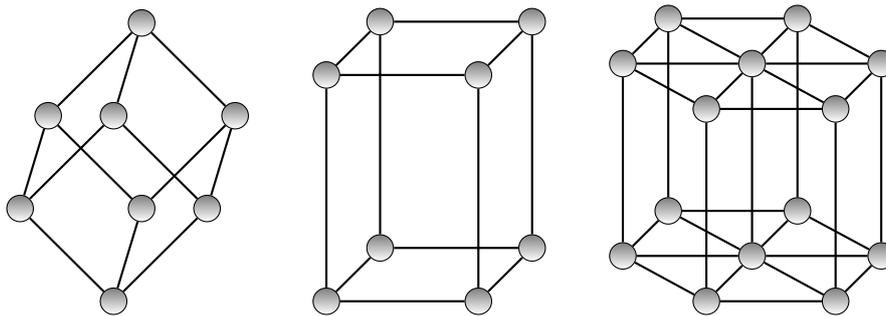


Fig. 7: Beispiele einachsiger Kristallgitter: trigonal (Quarz, Lithiumniobate), tetragonale, hexagonale

## Zweiachsige Kristalle

Zweiachsige Kristalle besitzen drei unterschiedliche Kristallachsen und es gilt  $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3 \neq \varepsilon_1$ .

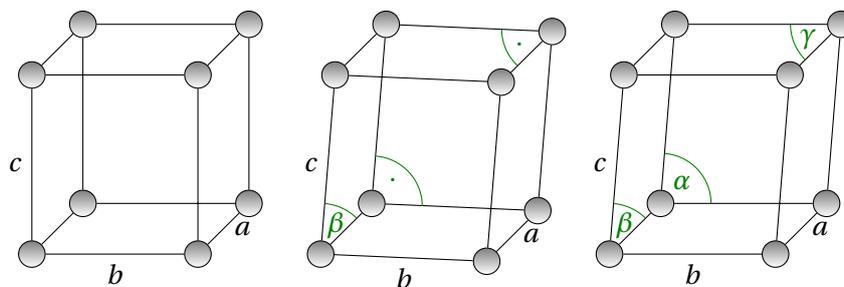


Fig. 8: Beispiele zweiachsiger Kristallgitter: orthorhombisch, monoklin, triklin

## 1.6.3 Wellenausbreitung im doppelbrechenden Material

Da doppelbrechende Materialien zwar anisotrop, aber trotzdem translationsinvariant sind, breiten sich in ihnen ebene Wellen der Form

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad \text{und} \quad \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \mathbf{D}_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (1.109)$$

aus. Werden diese Ausdrücke in die Wellengleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \mathbf{E} \quad (1.110)$$

eingesetzt ergibt sich

$$\mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \mathbf{E}_0 = 0. \quad (1.111)$$

Der Vektor  $\mathbf{k}$  wird nun in einen die Richtung bestimmenden Einheitsvektor  $\mathbf{u}$  und die Länge bestimmende richtungsabhängige Brechzahl  $n(\mathbf{u})$  zerlegt, da sie für eine vorgegebene Richtung von  $\mathbf{k}$  zur Länge proportional ist

$$\mathbf{k} = n(\mathbf{u}) \frac{\omega}{c} \mathbf{u} \quad \text{mit} \quad |\mathbf{u}| = 1. \quad (1.112)$$

Damit ergibt sich so für gegebenen Richtungsvektor  $\mathbf{u}$  ein dreidimensionales Eigenwertproblem für  $n$  der Form

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^{-1} \mathbf{u} \times \mathbf{u} \times \mathbf{E}_0 = -\frac{1}{n^2} \mathbf{E}_0, \quad (1.113)$$

wobei vorausgesetzt wurde, dass keiner der Eigenwerte von  $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$  verschwindet und damit der Tensor invertierbar ist. Diese Voraussetzung ist für natürliche Materialien stets erfüllt. Formal lässt sich (1.113) umschreiben zu

$$\hat{\mathbf{M}} \mathbf{E}_0 = \lambda \mathbf{E}_0 \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{1}{n}, \quad \hat{\mathbf{M}} = \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^{-1} \hat{\mathbf{V}}, \quad (1.114)$$

wobei  $\hat{\mathbf{M}}$  aus dem inversen dielektrischen Tensor und dem aus  $\mathbf{k} \times \mathbf{k} \times$  folgenden Ausdruck  $\hat{\mathbf{V}}$  gebildet wird:

$$\hat{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} u_1^2 - 1 & u_1 u_2 & u_1 u_3 \\ u_1 u_2 & u_2^2 - 1 & u_2 u_3 \\ u_1 u_3 & u_2 u_3 & u_3^2 - 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \frac{u_1^2 - 1}{\epsilon_1} & \frac{u_1 u_2}{\epsilon_1} & \frac{u_1 u_3}{\epsilon_1} \\ \frac{u_1 u_2}{\epsilon_2} & \frac{u_2^2 - 1}{\epsilon_2} & \frac{u_2 u_3}{\epsilon_2} \\ \frac{u_1 u_3}{\epsilon_3} & \frac{u_2 u_3}{\epsilon_3} & \frac{u_3^2 - 1}{\epsilon_3} \end{pmatrix}. \quad (1.115)$$

Aus  $\det(\hat{\mathbf{M}} - \lambda \mathbb{1})$  folgt

$$\begin{aligned} & \left( \frac{u_1^2 - 1}{\epsilon_1} - \lambda \right) \left( \frac{u_2^2 - 1}{\epsilon_2} - \lambda \right) \left( \frac{u_3^2 - 1}{\epsilon_3} - \lambda \right) + 2 \frac{u_1^2 u_2^2 u_3^2}{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3} \\ & - \left( \frac{u_1^2 - 1}{\epsilon_1} - \lambda \right) \frac{u_2^2 u_3^2}{\epsilon_2 \epsilon_3} - \left( \frac{u_2^2 - 1}{\epsilon_2} - \lambda \right) \frac{u_1^2 u_3^2}{\epsilon_1 \epsilon_3} - \left( \frac{u_3^2 - 1}{\epsilon_3} - \lambda \right) \frac{u_1^2 u_2^2}{\epsilon_1 \epsilon_2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda^3 - \left( \frac{u_1^2 - 1}{\varepsilon_1} + \frac{u_2^2 - 1}{\varepsilon_2} + \frac{u_3^2 - 1}{\varepsilon_3} \right) \lambda^2 \\
+ \left( \frac{u_1^2 - 1}{\varepsilon_1} \frac{u_2^2 - 1}{\varepsilon_2} + \frac{u_2^2 - 1}{\varepsilon_2} \frac{u_3^2 - 1}{\varepsilon_3} + \frac{u_1^2 - 1}{\varepsilon_1} \frac{u_3^2 - 1}{\varepsilon_3} - \frac{u_2^2 u_3^2}{\varepsilon_2 \varepsilon_3} - \frac{u_1^2 u_3^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_3} - \frac{u_1^2 u_2^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \right) \lambda = 0 \\
\lambda^3 + \left( \frac{u_2^2 + u_3^2}{\varepsilon_1} + \frac{u_1^2 + u_3^2}{\varepsilon_2} + \frac{u_1^2 + u_2^2}{\varepsilon_3} \right) \lambda^2 + \left( \frac{u_1^2}{\varepsilon_2 \varepsilon_3} + \frac{u_2^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_3} + \frac{u_3^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \right) \lambda = 0, \quad (1.116)
\end{aligned}$$

wobei in der letzten Zeile die Normierung des Richtungsvektors  $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$  ausgenutzt wurde.

Einer der drei Eigenwerte von  $\hat{M}$  ist offensichtlich Null. Der zugehörigen Eigenvektor lässt sich sofort erraten, da jeder Vektor parallel zu  $\mathbf{u}$  durch die Operation  $\mathbf{u} \times \mathbf{u} \times$  zu Null wird und demzufolge den Eigenwert Null hat.

Leider ist diese Lösung physikalisch unrealistisch, da die resultierende Brechzahl der Welle unendlich wäre. Darüber hinaus wäre für eine solche Lösung die aus  $\vec{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{D} = 0$  resultierende Bedingung  $\mathbf{u} \hat{\varepsilon} \mathbf{u} = 0$  für positive Eigenwerte  $\varepsilon_i > 0$  nicht zu erfüllen.

Es verbleibt stets eine quadratische Gleichung für  $n(\mathbf{u})^2 = -1/\lambda$

$$\begin{aligned}
(u_1^2 \varepsilon_1 + u_2^2 \varepsilon_2 + u_3^2 \varepsilon_3) n^4 - \\
[\varepsilon_1 \varepsilon_2 (u_1^2 + u_2^2) + \varepsilon_1 \varepsilon_3 (u_1^2 + u_3^2) + \varepsilon_2 \varepsilon_3 (u_2^2 + u_3^2)] n^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = 0 \quad (1.117)
\end{aligned}$$

die für jede Richtung des Wellenzahlvektors genau zu zwei möglichen Längen derselben Brechzahl oder zwei Brechzahlen führt.

$\hat{M}$  ist keine hermitesche Matrix, d. h. es können erst einmal keine generellen Aussagen über die Struktur von Eigenwerten und -vektoren getroffen werden. Das zu behandelnde Eigenwertproblem der Matrix  $\hat{M}$  kann aber für positive  $\varepsilon_i > 0$  durch eine einfache Transformation in das einer hermiteschen Matrix umgeformt werden. Aus

$$\hat{M} \mathbf{E}_0 = \hat{\varepsilon}^{-1} \hat{V} \mathbf{E}_0 = \sqrt{\hat{\varepsilon}^{-1}} \sqrt{\hat{\varepsilon}^{-1}} \hat{V} \sqrt{\hat{\varepsilon}^{-1}} \sqrt{\hat{\varepsilon}} \mathbf{E}_0 = \lambda \mathbf{E}_0 \quad (1.118)$$

$$\text{folgt } \sqrt{\hat{\varepsilon}^{-1}} \hat{V} \sqrt{\hat{\varepsilon}^{-1}} \sqrt{\hat{\varepsilon}} \mathbf{E}_0 = \lambda \sqrt{\hat{\varepsilon}} \mathbf{E}_0. \quad (1.119)$$

$$\hat{M}' = \sqrt{\hat{\varepsilon}^{-1}} \hat{V} \sqrt{\hat{\varepsilon}^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{u_1^2 - 1}{\varepsilon_1} & \frac{u_1 u_2}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}} & \frac{u_1 u_3}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_3}} \\ \frac{u_1 u_2}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}} & \frac{u_2^2 - 1}{\varepsilon_2} & \frac{u_2 u_3}{\sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_3}} \\ \frac{u_1 u_3}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_3}} & \frac{u_2 u_3}{\sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_3}} & \frac{u_3^2 - 1}{\varepsilon_3} \end{pmatrix} \quad (1.120)$$

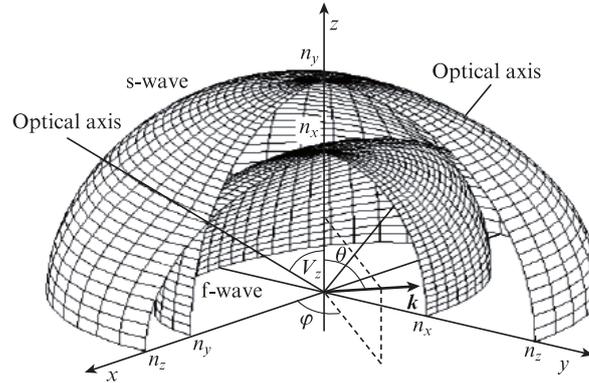
Die neue Matrix in (1.120) ist hermitesch, besitzt die gleichen Eigenwerte und erfüllt bezüglich des Vektors  $\mathbf{X} = \sqrt{\hat{\varepsilon}} \mathbf{E}_0$  ein analoges Eigenwertproblem

$$\hat{M}' \mathbf{X}_n = -\frac{1}{n^2} \mathbf{X}_n. \quad (1.121)$$

Aufgrund der Hermizität von  $\hat{\mathbf{M}}'$  müssen alle Eigenwerte  $\lambda = 1/n^2$  und damit die gesuchten Quadrate der Brechzahlen reell sein.

### Normalenflächen

Werden die aus der Lösung der entsprechenden quadratischen Gleichung resultierenden 2 Brechzahlen oder Modenindizes über dem jeweiligen Richtungsvektor  $\mathbf{u}$  aufgetragen, ergibt sich die sogenannte Normalenfläche, eine zweiblättrige Oberfläche, deren Innen- und Außenfläche sich in den zwei optischen Achsen jeweils punktweise berühren.



**Fig. 9:** Normalenflächen für s- und f-Wellen in einem zweiachsigen Kristall mit den Brechzahlen  $n_x < n_y < n_z$ .

S.G. Grechin, P.P. Nikolaev, A.G. Okhrimchuk, Quantum Electronics (2014)

### Polarisation der Eigenlösungen

Die Eigenvektoren entsprechen der Polarisation der sich im doppelbrechenden Kristall ausbreitenden Wellen. Da  $\hat{\mathbf{M}}'$  für positive  $\varepsilon_i$  nur reelle Komponenten besitzt, sind entsprechende Eigenvektoren  $\mathbf{X}_n$  ebenfalls reell, genauso wie entsprechende Eigenvektoren von  $\hat{\mathbf{M}}$ , die durch  $\mathbf{E}_n = \sqrt{\hat{\varepsilon}^{-1}} \mathbf{X}_n$  gebildet werden können.

Eigenvektoren des elektrischen Feldes und die Quadrate entsprechender Brechzahlen sind also für transparente doppelbrechende Kristalle stets reell, d. h. (wie wir später noch ausführlicher diskutieren werden) linear polarisiert.

Da Eigenvektoren  $\mathbf{X}_n$  zu verschiedenen Eigenwerten  $\lambda$  zueinander orthogonal sind, sind die zugehörigen elektrischen Felder  $\mathbf{E}_n = \sqrt{\hat{\varepsilon}^{-1}} \mathbf{X}_n$  im Allgemeinen nicht orthogonal zueinander. Allgemein folgt aus  $\mathbf{X}_n \cdot \mathbf{X}_{n'} = a \delta_{nn'}$  nur eine Orthogonalität von E- und D-Feldern unterschiedlicher Eigenlösungen  $\mathbf{D}_n \cdot \mathbf{E}_{n'} = a' \delta_{nn'}$ .

Da im homogenen anisotropen Medium auch  $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{D} = 0$  erfüllt sein muss, gilt für die Eigenlösungen  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{D}_n = 0$  und damit nicht unbedingt  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_n = 0$ . Das elektrische Feld elektromagnetischer Wellen in doppelbrechenden Kristallen ist i. A. nicht mehr rein transversal polarisiert. Aus

$$\hat{\varepsilon}^{-1} \mathbf{u} \times \mathbf{u} \times \mathbf{E}_n = -\frac{1}{n^2} \mathbf{E}_n \quad \text{folgt} \quad n^2 [\mathbf{E}_n - \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}_n)] = \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{D}_n \quad (1.122)$$

und nach einer Multiplikation mit dem gleichen Eigenvektor  $\mathbf{D}_n$  ergibt sich

$$n^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\sum_i D_{n_i} D_{n_i}}{\sum_i E_{n_i} D_{n_i}} = \frac{\sum_i \varepsilon_i E_{n_i} D_{n_i}}{\sum_i E_{n_i} D_{n_i}}. \quad (1.123)$$

Da die einzelnen Summanden für positive  $\varepsilon_i > 0$  wegen  $E_{n_i} D_{n_i} = \varepsilon_i E_{n_i} E_{n_i}$  größer sind, muss

$$\min(\varepsilon_i) \leq n^2 \leq \max(\varepsilon_i) \quad (1.124)$$

gelten. Das Quadrat des effektiven Index der Eigenmode ist also positiv und im Bereich der Indizes des Mediums, eine Beziehung, die für den in natürlichen Medien allerdings unrealistischen Fall negativer  $\varepsilon_i$  nicht mehr gilt.

Wird die obige Beziehung mit dem anderen Eigenvektor  $\mathbf{D}_m$  zum gleichen Richtungsvektor  $\mathbf{u}$  multipliziert, ergibt sich

$$\mathbf{D}_m \mathbf{D}_n = n^2 \mathbf{D}_m \mathbf{E}_n = 0. \quad (1.125)$$

Die  $\mathbf{D}$ -Vektoren der Eigenlösungen sind also orthogonal.

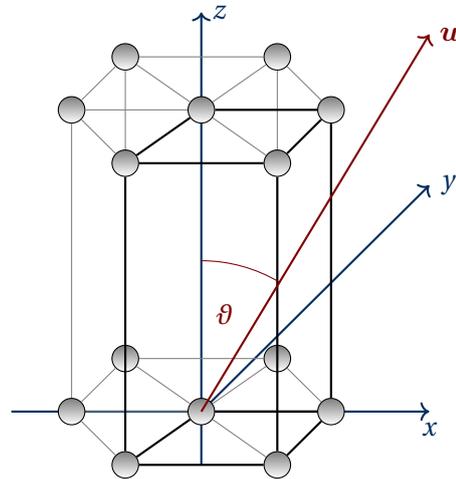
### 1.6.4 Wellenausbreitung im einachsigen Kristall

Im weiteren wird der Fall des einachsigen Kristalls, d. h. eines Kristallgitters mit zwei äquivalenten und einer davon abweichenden Kristallachse, genauer betrachtet. Dabei wird angenommen, dass die beiden äquivalenten Achsen in der  $x$ - $y$ -Ebene liegen, während die in die  $z$ -Richtung weisende Kristallachse, die hier gleich der optischen Achse ist, davon abweichende dielektrische Eigenschaften repräsentiert:  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = n_0^2 \neq \varepsilon_z = n_e^2$ .

Für diesen konkreten Fall wird folgendes Eigenwertproblem gelöst:

$$\hat{\varepsilon}^{-1} \mathbf{u} \times \mathbf{u} \times \mathbf{E}_0 = \hat{\varepsilon}^{-1} [\mathbf{u}(\mathbf{u} \mathbf{E}_0) - \mathbf{E}_0] = -\frac{1}{n^2} \mathbf{E}_0 \quad (1.126)$$

Da der Kristall in seinen linearen Eigenschaften zylindersymmetrisch ist, lässt sich annehmen, dass die Ausbreitungseigenschaften einer Welle nur von dem von ihrem Ausbreitungsvektor und der  $z$ -Achse eingeschlossenen Winkel  $\vartheta$  abhängen. Im Weiteren seien angenommen, dass  $\mathbf{u}$  in der  $x$ - $z$ -Ebene liegt, d. h. dass  $u_x^2 + u_z^2 = 1$  gilt. Aus Symmetriegründen lassen sich zwei Fälle mit orthogonaler Polarisation des elektrischen Feldes unterscheiden:



#### Ordentlicher Strahl

Das elektrische Feld  $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_y$  ist in  $y$ -Richtung und damit senkrecht zur aus optischer Achse und Richtung des Wellenzahlvektor  $\mathbf{u}$  gebildeten Ebene polarisiert. Dann fällt in der Eigenwertgleichung (1.126) der erste Term ( $\mathbf{u}(\mathbf{u} \mathbf{E}_0)$ ) weg und es verbleibt

$$\frac{1}{n^2} \mathbf{e}_y = \frac{1}{n_0^2} \mathbf{e}_y, \quad (1.127)$$

d. h.  $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_y$  ist wie von den Symmetrieüberlegungen her erwartet ein Eigenvektor des Systems mit einem effektiven Brechungs- oder Modenindex  $n = n_0$ , der nicht von der Ausbreitungsrichtung abhängt. Bzgl. des sogenannten ordentlichen Strahls, d. h. einer Welle, die senkrecht zur Ebene aus Kristallachse und Ausbreitungsvektor polarisiert ist, verhält sich der Kristall wie ein isotropes Material.

### Außerordentlicher Strahl

Es wird nun das in der  $x$ - $y$ -Ebene polarisierte, elektrische Feld untersucht und die Eigenwertgleichung zu

$$\mathbf{u}(\mathbf{u}\mathbf{E}_e) = \left( \hat{\mathbf{l}} - \frac{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}{n^2} \right) \mathbf{E}_e \quad (1.128)$$

modifiziert. Außer für die speziellen Fälle  $n = n_o$  und  $n = n_e$ , die vorläufig ausgeschlossen werden sollen, ist die Matrix  $\left( \hat{\mathbf{l}} - \frac{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}{n^2} \right)$  invertierbar zu

$$\left( \hat{\mathbf{l}} - \frac{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}{n^2} \right)^{-1} \mathbf{u}(\mathbf{u}\mathbf{E}_e) = \mathbf{E}_e. \quad (1.129)$$

Beide Seiten werden mit  $\mathbf{u}$  multipliziert und das Skalarprodukt  $(\mathbf{u}\mathbf{E}_e)$  gekürzt (Implizit wird dabei ausgenutzt, dass die außerordentliche Welle nicht transversal ist und damit gewöhnlich  $\mathbf{u}\mathbf{E}_e \neq 0$ ). Es ergibt sich somit

$$1 = \mathbf{u} \left( \hat{\mathbf{l}} - \frac{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}{n^2} \right)^{-1} \mathbf{u}. \quad (1.130)$$

Bis zu dieser Stelle wurde die Einachsigkeit des Kristalls noch nicht benutzt, d. h. (1.130) gilt genauso auch für allgemein doppelbrechende Kristalle. Sie führt dort zu der schon behandelten Eigenwertgleichung, einer algebraischen Gleichung dritter Ordnung, die aber, wir bereits auf Seite 31 in Gleichung (1.116) gezeigt wurde, zu einer quadratischen Form vereinfacht werden kann.

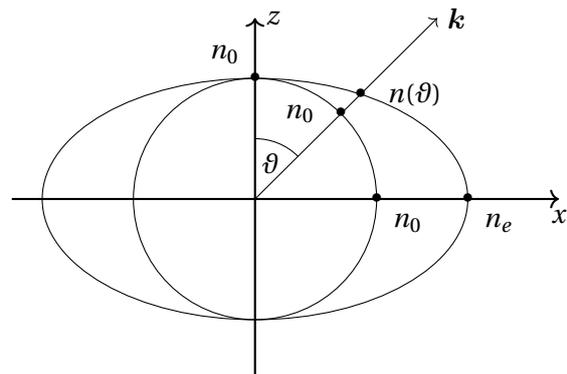
Im weiteren wird nun explizit die Einachsigkeit von der Einachsigkeit des Kristalls Gebrauch gemacht und außerdem genutzt, dass der Richtungsvektor  $\mathbf{u}$  o. B. d. A. nur zwei Komponenten hat

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{u_x^2}{1 - \frac{n_o^2}{n^2}} + \frac{u_z^2}{1 - \frac{n_e^2}{n^2}} \\ \left( 1 - \frac{n_o^2}{n^2} \right) \left( 1 - \frac{n_e^2}{n^2} \right) &= u_x^2 \left( 1 - \frac{n_e^2}{n^2} \right) + u_z^2 \left( 1 - \frac{n_o^2}{n^2} \right) \\ 1 - \frac{n_o^2}{n^2} - \frac{n_e^2}{n^2} + \frac{n_o^2 n_e^2}{n^4} &= 1 - u_x^2 \frac{n_e^2}{n^2} - u_z^2 \frac{n_o^2}{n^2} \\ \frac{n_o^2 n_e^2}{n^2} &= \underbrace{(1 - u_x^2)}_{=u_z^2} n_e^2 + \underbrace{(1 - u_z^2)}_{=u_x^2} n_o^2. \end{aligned} \quad (1.131)$$

Es ergibt sich eine Ellipsengleichung als die Normalenfläche des außerordentlichen Strahls

$$1 = \frac{n^2 u_x^2}{n_e^2} + \frac{n^2 u_z^2}{n_o^2}. \quad (1.132)$$

Das Ellipsoid des außerordentlichen Strahls berührt die Kugel des ordentlichen Strahls in der Richtung der Kristallachse (hier  $z$ -Achse), d. h. in Kristallen mit zwei gleichen Indizes gibt es nur eine optische Achse.



## 1.7 Die Polarisation Elektromagnetischer Felder

### 1.7.1 Polarisation ebener Wellen im homogenen Material

Dieses Kapitel handelt vom vektoriellen Charakter des elektromagnetischen Feldes. Es wird sich dabei auf ebene Wellen konzentriert, die sich im homogenen, nicht absorbierenden Material in  $z$ -Richtung ausbreiten. Das komplette (reelle) elektromagnetische Feld hat dann die Form:

$$\mathbf{E}_{\text{reell}}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)] \quad \text{mit } \mathbf{E}_0 \in \mathbb{C}^3 \quad \text{und } \mathbf{E}_0 \mathbf{k}_0. \quad (1.133)$$

Da eine Ausbreitung in  $z$ -Richtung o. B. d. A. vorausgesetzt werden kann, vereinfachen sich die beteiligten Vektoren zu

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \quad \text{und } \mathbf{E}_0 = \begin{pmatrix} E_x e^{i\varphi_x} \\ E_y e^{i\varphi_y} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } k, E_{x/y}, \varphi_{x/y} \in \mathbb{R}. \quad (1.134)$$

Wird dies in (1.133) eingesetzt, ergibt sich folgender Zeitverlauf des Vektors der elektrischen Feldstärke:

$$\mathbf{E}_{\text{reell}}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} E_x \cos(kz - \omega t + \varphi_x) \\ E_y \cos(kz - \omega t + \varphi_y) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x \cos(\Theta) \\ E_y \cos(\Theta - \delta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.135)$$

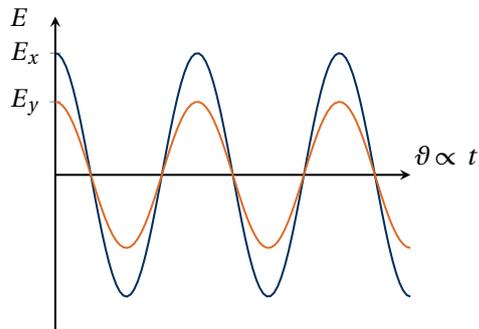
mit  $\Theta = \omega t - kz - \varphi_x$  und  $\delta = \varphi_y - \varphi_x$ . Während die Phase  $\Theta$  in Raum und Zeit variiert, bleibt  $\delta$  konstant und bestimmt die Phasenverschiebung zwischen den schwingenden  $x$  und  $y$ -Komponenten des elektrischen Feldes.

Der Polarisationszustand der elektromagnetischen Welle wird also durch einen zweidimensionalen komplexen Vektor, den *Jones Vektor* charakterisiert:

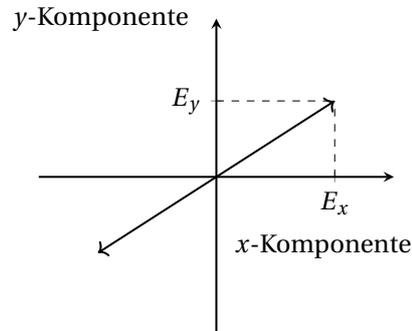
$$\mathbf{j} = \frac{1}{\sqrt{E_x^2 + E_y^2}} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y e^{i\delta} \end{pmatrix}. \quad (1.136)$$

Da der Betrag des Jones-Vektors keine Rolle spielt, wird er gewöhnlich auf 1 normiert. Im Folgenden wird der Zeitverlauf der Polarisation des elektrischen Feldes an einem festen Raumpunkt betrachtet, d. h. es wird  $\Theta$  variiert.

**Lineare Polarisation**  $\delta = 0, \mathbf{j} = \frac{1}{\sqrt{E_x^2 + E_y^2}} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$

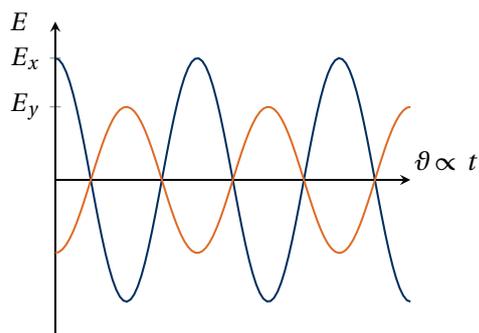


Zeitverlauf der elektrischen Feldkomponenten

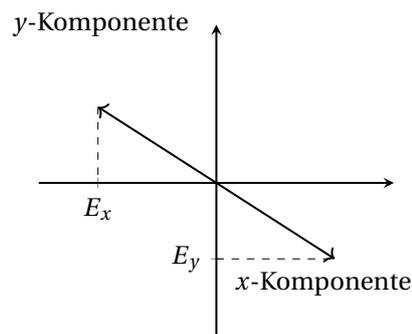


Kurve des Polarisationsvektors

**Lineare Polarisation**  $\delta = \pi, \mathbf{j} = \frac{1}{\sqrt{E_x^2 + E_y^2}} \begin{pmatrix} E_x \\ -E_y \end{pmatrix}$



Zeitverlauf der elektrischen Feldkomponenten



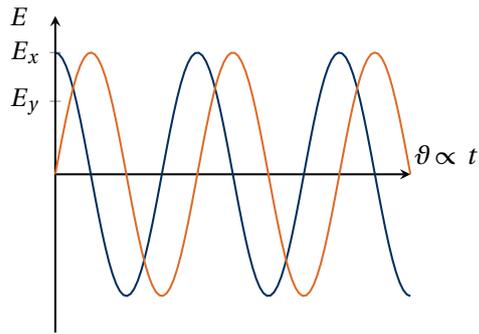
Kurve des Polarisationsvektors

**Zirkulare Polarisation**  $\delta = \pm \frac{\pi}{2}, E_x = E_y = E, \mathbf{j} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$

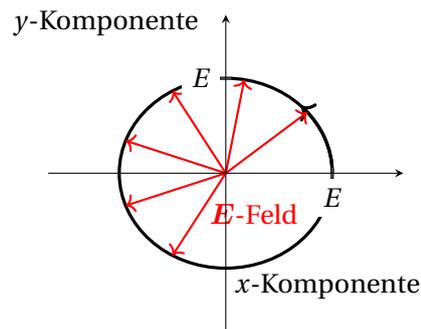
Das elektrische Feld nimmt folgende Form an:

$$\mathbf{E}_{\text{reell}}(\mathbf{r}, t) = E \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \\ \cos(\vartheta \mp \pi/2) \\ 0 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \\ \pm \sin(\vartheta) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.137)$$

Im folgenden ist linksdrehendes zirkular polarisiertes Licht für  $\delta = \pi/2$  dargestellt.



Zeitverlauf der elektrischen Feldkomponenten

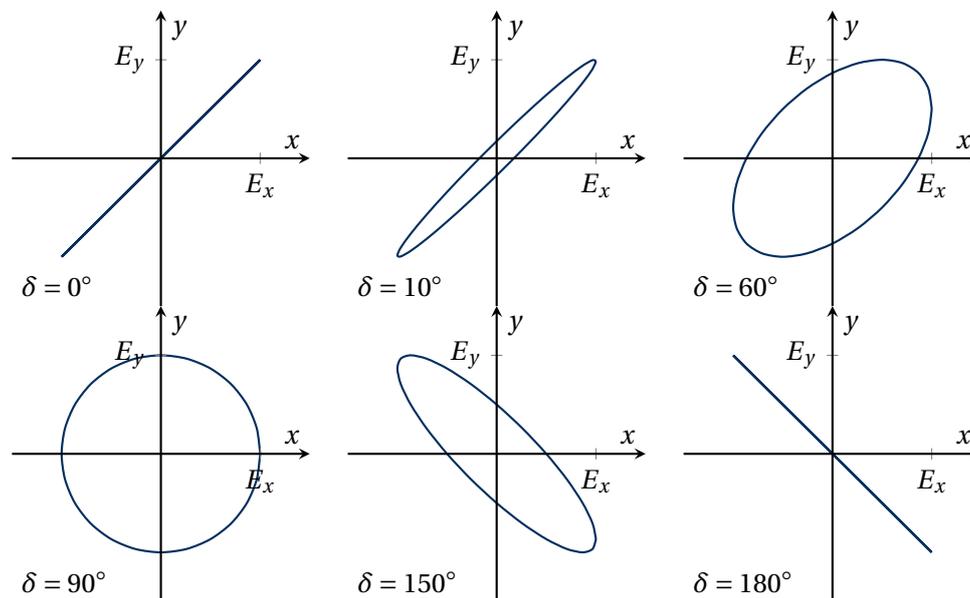


Kurve des Polarisationsvektors

**Elliptische Polarisation** alle restlichen Fälle.

Für  $0 < \delta < \pi$  : linksdrehend, für  $-\pi < \delta < 0$  : rechtsdrehend.

Im Folgenden sind Beispiele linksdrehenden, elliptisch polarisierten Lichts dargestellt.



Da jeder Polarisationszustand durch einen zweidimensionalen Jones-Vektor charakterisiert ist, können aus zwei Wellen unterschiedlicher Polarisation alle möglichen Polarisationszustände gebildet werden. So kann z. B. jeder Polarisationszustand als Summe von rechts und links zirkular polarisiertem Licht dargestellt werden.

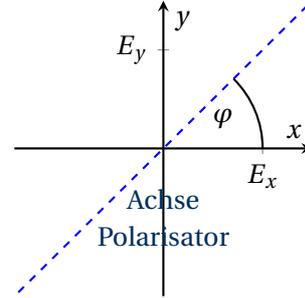
### 1.7.2 Polarisierende Elemente

#### Polarisatoren

Polarisatoren lassen nur linear in eine Richtung polarisiertes Licht durch. Die Wirkung eines in  $x$ -Richtung orientierten Polarisators auf einen Jones-Vektor wird durch eine Matrixoperation beschrieben

$$\mathbf{j}_{\text{out}} = \hat{M}_P \mathbf{j}_{\text{in}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{j}_{\text{in}}, \quad (1.138)$$

wobei auf die Normierung der Jones-Vektoren verzichtet wird. Um einen um einen Winkel  $\varphi$  gegenüber der  $x$ -Achse gedrehten Polarisator zu beschreiben, muss erst jede Komponente des Jones-Vektors auf die Achse des Polarisators projiziert und dann die resultierende Amplitude wieder im ursprünglichen Achsensystem dargestellt werden. Mathematisch entspricht dieser Prozess einer Drehung der Matrix  $\hat{M}_P$  um den Winkel  $\varphi$



$$\mathbf{j}_{\text{out}} = \hat{U}_\varphi^\dagger \hat{M}_P \hat{U}_\varphi \mathbf{j}_{\text{in}} = \hat{M}(\varphi) \mathbf{j}_{\text{in}} \quad (1.139)$$

$$\text{mit } \hat{U}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{M}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi \\ \sin \varphi \cos \varphi & \sin^2 \varphi \end{pmatrix} \quad (1.140)$$

#### $\lambda/4$ -Plättchen

Beim Durchgang durch das  $\lambda/4$ -Plättchen wird die Phase der zueinander orthogonalen Polarisationskomponenten um  $\pi/2$  oder um ein Viertel einer Wellenlänge gegeneinander verschoben. Verwendet wird hierzu ein doppelbrechendes Material. Ist das  $\lambda/4$ -Plättchen in die  $y$ -Richtung orientiert, so wird diese Polarisationsrichtung um  $\pi/2$  in der Phase verschoben oder die entsprechende Komponente des Jones-Vektors mit  $i$  multipliziert. Die Transfermatrix des  $\lambda/4$ -Plättchens ergibt sich im Jones-Kalkül zu:

$$\mathbf{j}_{\text{out}} = \hat{M}_{\lambda/4} \mathbf{j}_{\text{in}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \mathbf{j}_{\text{in}}. \quad (1.141)$$

Bei einer anderen Orientierung müssen wieder Drehmatrizen verwendet werden. Wird das in  $y$ -Richtung orientierte  $\lambda/4$ -Plättchen auf unter  $45^\circ$  polarisiertes Licht (gleiche  $x$  und  $y$ -Komponente) angewendet, entsteht links drehendes zirkular polarisiertes Licht:

$$\mathbf{j}_{\text{out}} = \hat{M}_{\lambda/4} \mathbf{j}_{\text{in}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}. \quad (1.142)$$

Genauso kann durch Anwendung eines  $\lambda/4$ -Plättchens zirkular polarisiertes Licht in linear polarisiertes Licht umgewandelt werden.

### $\lambda/2$ -Plättchen

Beim Durchgang durch das  $\lambda/2$ -Plättchen wird die Phase der zueinander orthogonalen Polarisationskomponenten um  $\pi$  oder um eine halbe Wellenlänge gegeneinander verschoben. Ist das  $\lambda/2$ -Plättchen in die  $y$ -Richtung orientiert, so wird diese Polarisationsrichtung um  $\pi$  in der Phase verschoben oder die entsprechende Komponente des Jones-Vektors mit  $-1$  multipliziert. Die entsprechende Transfermatrix im Jones-Kalkül ergibt sich zu:

$$\mathbf{j}_{\text{out}} = \hat{M}_{\lambda/2} \mathbf{j}_{\text{in}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{j}_{\text{in}}, \quad (1.143)$$

d. h. aus einem Polarisationsvektor der Form  $\mathbf{j}_{\text{in}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  entsteht ein an der  $x$ -Achse gespiegelter Vektor der Form  $\mathbf{j}_{\text{out}} = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$ . Das  $\lambda/2$ -Plättchen ändert den prinzipiellen Polarisationszustand nicht, bewirkt aber eine Spiegelung an einer bestimmten Achse. Es kann daher zur verlustfreien Änderung der Polarisationsrichtung linear polarisierten Lichtes oder zur Änderung des Drehsinns zirkular polarisierten Lichtes verwendet werden.

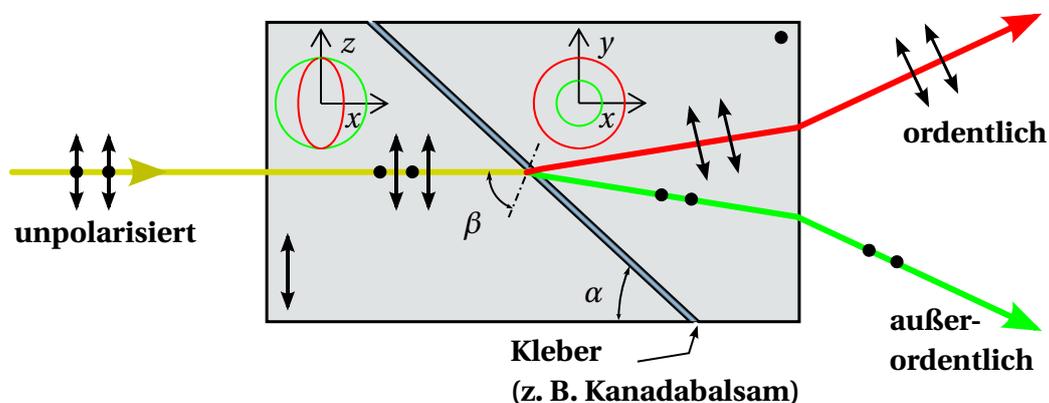
### 1.7.3 Anwendungen anisotroper Materialien

#### Polarisierende Elemente

Normale Polarisationsfilter bestehen aus Materialien, deren Absorption (gewöhnlich durch die Ausrichtung interner Molekülstrukturen) stark polarisationsabhängig ist. Mittels doppelbrechender Materialien lassen sich Strahlen auch entsprechend ihrer Polarisation auftrennen und damit z. B. auch eine extrem hohe Unterdrückung der ungewünschten Polarisation erzielen.

#### Polarisationstrennung mittels eines Wollaston-Prismas

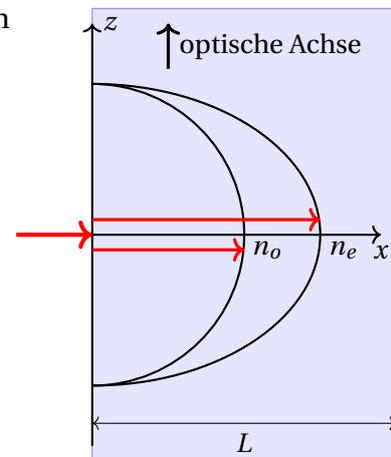
Im Wollaston-Prisma werden zwei einachsige Kristalle mit parallel zur Eintrittsfläche, aber gegenseitig um  $90^\circ$  verdrehten optischen Achsen verkittet. Damit durchlaufen einfallende Strahlen in Abhängigkeit von ihrer Polarisation zuerst ein effektiv hochbrechendes und danach ein niedrigbrechendes Material (grüner Strahl) oder umgekehrt (roter Strahl). Entsprechend werden die beiden Strahlen orthogonaler Polarisation in gegensätzliche Richtungen von der ursprünglichen Ausbreitungsrichtung weggebrochen.



### Realisierung von $\lambda/4$ - und $\lambda/2$ -Plättchen

Die phänomenologisch eingeführten  $\lambda/4$ - und  $\lambda/2$ -Plättchen werden mit Hilfe anisotroper Kristalle hergestellt. Gewöhnlich werden dazu einachsige Kristalle senkrecht zur optischen Achse geschnitten. Fällt Licht senkrecht auf die entstandene Grenzfläche, werden sowohl der ordentliche, als auch der außerordentliche Strahl angeregt. Beide breiten sich durch den Kristall mit unterschiedlichen Ausbreitungskonstanten aus und akkumulieren dabei eine Phasendifferenz, die im Fall des  $\lambda/4$  oder  $\lambda/2$ -Plättchens  $\pi/2$  oder  $\pi$  beträgt. Die dafür erforderliche Dicke des Kristalls ergibt sich z. B. im Fall des  $\lambda/2$ -Plättchens zu

$$L = \frac{\lambda}{2|n_o - n_e|} = \frac{\pi c}{\omega |n_o - n_e|} \quad (1.144)$$

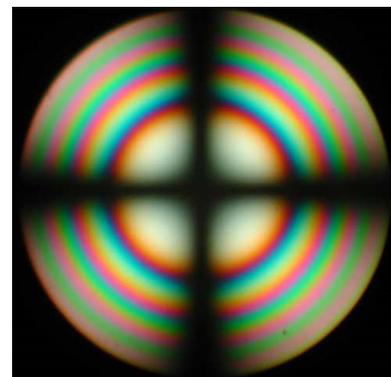


und ist damit in doppelter Hinsicht dispersiv und zwar durch die explizite Frequenzabhängigkeit und durch die Frequenzabhängigkeit der Doppelbrechung.

### Charakterisierung von Mineralien mittels Polarisationsmikroskopie

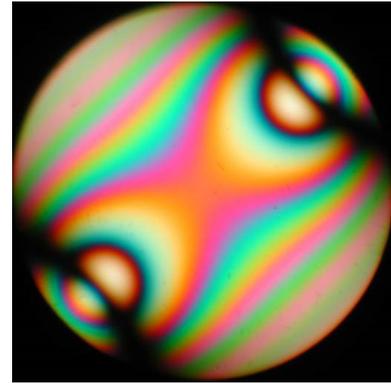
Die meisten Mineralien sind mikrokristallin, d. h. sie bestehen aus wenige Mikrometer großen, meistens anisotropen Kristallen. Bei Beleuchtung mit polarisiertem Licht und Beobachtung durch einen auf Auslöschung gedrehten Polarisator werden durch die Mikrokristallite induzierte Polarisationsdrehungen sichtbar.

Da Phänomene der Doppelbrechung frequenzabhängig sind, kommt es zusätzlich zu intensiven Farberscheinungen, die zur Charakterisierung der Mikrokristallite bzgl. Material, Orientierung und Dicke verwendet werden können. Rechts im Bild wird die Transmission eines senkrecht zur optischen Achse geschnittenen einachsigen Kristalls im divergenten Weißlicht bei gekreuzter Polarisation gezeigt ([homepage.ruhr-uni-bochum.de/olaf.medenbach](http://homepage.ruhr-uni-bochum.de/olaf.medenbach)).



Jeder Punkt des Bildes entspricht einer Durchstrahlungsrichtung des Kristalls. Das dunkle Kreuz bestehend aus den sogenannten Isogyren stimmt in seiner Orientierung mit den Orientierungen der beiden Polarisatoren überein. In seinem Zentrum befindet sich die optische Achse. Auf der Linie des dunklen Kreuzes wird entweder der ordentliche oder der außerordentliche Strahl angeregt, aber keine Mischung von beiden. Da ordentlicher und außerordentlicher Strahl unverändert durch den Kristall propagieren, werden sie am Ausgang im gekreuzten Polarisator ausgelöscht. Außerhalb des dunklen Kreuzes werden ordentlicher und außerordentlicher Strahl gemeinsam angeregt, wobei sich ihre relative Phasenlage und damit auch der resultierende Polarisationszustand während der Propagation durch den Kristall permanent ändert. Auslöschung in gekreuzter Polarisation tritt nur noch auf konzentrischen Kreisen auf, für die die induzierte Phasendifferenz ein Vielfaches von  $2\pi$  beträgt.

Da die induzierte Phasendifferenz, wie oben diskutiert, stark frequenzabhängig ist, kommt es zu Farberscheinungen. Bei schiefem Schnitt des Kristalls verschiebt sich das Kreuz der Auslöschung, bei zweiachsigen Kristallen sind zwei dunkle Kreuze im Winkelabstand der beiden optischen Achsen zu sehen. Rechts ist die Transmission eines zweiachsigen Kristalls zwischen gekreuzten Polarisatoren dargestellt. Die beiden optischen Achsen sind am linken unteren und rechten oberen Bildrand zu sehen.



### Spannungsdoppelbrechung

Wird der Kristall aufgrund interner mechanischer Spannungen deformiert, dann ändert sich die Dielektrizitätskonstante des Materials und es wird eine Doppelbrechung induziert. Dabei ist die spannungsinduzierte Änderung des dielektrischen Tensors  $\Delta\hat{\epsilon}$  proportional zum Spannungstensor  $\hat{\sigma}$ , der die negative Krafteinwirkung beschreibt, die bei einem Schnitt an der Schnittfläche entsteht, bezogen auf die Schnittfläche.

Die inneren Spannungen im Kristall können mit gekreuzten Polarisatoren durch Farbmuster sichtbar gemacht werden:

- Hohe Transmission: Polarisationsdrehung wie bei einem  $\lambda/2$ -Plättchen.
- Niedrige Transmission: Phasendifferenz zwischen den orthogonalen Polarisationen ist ein Vielfaches von  $2\pi$  für die entsprechende Wellenlänge.

Des Weiteren kann eine Doppelbrechung auch durch Anlegen einer elektrischen Spannung induziert werden. Dabei verhält sich die Doppelbrechung linear zum angelegten elektrischen Feld

$$\Delta n = n_0^3 \cdot r_{\text{eff}} E \quad \text{mit } r_{\text{eff}} - \text{elektro-optischer Tensor,} \quad (1.145)$$

und tritt fast verzögerungsfrei auf. Dieser Effekt wird *Pockels Effekt* genannt und wird beispielsweise in Pockels-Zellen genutzt, um gezielt Polarisationsdrehungen zu induzieren. Damit lässt sich beispielsweise ein elektrisch gesteuerter optischer Schalter bauen, womit die Kopplung von Licht in und aus einem Laserverstärker gesteuert werden kann.

## 2 Geometrische Optik

Das Ziel der geometrischen Optik ist es, Abbildungseigenschaften optischer Systeme (Linsen, Spiegel, Freiraum) beschreiben zu können.

Dafür werden einige *Annahmen* getroffen:

Die Feldausbreitung in optischen Systemen kann auf die Propagation einer Vielzahl einzelner Strahlen zurückgeführt werden. Jeder Strahl  $i, i = 1, \dots, N$  transportiert eine feste optische Leistung  $P_i$  und verhält sich, obwohl er als unendlich dünn angenommen wird, wie eine im gleichen Medium propagierende ebene Welle.

In wie fern diese Annahmen berechtigt sind, wird später bei der Behandlung von Beugungsphänomenen diskutiert.

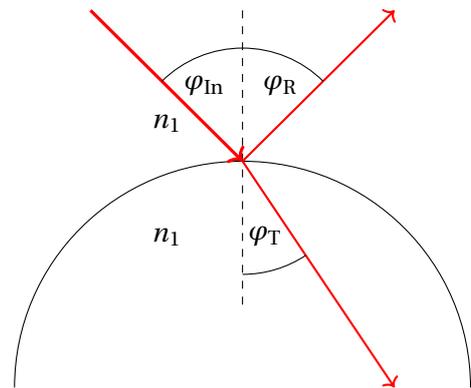
Aus den Annahmen ergeben sich einige *Konsequenzen*:

Jeder Strahl ist lokal charakterisiert durch

- eine komplexe Amplitude  $u_i$  mit  $|u_i|^2 = P_i$
- eine Ausbreitungsrichtung, die durch einen Wellenzahlvektor  $\mathbf{k}_i$ , der auch für die Phasenakkumulation verantwortlich ist,
- eine lokale Polarisation, charakterisiert durch einen zweidimensionalen Jones  $\mathbf{j}_i$  Vektor

Im homogenen isotropen Medium verändert sich der Strahl bis auf eine Phasenakkumulation während der Ausbreitung nicht. An Grenzflächen folgt er lokal dem Brechungs- und Reflexionsgesetz ebener Wellen.

Tatsächlich folgt das Design heutiger optischer Systeme, aber auch die simulation von Bildeindrücken in Computerspielen fast ausschließlich diesen Prinzipien. Das dabei angewendete Verfahren wird als Raytracing bezeichnet. Sehr oft werden zur Reduktion des Rechenaufwandes noch weitere Vereinfachungen angewandt (Vernachlässigung von Polarisation, Phasenevolution oder Reflexion).



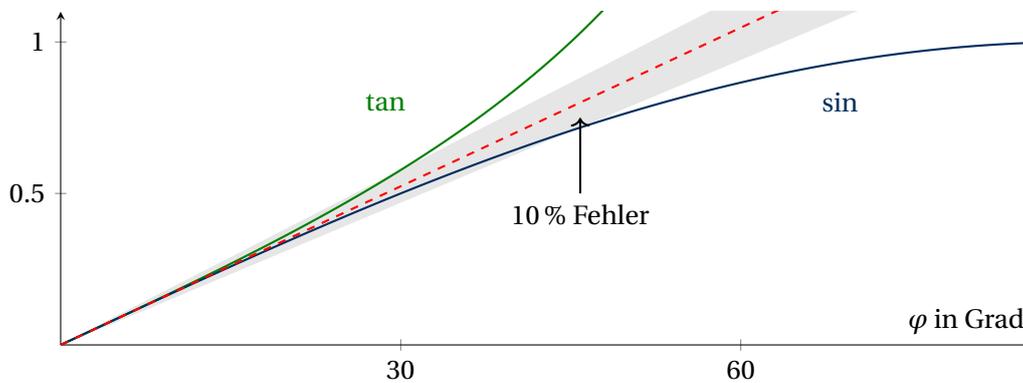
## 2.1 Gaußsche Optik

### 2.1.1 Idee der Matrizenoptik

Das Ziel ist ein analytisches, strahlenoptisches Verfahren zum Systemdesign. Dazu werden nur die Richtungen von Strahlen und lokale Brechungsgesetze berücksichtigt. Die Voraussetzungen dafür sind:

- Rotationssymmetrie (Existenz einer Rotationsachse = optische Achse)
- Strahlen liegen mit der optischen Achse in der Ebene
- kleine Winkel zur optischen Achse (Paraxialität) und zu den Normalen von Grenzflächen.

Die ersten beiden Voraussetzungen dienen zur Reduktion des ehemals dreidimensionalen Problems auf ein zweidimensionales System.

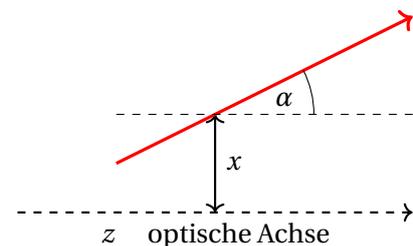


**Fig. 10:** Abweichung der linearen Näherung (Paraxialität) zum Tangens und Sinus.

Kleine Winkel werden gebraucht, um eine Ersetzung  $\sin \varphi \approx \tan \varphi \approx \varphi$  vornehmen zu können. Bis zu einem Winkel von ca.  $30^\circ$  liegt der dadurch entstehende Fehler unter 10%.

Im Folgenden wollen wir einen Strahl durch folgende Größen beschreiben:

- Abstand zur optischen Achse  $x$
- Winkel zur optischen Achse  $\alpha$
- Zweivektor  $\mathbf{s} = \begin{pmatrix} x \\ n\alpha \end{pmatrix}$  mit Brechungsindex  $n$



### Translation im Raum um die Strecke L

Bewegt sich der Strahl durch den freien Raum um die Strecke  $L$  (Anteil entlang der optischen Achse), dann bleibt der Winkel  $\alpha$  gleich und für den Abstand  $x$  gilt  $x(z_0 + L) = x(z_0) + L \tan \alpha \approx x(z_0) + L\alpha$ . Somit lässt sich eine Darstellung für die Transfermatrix  $\hat{T}$  finden:

$$\mathbf{s}_{\text{out}} = \hat{T} \mathbf{s}_{\text{in}} \quad \text{mit} \quad \hat{T} = \begin{pmatrix} 1 & L/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

### Veränderung des Strahlparameters an einer Kugelfläche

Nach dem Brechungsgesetz gilt  $n_1 \sin \varphi_{\text{In}} = n_2 \sin \varphi_{\text{T}}$ . Aus der nebenstehenden Zeichnung lassen sich folgende Beziehungen ablesen:  $\varphi_{\text{In}} = \alpha_1 + \vartheta$ ,  $\varphi_{\text{T}} = \alpha_2 + \vartheta$ . Werden diese nun in das Brechungsgesetz eingesetzt, ergibt sich:

$$n_2 \alpha_2 = n_1 \alpha_1 + \frac{n_1 - n_2}{r} x. \quad (2.2)$$

Wird zudem angenommen, dass durch die Brechung an der Kugelfläche der Abstand zur optischen Achse gleich bleibt  $x_1 = x_2$  folgt für die Transfermatrix  $\hat{\mathbf{R}}_{12}$

$$\mathbf{s}_{\text{out}} = \hat{\mathbf{R}}_{12} \mathbf{s}_{\text{In}} \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{R}}_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k_{12} & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

mit der Brechkraft  $k_{12} = \frac{n_2 - n_1}{r}$ . Entsprechend der Konvention wird die Rechnung von links nach rechts ausgeführt. Zudem handelt es sich um einen positiven (negativen) Krümmungsradius, wenn der Krümmungsmittelpunkt rechts (links) von der Grenzfläche liegt.

#### 2.1.2 Linse

Eine Linse besteht aus zwei Außenflächen und einem Zwischenraum. Der Parameter  $L$  charakterisiert die Dicke der Linse und bezeichnet den Abstand der Schnittpunkte der Linsenflächen und der optischen Achse (Vertices). Die Transfermatrizen  $\hat{\mathbf{R}}_{12}, \hat{\mathbf{R}}_{23}$  für die Kugelflächen entstammen Gleichung (2.3) und für  $\hat{\mathbf{T}}$  wird (2.1) verwendet. Es ergibt sich also eine Transfermatrix der Linse in folgender Form:

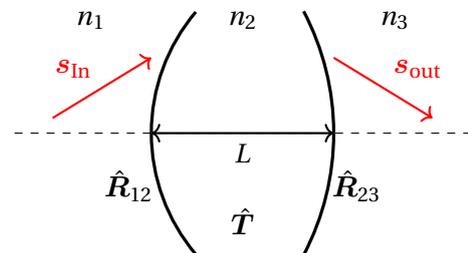
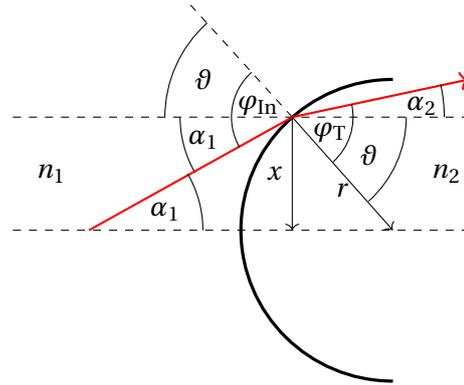
$$\hat{\mathbf{M}} = \hat{\mathbf{R}}_{23} \hat{\mathbf{T}} \hat{\mathbf{R}}_{12} = \begin{pmatrix} 1 - k_{12} \frac{L}{n_2} & \frac{L}{n_2} \\ -(k_{12} + k_{23}) + k_{12} k_{23} \frac{L}{n_2} & 1 - k_{23} \frac{L}{n_2} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Für eine dünne Linse  $L \ll r$  lässt sich  $L = 0$  approximieren und es ergibt sich

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(k_{12} + k_{23}) & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Da es sich um eine Linse handelt, sollten parallele Lichtstrahlen im Abstand  $f$  (Brennweite) auf einen Punkt fokussiert werden. Ein paralleler Strahl nimmt als Vektor die Form  $\mathbf{s}_{\text{In}} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$  an. Für den Strahl hinter der Linse folgt also

$$\mathbf{s}_{\text{hinter Linse}} = \hat{\mathbf{M}} \mathbf{s}_{\text{In}} = \begin{pmatrix} x \\ -(k_{12} + k_{23})x \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$



Erfolgt nun noch eine Translation um die Brennweite  $f$  folgt

$$\mathbf{s}_{\text{out}} = \hat{\mathbf{T}} \mathbf{s}_{\text{hinter Linse}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{f}{n_3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -(k_{12} + k_{23})x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 - (k_{12} + k_{23})\frac{f}{n_3} \\ -(k_{12} + k_{23}) \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Wenn der Strahl die Achse bei  $f$  schneiden soll ( $x = 0$ ), muss  $1 - (k_{12} + k_{23})\frac{f}{n_3}$  gelten. Damit ist die Brennweite durch

$$f = \frac{n_3}{k_{12} + k_{23}} \quad (2.8)$$

gegeben. Von jetzt an wird Luft ( $n = 1$ ) außerhalb der optischen Elemente vorausgesetzt. Die Transfermatrix der dünnen Linse kann damit durch ihre Brennweite  $f$  ausgedrückt werden als:

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

### Test der Linseneigenschaften

- Parallelstrahlen werden zu Brennpunktstrahlen (wie bereits gezeigt)
- Brennpunktstrahlen werden zu Parallelstrahlen (einfache Inversion des schon durchgerechneten Strahlenganges)
- Mittelpunktstrahlen  $\mathbf{s}_{\text{In}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$  bleiben unbeeinflusst:

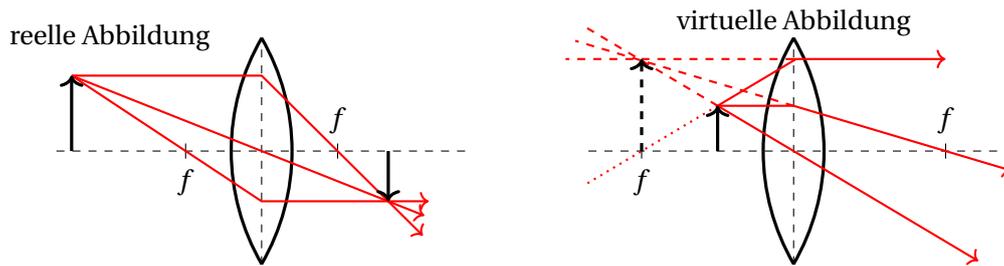
$$\mathbf{s}_{\text{hinter Linse}} = \hat{\mathbf{M}} \mathbf{s}_{\text{In}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \mathbf{s}_{\text{In}}. \quad (2.10)$$

### 2.1.3 Abbildungen

#### Geometrische Konstruktion für dünne Linsen

Bei einer Abbildung wird angenommen, dass sich alle unter einem beliebigen Winkel von einem Objektpunkt ausgehenden Strahlen in einem Bildpunkt treffen (reelles Bild), oder nur der Eindruck entsteht, als würden alle Strahlen von einem gemeinsamen Schnittpunkt ausgehen (virtuelles Bild). Geometrischen Konstruktionen der Abbildung an dünnen Linsen werden real aber nur für drei Strahlen, deren Verlauf durch dünne Linsen bekannt ist, durchgeführt:

- Mittelpunktstrahl: verläuft ungebrochen durch das Linsenzentrum
- Parallelstrahl: verläuft vor der Linse parallel zur optischen Achse und wird nach Durchgang durch die Linse zum Brennpunktstrahl.



**Fig. 11:** Befindet sich das Objekt außerhalb der Brennweite so entsteht ein reelles Bild auf der Bildseite. Liegt das Objekt innerhalb der Brennweite entsteht ein virtuelles Bild auf der Objektseite.

- **Brennpunktstrahl:** verläuft durch den objektseitigen Brennpunkt und wird nach Durchgang durch die Linse zum Parallelstrahl.

Alle drei Strahlen gehen von einem Objektpunkt aus und schneiden sich hinter der Linse im Bildpunkt (reelles Bild). Tritt kein Schnittpunkt hinter der Linse auf, werden die Strahlen rückwärtig bis zu einem Schnittpunkt auf der Objektseite verlängert (virtuelles Bild).

### Mathematische Konstruktion

Das Ziel ist, dass alle Strahlen  $\mathbf{s}_{\text{In}} = \begin{pmatrix} x_{\text{In}} \\ \alpha_{\text{In}} \end{pmatrix}$  unabhängig vom Emissionswinkel  $\alpha_{\text{In}}$  auf einen

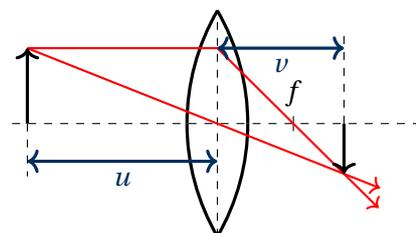
Bildpunkt  $x_{\text{out}}$  fokussieren  $\mathbf{s}_{\text{out}} = \begin{pmatrix} x_{\text{out}} \\ \alpha_{\text{out}} \end{pmatrix}$ . Es gilt:

$$\mathbf{s}_{\text{out}} = \begin{pmatrix} x_{\text{out}} \\ \alpha_{\text{out}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\text{In}} \\ \alpha_{\text{In}} \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Da  $x_{\text{out}}$  nicht von  $\alpha_{\text{In}}$  abhängen soll, muss  $B = 0$  gelten. In diesem Fall gilt  $x_{\text{out}} = Ax_{\text{In}}$ , d. h.  $A$  ist der Abbildungsmaßstab.

### Abbildung durch eine dünne Linse

Liegt das Objekt einen Abstand  $u > 0$  vor der Linse, muss auch hinter der Linse ein Abstand  $v$  eingefügt werden, um eine Matrix zu erhalten, die die Abbildungsbedingung erfüllt (die Größen der Freiräume  $u$  und  $v$  werden wieder positiv gezählt, wenn Objekt und Bild rechts bzw. links von der Linse liegen). Die Matrix des Gesamtsystems ergibt sich zu:



$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{v}{f} & u + v - \frac{uv}{f} \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{u}{f} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Die Bedingung für eine Abbildung ( $B = 0$ ) ergibt  $u + v - \frac{uv}{f} = 0$  oder

$$\boxed{\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}}. \quad (2.13)$$

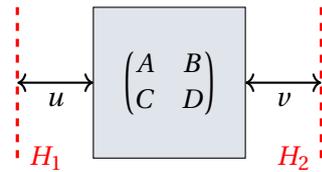
Der Abbildungsmaßstab entspricht  $A$  in der ABCD-Matrix und damit

$$\boxed{A = 1 - \frac{v}{f} = \frac{f}{f - u}}. \quad (2.14)$$

Er ist für reelle Bilder ( $u > f$ ) und ( $v > f$ ) negativ, d. h. das Bild steht auf dem Kopf. Die hier abgeleiteten Beziehungen gelten genauso für Zerstreuungslinsen ( $f < 0$ ) und virtuelle Abbildungen ( $v < 0$ ).

### 2.1.4 Hauptebenen

Das Ziel der Einführung von Hauptebenen ist es, beliebige Linsensysteme durch *eine* effektive "dünne Linse" zu ersetzen. Dabei wird links und rechts vom optischen System Freiraum hinzugefügt, bis die entstehende Gesamtmatrix der der dünnen Linse entspricht. Das Gesamtsystem (Linsensystem + Freiraum) wirkt zwischen den sogenannten *Hauptebenen* wie eine dünne Linse.



Die Größe des Freiraums wird hier positiv gezählt, wenn die entsprechenden Hauptebenen außerhalb des optischen Systems liegen.

Es ergibt sich nun folgende Gesamtmatrix des Systems:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + vC & Au + B + uvC + vD \\ C & Cu + D \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Es muss also  $1 = A + vC$  und  $1 = Cu + D$  gelten. Damit ergibt sich die Lage der Hauptebenen zu

$$\boxed{v = \frac{1 - A}{C}} \quad \text{und} \quad \boxed{u = \frac{1 - D}{C}} \quad (2.16)$$

und die effektive Brennweite des Gesamtsystems zu  $f = -\frac{1}{C}$ .

Da  $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = 1$  gilt, muss  $Au + B + uvC + vD = 0$  gelten.

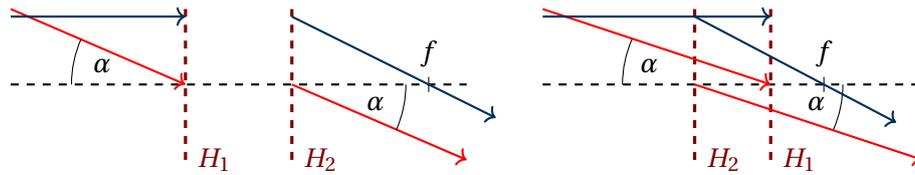
In GAUSS'scher Approximation sind also alle optischen Systeme (auch z. B. dicke Linsen oder Linsensysteme) auf dünne Linsen abbildbar.

*Merke:* Da dünne Linsen perfekt abbilden, ermöglicht in der GAUSS'schen Optik jedes System spätestens nach Hinzufügen von Freiraum eine perfekte Abbildung

### Geometrische Konstruktion mit Hauptebenen

Bei der geometrischen Konstruktion mit Hauptebenen werden die bekannten Konstruktionsvorschriften für dünne Linsen verwendet, der Raum zwischen den Hauptebenen wird ignoriert. Da sich auch ein negativer Zwischenraum ergeben kann, kann die Ausgangsebene ( $H_2$ ) auch vor der Eingangsebene ( $H_1$ ) liegen.

*Merke:* Da die zwei Hauptebenen im Prinzip Vorder- und Rückseite einer dünnen Linse repräsentieren, werden Objekte, die in einer der Hauptebenen liegen, stets im Maßstab 1 : 1 in die andere Hauptebene abgebildet.



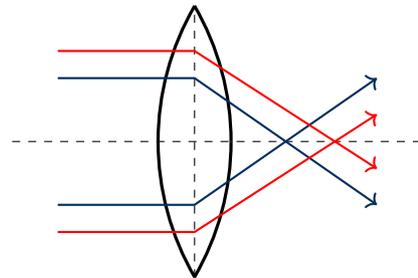
**Fig. 12:** Geometrische Konstruktion des Strahlenverlaufs durch ein optisches System mithilfe von Hauptebenen.

## 2.2 Abbildungsfehler

Eine perfekte Abbildung ist nur für sehr wenige optische Systeme (flacher Spiegel und applanatisches Objektiv) möglich. In der Realität treten immer Abbildungsfehler auf.

### 2.2.1 Farbfehler (Chromatische Aberration)

Die Brennweite  $f = \frac{1}{n-1} \frac{1}{1/r_1 - 1/r_2}$  hängt von der Brechzahl und diese wiederum von der Wellenlänge ab. Für unterschiedliche Farben entsteht daher das Bild in unterschiedlichen Ebenen. Da Glas im optischen Bereich normal dispersiv ist, wird blaues Licht stärker gebrochen als rotes. Die Bildebene für Blau liegt vor der für Rot.



*Korrekturmöglichkeiten* der chromatischen Aberration:

- Kombination unterschiedlicher Gläser in Sammell- und Zerstreuungslinsen
- Spiegel besitzen keine chromatische Abberation
- Diffraktive Elemente, in denen die Strahlablenkung an Gitterstrukturen durch Beugung realisiert wird besitzen gewöhnlich die zum Glas inverse Dispersion

### 2.2.2 Abbildungsfehler für monochromatisches Licht

In GAUSS'scher Approximation, d. h. für paraxiale Strahlen gibt es von Beugungseffekten abgesehen, keine Abbildungsfehler. Es werden jedoch optische Systeme mit großen Öffnungswinkeln benötigt, um Beugungseffekte zu minimieren und hohe Lichtstärken zu erreichen.

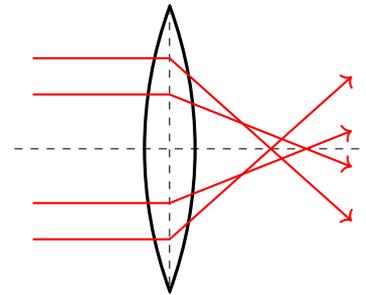
Die mathematische Ursache der Abbildungsfehler ist die Näherung  $\sin \alpha \approx \alpha$ , welche mathematisch zur perfekten Abbildung wird. Tatsächlich handelt es sich dabei nur um das erste Glied der Taylor-Entwicklung vom Sinus:

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{1}{3!} \alpha^3 + \frac{1}{5!} \alpha^5 - \dots \quad (2.17)$$

Höhere Terme in der Entwicklung der Winkelfunktionen führen zu Abbildungsfehlern.

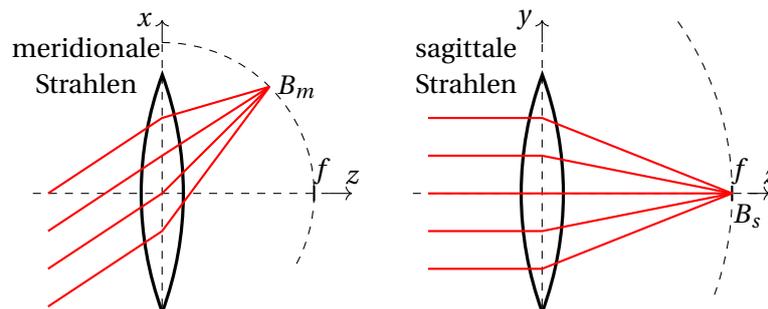
### Sphärische Aberration

Die Brennweite von Kugellinsen variiert mit dem Abstand zur optischen Achse. Achsenferne Strahlen haben eine kürzere Brennweite als achsennahe Strahlen. Als Konsequenz werden Parallelstrahlen mit verschiedenem Abstand zur optischen Achse nicht auf einen Punkt fokussiert.



### Astigmatismus

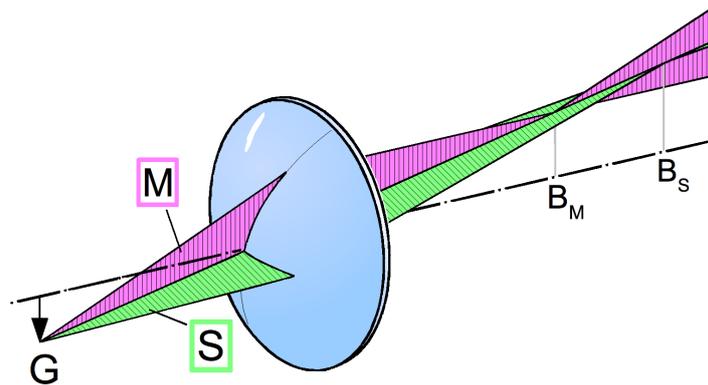
Als Astigmatismus wird eine Störung der Fokussierung von Strahlenbündeln, die sich unter einem erheblichen Winkel quer zur optischen Achse ausbreiten. Ein Bündel von parallelen Strahlen, die in der Einfallsebene liegen (meridionale Strahlen) "sieht" eine gedrehte Linse, die auf die Strahlrichtung projiziert eine höhere Dicke und damit einen kleineren Krümmungsradius aufweist. Da in erster Näherung die Brennweite nur vom Krümmungsradius abhängt und damit für meridionale Strahlen deutlich reduziert ist, fokussieren diese an einem entsprechend gedrehten Brennpunkt in reduzierter Brennweite. Im Gegensatz dazu "sieht" ein Strahlenbündel, das senkrecht zur Einfallsebene orientiert ist (sagittaler Strahl), zwar ebenfalls eine effektiv dickere Linse, aber keinen reduzierten Krümmungsradius. Für den sagittalen Strahl bleibt die Brennweite daher in etwa gleich.



Sagittale und meridionale Strahlen fokussieren daher in unterschiedlichen Abständen von der Linse. Ein gegenüber der optischen Achse geneigtes zylinderförmiges Bündel paralleler Strahlen, das ja sowohl aus sagittalen als auch meridionalen Strahlen besteht, bildet hinter der Linse an keiner Stelle einen perfekten, d. h. punktförmigen Fokus. Der Fokus ist also stets elliptisch, wobei die Halbachse dieser Ellipse der Fokussierung von sagittalen und meridionalen Strahlen folgen.

### Koma

Koma entsteht durch die gemeinsame Wirkung von Astigmatismus (Verwendung schräger Strahlen) und Öffnungsfehlern (Verwendung der gesamten Linse). Die schon beim Astigmatismus auftretende elliptische Verzeichnung des Fokus wird durch die sphärischen Aberrationen noch tröpfchenförmig verzerrt.



**Fig. 13:** Objekte, die außerhalb der optischen Achse liegen, werden unscharf abgebildet. Ursache sind die verschiedenen Brennweiten in der Meridional- und Sagittalebene (von Michael Schmid, CC BY-SA 3.0, [commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4799508](https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4799508))

### Feldkrümmung

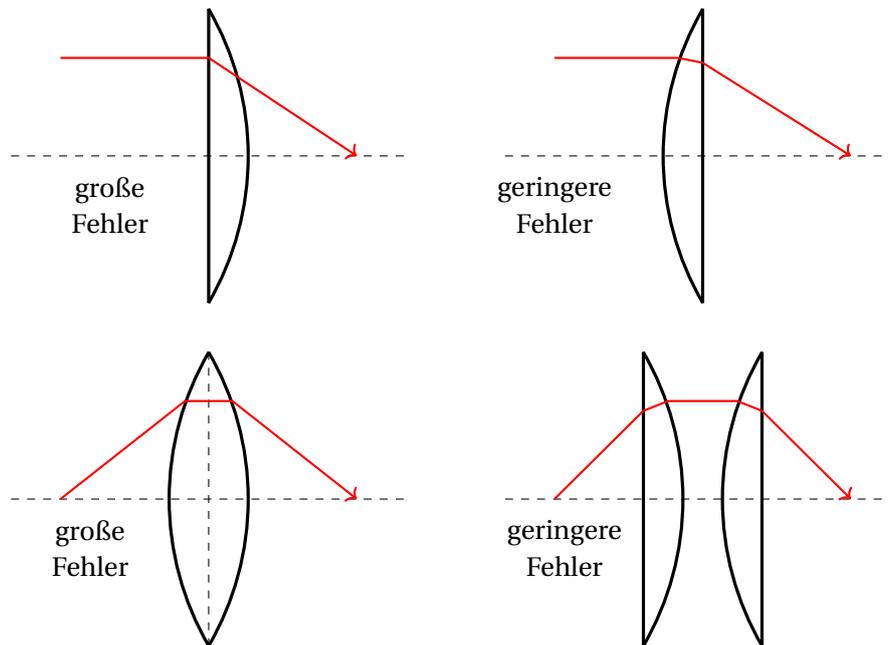
Das Bildfeld ist keine Ebene, sondern eine gekrümmte Fläche. Bei Fokussierung auf eine Ebene werden daher Bildbereiche unscharf.

### Verzerrung

Selbst moderne kommerzielle Objektive bilden Objekte in verschiedenen Bildbereichen oft nicht exakt im gleichen Maßstab ab, was zu globalen Verzerrungen und einer nicht maßstabs- und winkeltreuen Abbildung führt.

### Korrektur von Abbildungsfehlern

- Kompensation von Verzerrungen durch elektronische Nachbearbeitung
- Verwendung von Asphären, d. h. speziell an den gewünschten Strahlengang angepassten Oberflächen. Meistens handelt es sich um Paraboloiden. Asphären sind in der Herstellung meistens sehr teuer.
- Kompensation durch Kombination von Sammell- und Zerstreuungslinsen mit Abbildungsfehlern unterschiedlichen Vorzeichens.
- Vermeidung schräger Einfallswinkel auf brechende Flächen. Verteilung der Strahlenkung auf möglichst viele Oberflächen.
- Verwendung verzeichnungsfreier (aplanatischer Abbildungen)

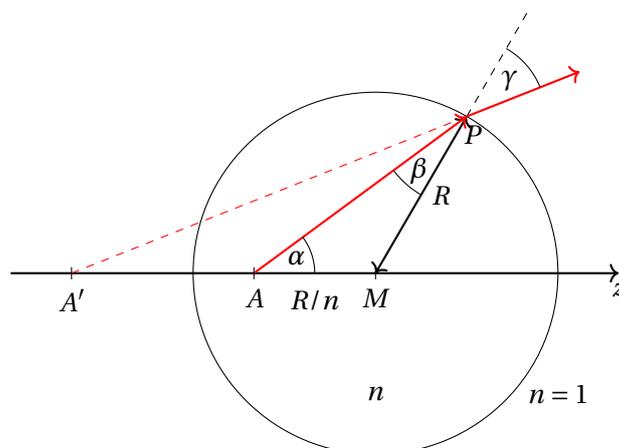


**Fig. 14:** Oben und unten sind jeweils zwei Durchgänge durch ein Linsensystem dargestellt, welche jeweils strahlenoptisch entlang des gleichen Weges verlaufen allerdings treten für die linke Seite jeweils größere Abbildungsfehler auf. Als Fausretel lässt sich merken, dass eine größere Anzahl an Brechungen mit jeweils kleinere Winkeln vorteilhaft ist.

## 2.3 Aplanatische Objektive

Es gibt einige spezielle Oberflächen, die für ausgewählte Objektpunkte eine im Rahmen der Strahlenoptik ideale Abbildung ermöglichen. Im Folgenden soll eine solche vorgestellt werden.

Es wird behauptet, dass ein im Abstand  $R/n$  innerhalb einer Kugel mit Brechungsindex  $n$  und Radius  $R$  platzierter Punkt  $A$  ideal abgebildet wird, d. h. sämtliche Strahlen scheinen nach Passieren der Außenfläche der Kugel von einem einzigen Punkt  $A'$  zu kommen.



Zum Beweis dieser Behauptung wird der Sinussatz auf das Dreieck  $AMP$  angewendet:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n. \quad (2.18)$$

Außerdem muss an der Grenzfläche der Kugel das Brechungsgesetz gelten:  $\sin \gamma = n \sin \beta$ . Nach ineinander einsetzen der obigen Ausdrücke ergibt sich  $\sin \alpha = \sin \gamma$ . Im Winkelbereich  $|\alpha| < 90^\circ$ , für den diese Betrachtung gelten soll, gilt damit  $\alpha = \gamma$ . In diesem Winkelbereich müssen aber auch, da  $\gamma$  gleich dem Winkel  $A'PM$  ist, die beiden Dreiecke  $APM$  und  $A'PM$  zueinander ähnlich sein. Damit gilt:

$$\frac{\overline{A'M}}{\overline{MP}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{AM}} \quad \text{oder} \quad \overline{A'M} = nR. \quad (2.19)$$

Die Position des Bildpunktes  $A'$  hängt also nicht vom speziellen Strahlengang, d. h. vom Winkel  $\alpha$  ab. Damit scheint jeder vom Punkt  $A$  im Bereich  $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$  ausgehende Strahl von  $A'$  zu kommen.

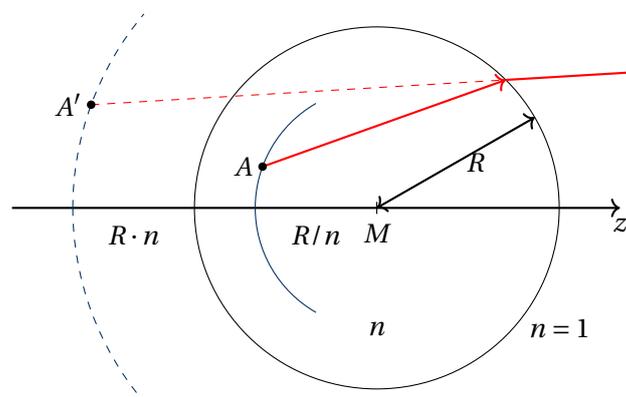
Da die Kugel rotationssymmetrisch ist, werden zwei Kugelschalen zentriert um den Kugelmittelpunkt strahlenoptisch exakt virtuell aufeinander abgebildet. Die Bildentstehung entspricht der mathematischen Spiegelung am Kreis. Dabei kommt es zu einer Vergrößerung um den Faktor  $n^2$ . Werden in der Kugel noch Strahlen bis zum Winkel  $\alpha_{\max}$  weitergeleitet, entspricht das einer numerischen Apertur von

$$NA_{\text{Kugel}} = n \sin \alpha_{\max}. \quad (2.20)$$

Ein nachgeschaltetes Objektiv empfängt diese Strahlen höchstens unter dem Winkel  $MA'P$ , der wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke gleich  $\beta_{\max}$  ist. Das nachgeschaltete Objektiv benötigt also nur noch eine numerische Apertur von

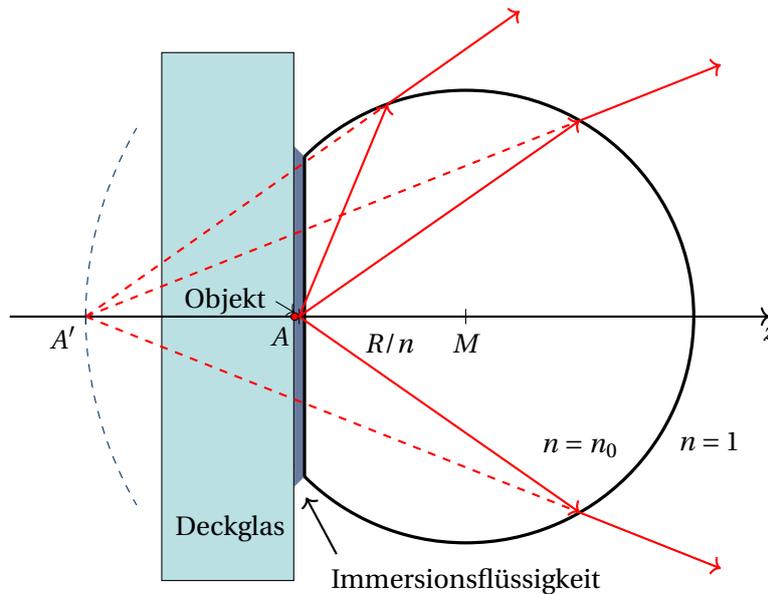
$$NA_{\text{Objektiv}} = \sin \beta_{\max} = \frac{1}{n} \sin \alpha_{\max} = \frac{1}{n^2} NA_{\text{Kugel}}, \quad (2.21)$$

d. h. die numerische Apertur des gesamten Objektivs hat sich um den Faktor  $n^2$  formal erhöht.



Nun erscheint diese Art der Abbildung eher akademischer Natur zu sein, vor allem da das abzubildende Objekt innerhalb der Glaskugel liegt und die Abbildung nur virtuell ist. Tatsächlich wird jedoch die obige Abbildungsvorschrift verwendet, um Mikroskopobjektive mit

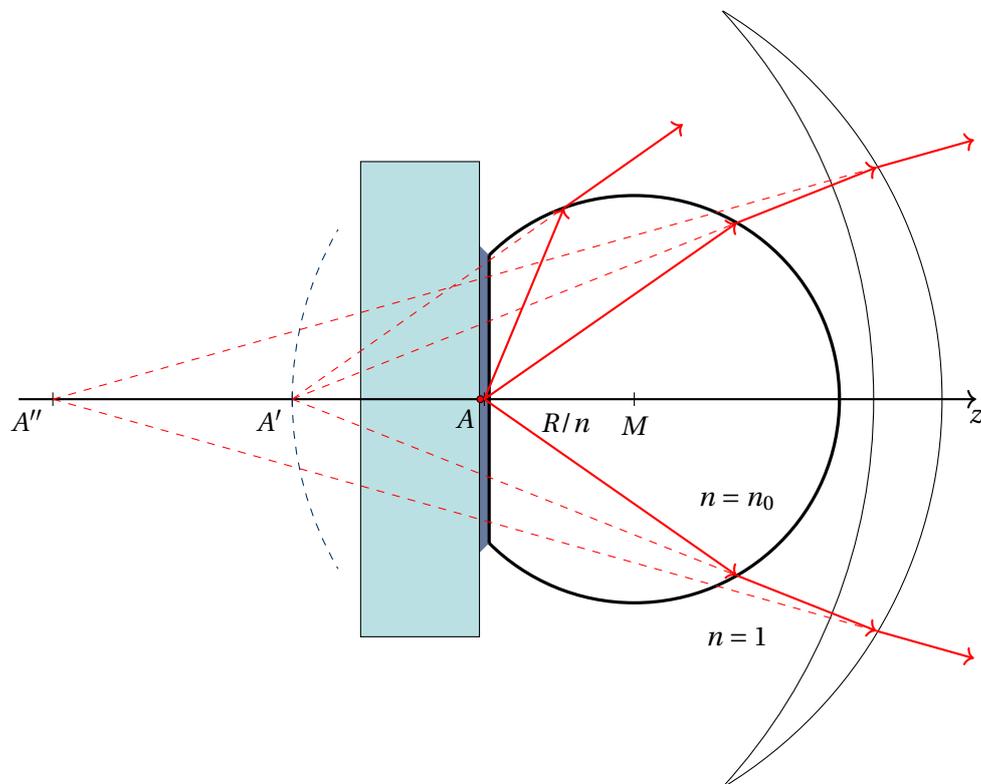
hoher numerischer Apertur, die die von einem Objekt in einem großen Winkelbereich ausgehenden Strahlen auffangen, zu konstruieren. Da die dabei untersuchten Objekte sehr klein sind, lässt sich annehmen, dass sie praktisch in  $A$  liegen und die Krümmung der exakt abgebildeten Kugelschale noch keine Rolle spielt. Die Glaskugel wird daher senkrecht zur optischen Achse in  $A$  durchtrennt. Das Objekt wird im Falle des Immersionsobjektives mittels einer Immersionsflüssigkeit, die die gleiche Brechzahl wie die Glaskugel hat, im Punkt  $A$  an der Schnittfläche fixiert. Damit wird für das Licht wieder die Idealsituation des im Punkt  $A$  innerhalb eines Mediums mit Brechungsindex  $n$  liegenden Objektes realisiert.



Durch dieses Verfahren wird zwar keine reelle Abbildung ermöglicht, aber Strahlen die in einem großen Winkel zur optischen Achse vom Objekt ausgehen, werden in achsennahe Strahlen umgewandelt, ohne, dass es zu zusätzlichen Abbildungsfehlern kommt. Besitzt die Glaskugel z. B. die Brechzahl  $n = 1,45$ , treten Strahlen, die vom Objekt unter  $90^\circ$  emittiert werden, nur noch knapp  $44^\circ$  zur optischen Achse geneigt aus der Glaskugel aus. Bei  $n = 2$  reduziert sich dieser Winkel sogar auf  $30^\circ$ .

Für Trockenobjektive wird prinzipiell die gleiche Konfiguration verwendet, wobei versucht wird, den Abstand zwischen Objekt und Frontlinse so klein, wie möglich zu halten. Die numerische Apertur und damit, wie später noch gezeigt wird auch die Auflösung reduziert sich dann aber auf  $NA = \sin \alpha_{\max}$ .

Prinzipiell können auch mehrere aplanatische Objektive hintereinander geschaltet werden, um die Winkel der auftretenden Strahlen weiter zu reduzieren. Dazu muss aus dem zweiten aplanatischen Objektiv eine Hohlkugel um den weiter zu verarbeitenden Bildpunkt  $A'$  ausgespart werden, in dem sich dann das erste aplanatische Objektiv befindet. Da das nur noch für einen begrenzten Winkelbereich nötig ist, reicht hier eine konkav-konvexe Linse. Von dem zu verarbeitenden Bildpunkt  $A'$  ausgehende Strahlen treffen senkrecht auf die Innenfläche der zweiten Linse, weshalb sie erst einmal in ihrer Ausbreitungsrichtung nicht beeinflusst werden. Das zweite aplanatische Element entfaltet seine Wirkung erst an seiner Außenfläche, deren Radius und Krümmungsmittelpunkt so gewählt werden, dass die aplanatische Bedingung auch für  $A'$  erfüllt wird.



**Fig. 15:** Zwei aplanatische Objektive können hintereinander verbaut werden wenn das zweite Objektiv eine konkav-konvexe Linse ist. Vom Bildpunkt  $A'$  kommende Strahlen treffen senkrecht auf die konkave Seite und werden nicht abgelenkt.



**Fig. 16:** Im Frontbereich eines Mikroskopobjektives (Werbeprospekt der Firma Zeiss) lässt sich eine Konstruktion aus zwei ineinander verschachtelten aplanatischen Objektiven erkennen.

### 3 Beugungsphänomene

#### 3.1 Konfiguration und Ausbreitungsgleichung

Vorausgesetzt wird im Folgenden ein monochromatisches Feld ( $\omega = \text{konst.}$ ) und ein homogenes, isotropes und absorptionsfreies Medium ( $n$  konstant und reell). Zudem gilt die HELMHOLTZ-Gleichung

$$\left(\Delta + n^2 \frac{\omega^2}{c^2}\right) \mathbf{E} = (\Delta + k^2) \mathbf{E} = 0 \quad \text{mit} \quad k^2 = n^2 \frac{\omega^2}{c^2} \quad (3.1)$$

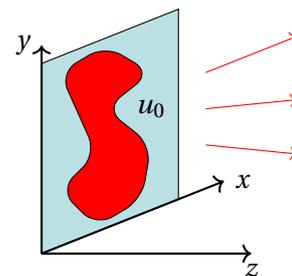
für alle drei Komponenten des elektrischen Feldes. Da aber auch noch  $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 0$  erfüllt werden muss, sind nur zwei Komponenten (z. B.  $E_x$  und  $E_y$ ) frei wählbar. Im folgenden soll die Gleichung

$$(\Delta + k^2) u(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.2)$$

untersucht werden, wobei  $u(\mathbf{r})$  einer Feldkomponente entspricht.

Es wird folgende Konfiguration gewählt:

- Objekt- und Bildebene liegen in der  $x$ - $y$ -Ebene.
- Die Ausbreitung erfolgt in positive  $z$ -Richtung.
- Gegeben ist das Feld in der Objektebene bei  $z = 0$  als  $u(x, y, z = 0) = u_0(x, y)$ .
- Gesucht ist das Feld für  $u(x, y, z > 0)$ .



#### 3.2 Lösung des Anfangswertproblems

Zur Lösung des Anfangswertproblems wird eine Darstellung im Fourierraum gesucht. Das Feld wird aus lauter ebenen Wellen, deren Ausbreitung bekannt ist, zusammengesetzt

$$\text{Ansatz: } u(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}(\alpha, \beta, z) \exp[i(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta. \quad (3.3)$$

Das Einsetzen des Ansatzes in (3.2) ergibt

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left( -\alpha^2 - \beta^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \bar{U}(\alpha, \beta, z) \right] \exp[i(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta. \quad (3.4)$$

Diese Beziehungen sind nun für alle Felder erfüllt, falls gilt:

$$\left( -\alpha^2 - \beta^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \bar{U}(\alpha, \beta, z) = 0. \quad (3.5)$$

Eine allgemeine Lösung hat die Form

$$\bar{U}(\alpha, \beta, z) = a_+(\alpha, \beta) \exp[i\gamma(\alpha, \beta)z] + a_-(\alpha, \beta) \exp[-i\gamma(\alpha, \beta)z] \quad (3.6)$$

$$\text{mit } \gamma(\alpha, \beta) = \sqrt{k^2 - \alpha^2 - \beta^2}. \quad (3.7)$$

mit  $\gamma(\alpha, \beta) = \sqrt{k^2 - \alpha^2 - \beta^2}$ . Da nur sich in positive  $z$ -Richtung ausbreitende Felder betrachtet werden, kann  $a_- = 0$  angenommen werden. Damit ergibt sich bei  $z = 0$

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}(\alpha, \beta, z=0) \exp[i(\alpha x + \beta y)] \, d\alpha \, d\beta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a_+(\alpha, \beta) \exp[i(\alpha x + \beta y)] \, d\alpha \, d\beta. \end{aligned} \quad (3.8)$$

$a_+(\alpha, \beta)$  ist also die Fouriertransformierte von  $u_0(x, y)$ . Damit ergibt sich die allgemeine Lösung des Anfangswertproblems zu:

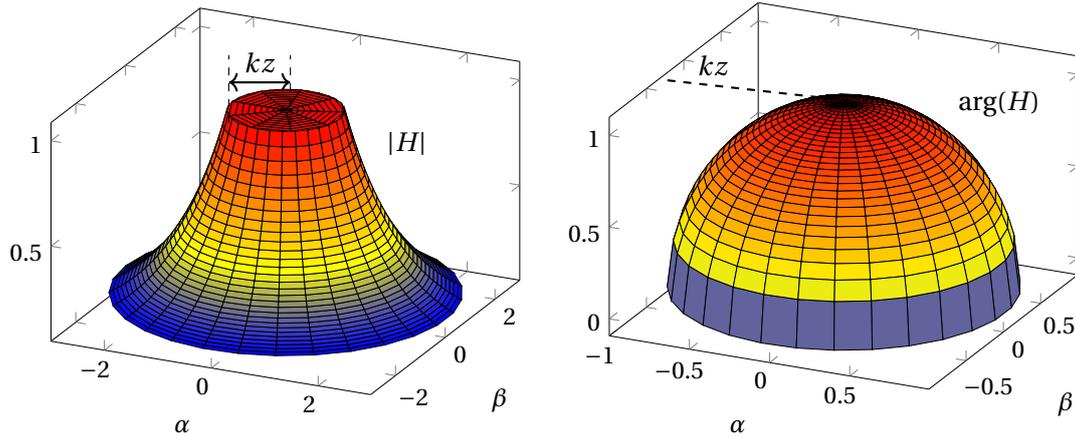
$$u(x, y, z) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\bar{U}_0(\alpha, \beta)}_{\text{Amplitude}} \exp[i\gamma(\alpha, \beta)z]}_{\text{Welle}} \underbrace{\exp[i(\alpha x + \beta y)]}_{\text{Summation über alle Wellen}} \, d\alpha \, d\beta \quad (3.9)$$

$$\text{mit (3.7) und } \bar{U}_0(\alpha, \beta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x, y) \exp[-i(\alpha x + \beta y)] \, dx \, dy. \quad (3.10)$$

Die gesamte  $z$ -Abhängigkeit der Lösung steckt in der Übertragungsfunktion

$$H(\alpha, \beta, z) = \exp[i\gamma(\alpha, \beta)z] = \exp\left(i\sqrt{k^2 - \alpha^2 - \beta^2}z\right). \quad (3.11)$$

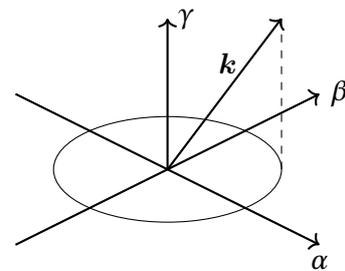
$H$  entscheidet darüber, wie sich eine Welle bei ihrer Ausbreitung entlang  $z$  verändert.



Es ergeben sich nun zwei verschiedene Typen von Lösungen:

### Homogene Wellen

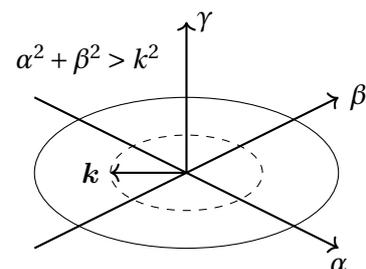
Es bilden sich homogene Wellen unterschiedlicher Neigung bzgl. der  $z$ -Achse aus mit  $\alpha^2 + \beta^2 \leq k^2$ , woraus  $|H| = 1$  und  $\arg H \neq 0$  folgt. Das heißt, jede homogene ebene Welle wird bei der Ausbreitung mit einem Phasenfaktor  $\exp\left[i\sqrt{k^2 - \alpha^2 - \beta^2}z\right]$  belegt. Der Betrag ihrer Amplitude wird jedoch nicht verändert, d. h. die in ihr enthaltene Information geht nicht verloren. Während der Ausbreitung geraten unterschiedliche Wellen nur "außer Phase", was sich bei der gesamten Feldverteilung dann als Beugung äußert.



### Evaneszente Wellen

Hier gilt nun  $\alpha^2 + \beta^2 > k^2$  und damit  $\gamma^2 < 0$ , d. h.  $\gamma$  ist rein imaginär und die Welle wird in  $z$ -Richtung gedämpft mit  $\sim \exp(-|\gamma|z)$ , was sich auch in der Übertragungsfunktion widerspiegelt

$$|H| = \exp\left[-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - k^2}z\right] < 1, \arg H = 0,$$



d. h. jede evaneszente Welle wird bei der Ausbreitung mit einem Amplitudenfaktor  $< 1$  belegt. Die Beträge werden für wachsende  $z$  exponentiell gedämpft.

Evaneszente Wellen treten auf, sobald die Fouriertransformierte der Anfangsverteilung wesentliche Komponenten im Spektralbereich  $\alpha^2 + \beta^2 > k^2$  besitzt.

Nach relativ kurzer Ausbreitungslänge (Ausbreitungslänge  $<$  Wellenlänge) liegen nur noch Fourierkomponenten mit  $\alpha^2 + \beta^2 \leq k^2$  vor. Die optische Übertragung folgt also einem Tiefpassverhalten.

Nach Abklingen der evaneszenten Wellen ändert sich das Fourierspektrum vom Betrag her

nicht mehr, sehr wohl aber in der Phase. Beugung tritt auf, da unterschiedliche Fourierkomponenten unterschiedliche Phasen akkumulieren.

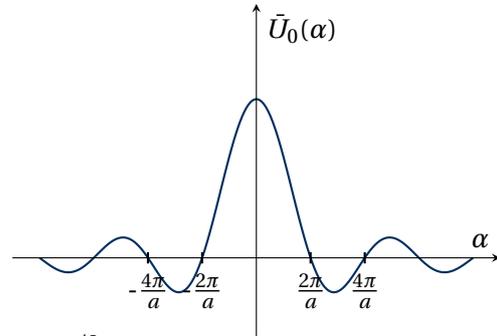
### Eindimensionaler Spalt

Ein 1D-Spalt besitzt folgende Feldverteilung:

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leq a/2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.12)$$

Nach (3.10) ergibt sich für die Fouriertransformierte der Feldverteilung für  $z = 0$ :

$$\begin{aligned} \bar{U}_0(\alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx u_0(x) e^{-i\alpha x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-a/2}^{a/2} dx u_0(x) e^{-i\alpha x} \\ &= \frac{1}{\pi\alpha} \sin\left(\frac{a}{2}\alpha\right) = \frac{a}{2\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{a}{2}\alpha\right), \end{aligned} \quad (3.13)$$

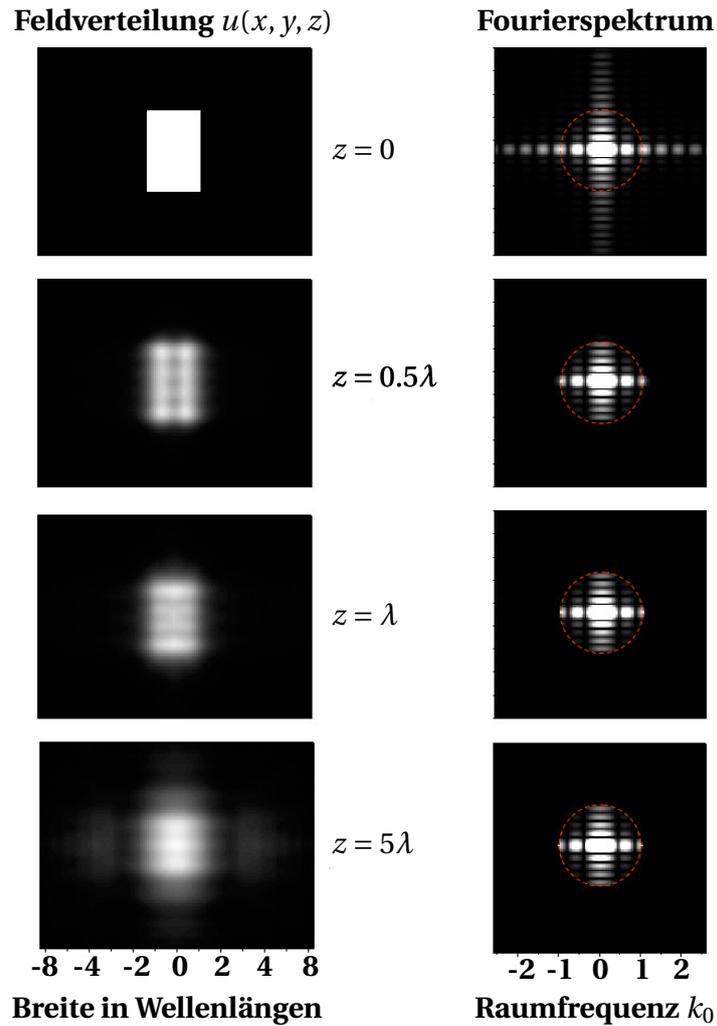


mit  $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$  und  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sinc}(x) = 1$ .

Das Fourierspektrum des Spalts ist nicht begrenzt, sondern fällt lediglich langsam mit  $1/\alpha$  ab. Damit noch eine Information über die Spaltbreite extrahiert werden kann, sollten charakteristische Merkmale des Fourierspektrums, wie z. B. die erste Nullstelle übertragen werden. Damit die erste Nullstelle übertragen wird, muss

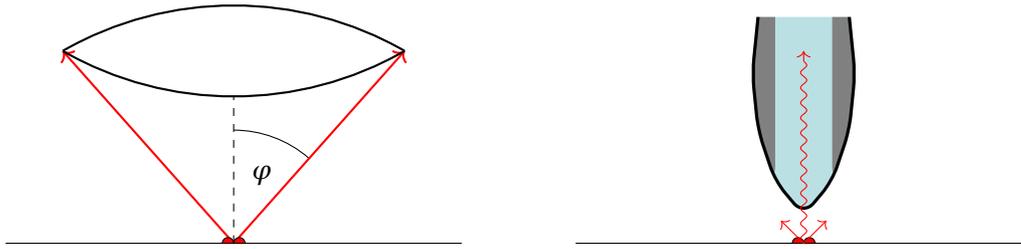
$$\frac{2\pi}{a} < k = n \frac{2\pi}{\lambda_0}, \quad \text{d. h. } a > \frac{\lambda_0}{n} \quad (3.14)$$

gelten. Strukturdetails die kleiner als die Wellenlänge im Material sind, werden also nicht übertragen. Klassische abbildende Elemente (z. B.) Objektive können nur die sich bei den propagierenden Wellen ( $\alpha^2 + \beta^2 \leq k^2$ ) akkumulierenden Phasendifferenzen (Wellenfrontkrümmungen) korrigieren und damit die Wirkung der Beugung neutralisieren. Eine Rekonstruktion der exponentiell gedämpften Anteile des Fourierspektrums ( $\alpha^2 + \beta^2 > k^2$ ) ist nicht möglich.



Es gibt verschiedene Wege zur Verbesserung des Auflösungsvermögens:

- Verwertung eines möglichst großen Anteils der sich ausbreitenden Wellen durch Verwendung von Objektiven hoher numerischer Apertur  $NA = n \sin \varphi$  (maximaler noch transferierter Wellenzahlvektor:  $\alpha_{\max} = k \sin \varphi$ )
- Reduktion der Wellenlänge durch Verwendung hochbrechender Flüssigkeiten und Verwendung hoher Frequenzen
- direkte Detektion evaneszenter Wellen mittels optischer Nahfeldmikroskopie (Scanning Nearfield Optical Microscopy - SNOM) evaneszente Wellen werden direkt in eine optische Spitze eingekoppelt.



**Fig. 17:** Links: Darstellung des maximalen Öffnungswinkels einer Linse  
Rechts: Detektion evaneszenter Wellen mittels SNOM

### 3.3 Gaußförmige Strahlen in paraxialer Näherung

Im Folgenden wird häufig die GAUSS-Funktion  $\exp(-x^2)$  auftreten, deren Eigenschaften kurz erläutert werden sollen. Für diese stark fallende Funktion gilt folgende Identität:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp[-ax^2 + bx] = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left[\frac{b^2}{4a}\right]. \quad (3.15)$$

Zudem ist die GAUSS-Funktion mehrdimensional verallgemeinerbar, da sie sich faktorisieren lässt:  $\exp(-(x^2 + y^2)) = \exp(-x^2) \exp(-y^2)$ .

Gauß-förmige Strahlen treten in der Optik als Grundmode von Lasern mit Hohlspiegeln auf und sind analytisch beschreibbar. Sie bilden eine Brücke zwischen Wellen- und Strahlenoptik.

**Ausbreitungsproblem der Anfangsverteilung:**  $u_0(x, y) = A_0 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{W_0^2}\right)$

Zunächst wird das Spektrum der Anfangsverteilung bestimmt:

$$\begin{aligned} \bar{U}_0(\alpha, \beta) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy A_0 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{W_0^2}\right) \exp[-i(\alpha x + \beta y)] \\ &= A_0 \frac{W_0^2}{4\pi} \exp\left[-\frac{W_0^2}{4}(\alpha^2 + \beta^2)\right], \end{aligned} \quad (3.16)$$

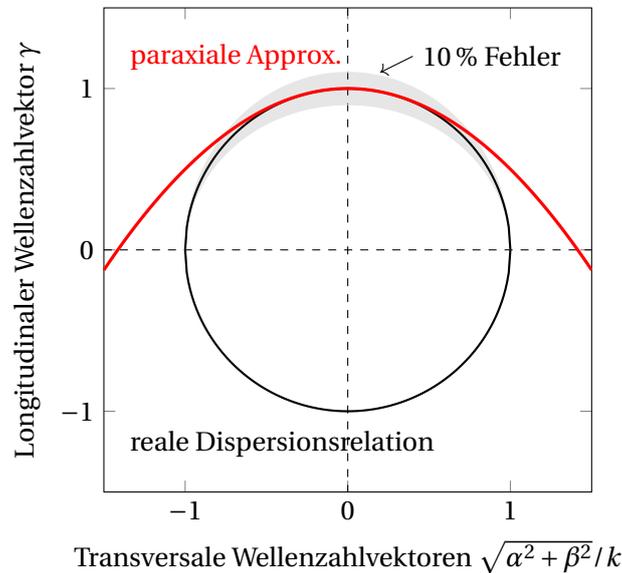
wobei die Fouriertransformation mithilfe einer quadratischer Ergänzung ausgeführt wird.

Im zweiten Schritt wird das Spektrum nach der Ausbreitung berechnet und anschließend rücktransformiert. Es ergibt sich mit (3.16)

$$u(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \bar{U}_0(\alpha, \beta) \exp\left[i\sqrt{k^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}z\right] \exp[i(\alpha x + \beta y)]. \quad (3.17)$$

Leider ist das Integral wegen des Wurzelterms im Exponenten der e-Funktion nicht ausführbar. Unter der Annahme von Strahlbreiten, die wesentlich größer als die Wellenlänge sind,

kann von einem im Bereich sich ausbreitender Wellen lokalisierten Fourierspektrum ausgegangen werden. Breiten sich außerdem die im Strahl zusammengefassten ebenen Wellen vor allem in Richtung der optischen Achse aus, d. h. die transversalen Wellenzahlvektoren  $\alpha$  und  $\beta$  sind klein gegenüber der bei monochromatischem Licht festen Gesamtlänge des Wellenzahlvektors  $k$  ( $\alpha^2 + \beta^2 \ll k^2$ ), kann eine *paraxiale Näherung* angewendet werden.



Es wird die Approximation

$$\sqrt{k^2 - (\alpha^2 + \beta^2)} \approx k - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2k} \quad (3.18)$$

vorgenommen. Diese Approximation ist für kleine Winkel sehr gut. Bei einer Neigung der Wellenzahlvektoren zur optischen Achse von  $30^\circ$  tritt erst ein Fehler von 1,03 % auf.

Unter dieser Annahme muss jetzt nur noch die, wenn auch komplexe, GAUSS-Funktion zurück transformiert werden:

$$u(x, y, z) = e^{ikz} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \bar{U}_0(\alpha, \beta) \exp\left[-i \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2k} z\right] \exp[i(\alpha x + \beta y)] \quad (3.19)$$

Die Einführung der komplexen Breite  $W' = W_0^2 + \frac{2iz}{k}$  macht es noch deutlicher

$$u(x, y, z) = e^{ikz} \frac{W_0^2}{W'^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \frac{A_0 W'^2}{4\pi} \exp\left[-\frac{W'^2}{4} (\alpha^2 + \beta^2)\right] \exp[i(\alpha x + \beta y)]. \quad (3.20)$$

Wird der Ausdruck mit dem bekannten Feld bei  $z = 0$  verglichen

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= A_0 \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{W_0^2}\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \frac{A_0 W_0^2}{4\pi} \exp\left[-\frac{W_0^2}{4} (\alpha^2 + \beta^2)\right] \exp[i(\alpha x + \beta y)] \end{aligned} \quad (3.21)$$

lässt sich die Lösung ablesen als

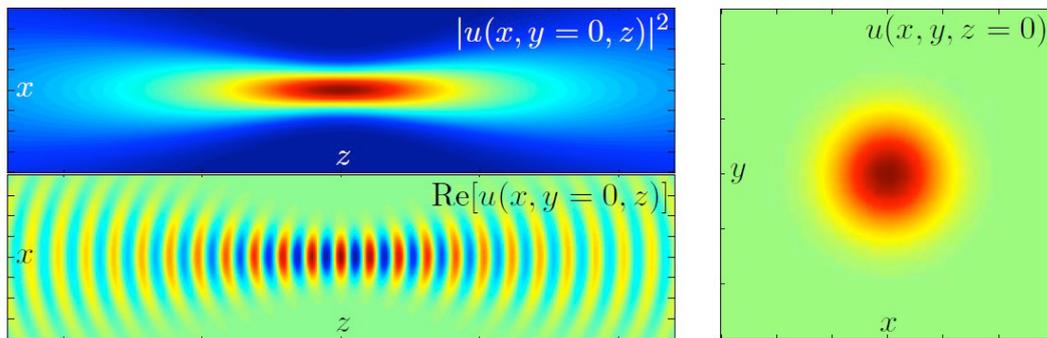
$$u_0(x, y, z) = e^{ikz} \frac{W_0^2}{W'^2} A_0 \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{W'^2} \right]. \quad (3.22)$$

$W'^2$  lässt sich unter Verwendung des Beugungsparameters  $z_R$  mit

$$z_R = \frac{kW_0^2}{2} = \frac{\pi W_0^2}{\lambda} \quad \text{umschreiben in} \quad W'^2 = W_0^2 \left( 1 + i \frac{z}{z_R} \right) \quad (3.23)$$

und damit die gesamte Lösung vereinfachen zu:

$$u(x, y, z) = e^{ikz} \frac{A_0}{1 + iz/z_R} \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{W_0^2 (1 + iz/z_R)} \right] \quad \text{mit} \quad z_R = \frac{\pi W_0^2}{\lambda}. \quad (3.24)$$



### Diskussion der Lösung

Für die weitere Diskussion ist es günstig, die Lösung in Betrag und Phase aufzuteilen:

$$u(x, y, z) = \frac{e^{ikz} e^{i\varphi} A_0}{\sqrt{1 + (z/z_R)^2}} \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{W_0^2 (1 + (z/z_R)^2)} \right] \exp \left[ i \frac{z}{z_R} \frac{x^2 + y^2}{W_0^2 (1 + (z/z_R)^2)} \right] \quad (3.25)$$

mit  $\varphi = -\arctan(z/z_R)$ .

### Beugungsparameter $z_R$

Der Beugungsparameter, der quadratisch von der Strahlbreite und invers von der Wellenlänge abhängt, bestimmt die gesamte Feldausbreitung. Für Ausbreitungslängen  $z \ll z_R$  können Beugungseffekte unberücksichtigt bleiben. Es gilt die geometrische Optik. Typische Längen des Beugungsparameters sind:

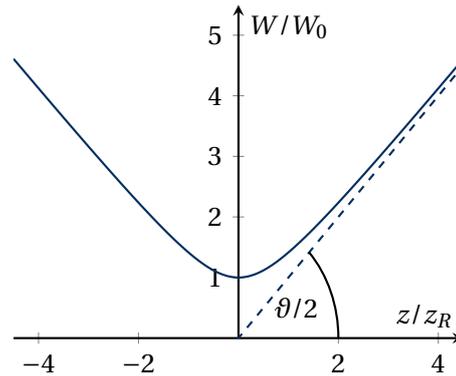
- $W_0 = 10\lambda : z_R = 100\pi\lambda \approx 314\lambda$
- $W_0 = 1 \text{ mm und } \lambda = 600 \text{ nm} : z_R = 5,2 \text{ m}$
- $W_0 = 10 \text{ mm und } \lambda = 600 \text{ nm} : z_R = 520 \text{ m}$

**Strahlbreite**  $W(z) = W_0 \sqrt{1 + (z/z_R)^2}$

Für große Ausbreitungslängen  $z \gg z_R$  gilt  $W(z) \approx W_0 z/z_R$ , d. h. von der Strahltaile ( $z = 0$ ) geht ein Strahlkegel mit dem Öffnungswinkel

$$\vartheta = 2 \arctan \frac{W_0}{2z_R} = 2 \arctan \frac{\lambda}{2\pi W_0}, \quad (3.26)$$

d. h. je kleiner die Strahltaile ist, desto stärker divergiert der Strahl bei der Ausbreitung.

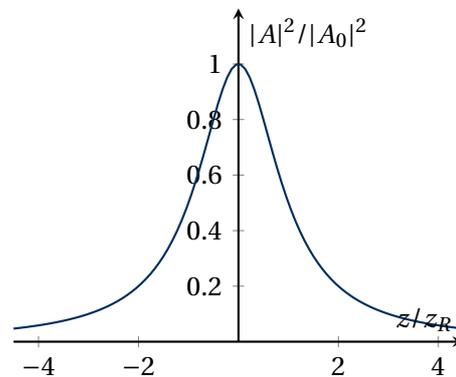


### Leistung auf der Strahlachse

Die Leistung auf der Strahlachse ( $x = y = 0$ ) entlang der Ausbreitungsrichtung nimmt betragsmäßig folgende Form an:

$$|A(z)|^2 = \frac{|A_0|^2}{1 + (z/z_R)^2}. \quad (3.27)$$

Im nebenstehenden Bild ist die Verteilung entsprechend geplottet.



### Phasenkrümmung

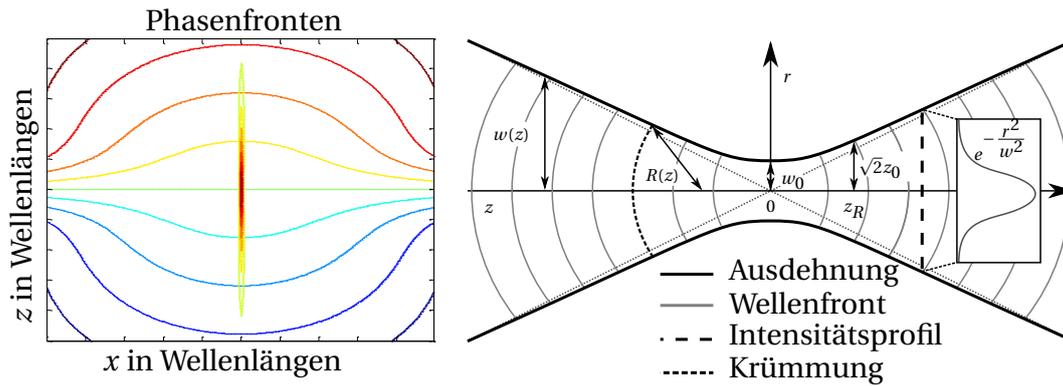
Der Phasenterm  $\exp[i\dots]$  in (3.25) bewirkt außerhalb der Strahltaile ( $z \neq 0$ ) eine Krümmung der Phasenfronten im Strahl, der entsprechende Krümmungsradius ergibt sich bei Vergleich mit einer Kugelwelle, die paraxial für  $x^2 + y^2 = z^2$  als

$$\begin{aligned} \exp(ikR) &= \exp\left[ik\sqrt{z^2 + (x^2 + y^2)}\right] \approx \exp(ikz) \exp\left[ik\frac{x^2 + y^2}{2z}\right] \\ &\approx \exp(ikz) \exp\left[ik\frac{x^2 + y^2}{2R}\right] \end{aligned} \quad (3.28)$$

genähert wird zu

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_R}{z}\right)^2\right]. \quad (3.29)$$

Für große Abstände  $z \gg z_R$  gilt  $R(z) \approx z$ , d. h. der Strahl bildet den Ausschnitt aus einer Kugelwelle mit dem Zentrum in der Strahltaile.



**Fig. 18:** Links: Phasenfronten eines GAUSS-Strahls. Um  $x = 0$  ist die Intensitätsverteilung erkennbar. Rechts: GAUSS-Strahl (schematisch) mit Abmessungen, Strahlbegrenzung, Wellenfronten und Intensitätsprofil [de.wikipedia.org/wiki/Gauß-Strahl]

### 3.4 Gaußsche Optik mit q-Parametern

#### 3.4.1 Einführung der q-Parameter

Das *Ziel* ist die Beschreibung beliebiger GAUSS-Strahlen durch einen komplexen Parameter  $q$ . Bisher wurden zwei Parameter eines GAUSS-Strahls eingeführt:

- Beugungsparameter  $z_R$  (enthält Breite im Fokus)
- Abstand zum Fokus/ zur Strahltaile  $z_F$  (Bisher war das einfach  $z$ ). Jetzt werden auf negative Werte für  $z_F$  zugelassen, d. h. eine Beobachtungsposition vor der Strahltaile wird möglich

Diese Parameter werden zu folgendem Parameter zusammengefasst:

$$\boxed{q = z_F - iz_R} \quad q\text{-Parameter} \quad (3.30)$$

Tatsächlich lässt sich die Feldverteilung vollständig durch  $q$  ausdrücken:

$$u(x, y, z) = \frac{iA_0 \operatorname{Im}(q)}{q} \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda} \frac{x^2 + y^2}{q}\right] \exp[ik \operatorname{Re}(q)], \quad (3.31)$$

d. h. bei bekanntem  $q$  lassen sich alle wesentlichen Parameter des GAUSS-Strahls ermitteln. Während aus  $q$  selbst sofort der Abstand zum Fokus und die Breite der sich dort ausbildenden Strahltaile abgelesen werden kann, hat auf  $1/q$  eine Bedeutung:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{z_F - iz_R} = \frac{1}{z_F \left[1 + \left(\frac{z_R}{z_F}\right)^2\right]} + \frac{i}{z_R \left[1 + \left(\frac{z_F}{z_R}\right)^2\right]} = \frac{1}{R(z)} + i\frac{\lambda}{\pi} \frac{1}{W(z)^2}. \quad (3.32)$$

In  $1/q(z)$  sind als der Krümmungsradius  $R(z)$  und die aktuelle Breite  $W(z)$  enthalten. Im einzelnen ergibt sich:

- $\operatorname{Re}(q) = z_F$  Abstand zum Fokus / zur Strahltaile  $z_F$
- $\operatorname{Im}(q) = -z_R$  Breite im Fokus / in der Strahltaile ( $W_0^2 = z_R \lambda / \pi$ )

- $\text{Re}(1/q) = 1/R$  Krümmungsradius  $R$
- $\text{Im}(1/q) = \lambda/\pi \cdot 1/W^2$  aktuelle Breite  $W(z)$

### 3.4.2 Dynamik des q-Parameters

#### Ausbreitung im homogenen Raum

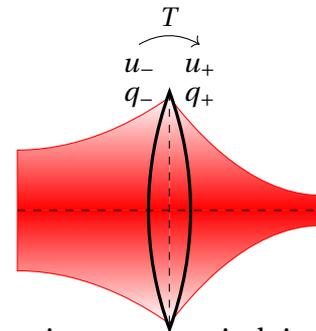
Im homogenen Raum ändert sich der Beugungsparameter nicht, nur der Abstand zur Strahltaille variiert bei einer Verschiebung um die Strecke  $L$

$$q(z+L) = q(z) + L. \quad (3.33)$$

#### Ausbreitung durch eine dünne Linse

Beim direkten Durchgang durch eine dünne Linse ändert sich zwischen Vorder- und Rückseite die Intensitätsverteilung des Strahls nicht, nur die Phase wird entsprechend durchquerten Glasdicke modifiziert. Es ergibt sich:

$$u_+(x, y) = T(x, y)u_-(x, y) \quad (3.34)$$



mit der Transferfunktion  $|T(x, y)| = 1$ . Da die Transferfunktion rotationssymmetrisch ist, ergibt sich in zweiter Ordnung einer Taylor-Entwicklung für kleine  $x$  und  $y$

$$T(x, y) = \exp \left[ i \left( \varphi_0 - \frac{\pi}{\lambda} \frac{x^2 + y^2}{f} \right) \right], \quad (3.35)$$

wobei der Vorfaktor vor den quadrierten Ortskoordinaten  $x$  und  $y$  der zweiten Ableitung der Phasenfunktion auf der optischen Achse entspricht:

$$-\frac{\pi}{\lambda f} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \arg[T(x, y)] \Big|_{x=y=0}. \quad (3.36)$$

Der hier so entstehende Vorfaktor wurde schon in einer für die weiteren Rechnungen günstigen Art und Weise aufgespalten, wobei die physikalische Bedeutung der Konstanten  $f$  noch ermittelt werden muss. Durch Einsetzen ergibt sich für

$$u_-(x, y, z) = \frac{iA_0 \text{Im}(q_-)}{q_-} \exp \left[ i \frac{\pi}{\lambda} \frac{x^2 + y^2}{q_-} \right] \exp[ik \text{Re}(q_-)] \quad (3.37)$$

$$u_+(x, y, z) = \frac{iA_0 \text{Im}(q_-)}{q_-} \exp[i(\varphi_0 + k \text{Re}(q_-))] \exp \left[ i \frac{\pi}{\lambda} (x^2 + y^2) \cdot \left\{ \frac{1}{q} - \frac{1}{f} \right\} \right]. \quad (3.38)$$

Soll wiederum  $u_+$  ein GAUSS-förmiger Strahl der Form

$$u_+(x, y, z) = \frac{iA_0 \text{Im}(q_+)}{q_+} \exp[i(\varphi' + k \text{Re}(q_-))] \exp \left[ i \frac{\pi}{\lambda} \frac{x^2 + y^2}{q_+} \right] \quad (3.39)$$

sein, muss für die dünne Linse folgende Transfergleichung des  $q$ -Parameters gelten

$$\boxed{\frac{1}{q_+} = \frac{1}{q_-} - \frac{1}{f}}. \quad (3.40)$$

Der Rest der Vorfaktoren beinhaltet letztlich unwesentliche Phasenfaktoren, wie  $\varphi'$  oder ergibt sich automatisch bei geltender Energieerhaltung.

Um die physikalische Bedeutung von  $f$  zu klären, wird der Transfer eines unendlich breiten Strahls durch eine dünne Linse untersucht. In diesem Fall wird eine Fokussieren des Feldes am Brennpunkt hinter der Linse erwartet. Vor der Linse ist der  $q$ -Parameter eines unendlich breiten Strahls ebenfalls unendlich ( $q_- = z_F - i\frac{\pi}{\lambda}\infty^2 = \infty$ ) und es gilt  $1/q_- = 0$ . Damit ergibt sich  $\frac{1}{q_+} = \frac{1}{f}$ , d. h. der Strahl fokussiert sich im Abstand  $f$  hinter (da  $-f < 0$ ) der Linse. Es handelt sich also bei  $f$  um die Brennweite der Linse.

Propagiert ein kollimierter Strahl ( $z_R \gg 1$ ) durch eine Linse der Brennweite  $f$ , dann ergibt sich die Breite der neuen Strahltaile (Fokus) zu

$$W_0 = \frac{\lambda}{\pi W} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{f^2} + \frac{\lambda^2}{\pi^2 W^4}}} \Rightarrow \boxed{W_0 \approx \frac{\lambda f}{\pi W}}, \quad (3.41)$$

wobei  $W$  die kollimierte Strahlbreite vor der Linse beschreibt.

### 3.4.3 Transfermatrizen für $q$ -Parameter

Während für Einzelelemente (Linse, Freiraum) die oben angegebenen Formeln ausreichend sind, ist es jedoch besser, komplette Systeme durch eine einfache Transferfunktion beschreiben zu können. Ein mathematisches Problem besteht aber darin, dass unterschiedliche Operationen für Freiräume und Linsen in einem Schema vereinigt werden müssen. Daher werden die  $q$ -Parameter auf komplexe Zweiervektoren

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \quad q = \frac{\eta_1}{\eta_2} \quad (3.42)$$

abgebildet, deren Richtung durch den  $q$ -Parameter bestimmt wird. Die Veränderung der Zweiervektoren beim Transfer durch ein optisches System wird durch  $2 \times 2$ -Matrizen, die mit den schon aus der geometrischen Optik bekannten ABCD-Matrizen übereinstimmen, beschrieben. Die Gültigkeit dieses Schemas wird für die beiden Fälle Freiraum und dünne Linse überprüft, wobei im Freiraum  $n = 1$  gesetzt wird.

#### Freiraum (Länge $L$ )

Die Transfermatrix  $\hat{T}$  des freien Raums ist aus Gleichung (2.1) bereits bekannt. Somit ergibt sich für  $\boldsymbol{\eta}_+$

$$\boldsymbol{\eta}_+ = \begin{pmatrix} \eta_1^+ \\ \eta_2^+ \end{pmatrix} = \hat{T} \boldsymbol{\eta}_- = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1^- \\ \eta_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1^- + L\eta_2^- \\ \eta_2^- \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Wenn für den Eingangsvektor  $q_- = \frac{\eta_1^-}{\eta_2^-}$  vorausgesetzt wird, ergibt sich der  $q$ -Parameter am Ende des Freiraums zu

$$q_+ = \frac{\eta_1^+}{\eta_2^+} = \frac{\eta_1^- + L\eta_2^-}{\eta_2^-} = q_- + L, \quad (3.44)$$

d. h. die Transformationsgleichung des Freiraums wird erfüllt.

### Dünne Linse (Brennweite $f$ )

Die Transfermatrix  $\hat{M}$  der dünnen Linse ist ebenfalls aus (2.9) bekannt. Es ergibt sich also wieder

$$\boldsymbol{\eta}_+ = \begin{pmatrix} \eta_1^+ \\ \eta_2^+ \end{pmatrix} = \hat{M}\boldsymbol{\eta}_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1^- \\ \eta_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1^- \\ -\frac{\eta_1^-}{f} + \eta_2^- \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

Entsprechend der zu überprüfenden Transfergleichung wird  $\frac{1}{q_-} = \frac{\eta_2^-}{\eta_1^-}$  vorausgesetzt und für den inversen  $q$ -Parameter hinter der Linse folgt

$$\frac{1}{q_+} = \frac{\eta_2^+}{\eta_1^+} = \frac{-\eta_1^-/f + \eta_2^-}{\eta_1^-} = \frac{1}{q_-} - \frac{1}{f}. \quad (3.46)$$

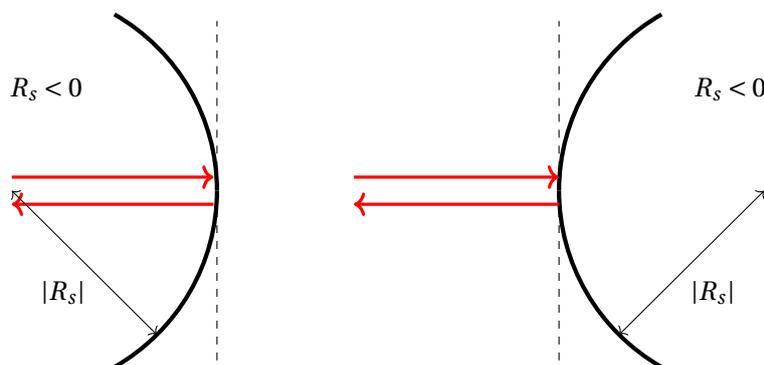
### Reflexion am sphärischen Spiegel (Krümmungsradius $R_s$ )

Ohne Beweis, aber analog zur Linse ergibt sich für den Hohlspiegel folgende Reflexionsmatrix

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/R_s & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.47)$$

mit dem Krümmungsradius  $R_s$ , dessen Vorzeichen darüber entscheidet, ob der Hohlspiegel konkav oder konvex ist.

*CAVE:* Hier wird sich in Richtung des Strahlenganges orientiert, der sich beim Spiegel umdreht. Ein konkaver Spiegel  $R_s < 0$  wirkt wie eine Sammellinse ( $f > 0$ ), die einen Fokus auf dem weiteren Strahlenweg, d. h. nach der Linse, bildet. Im Fall des Hohlspiegels liegt der Fokus dann vor dem Spiegel.



### Optische Systeme

Komplette optische Systeme werden durch ihre ABCD-Matrizen charakterisiert, die genau so wie in der Strahlenoptik gebildet und auf die komplexen Zweivektoren angewendet werden:

$$\boldsymbol{\eta}_+ = \begin{pmatrix} \eta_1^+ \\ \eta_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1^- \\ \eta_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\eta_1^- + B\eta_2^- \\ C\eta_1^- + D\eta_2^- \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

Für den  $q$ -Parameter gilt jetzt

$$q_+ = \frac{\eta_1^+}{\eta_2^+} = \frac{A\eta_1^- + B\eta_2^-}{C\eta_1^- + D\eta_2^-} \Rightarrow \boxed{q_+ = \frac{Aq_- + B}{Cq_- + D}}. \quad (3.49)$$

D. h. bei Verwendung der Transferformel (3.49) kann auf die komplexen Zweivektoren ganz verzichtet werden und nur die ABCD-Matrix des optischen Systems verwendet werden, um eine Transformation des  $q$ -Parameters zu realisieren.

#### 3.4.4 Gaußsche Moden im Resonator

Die Grundmode eines Laserresonators ist in guter Näherung gaußförmig. Es soll untersucht werden, unter welchen Umständen ein Laserresonator stabil ist, d. h. wann sich ein GAUSS-Strahl nach einem Umlauf wieder auf sich selbst abbildet.

Ein Umlauf im Resonator wird durch eine allgemeine ABCD-Matrix beschrieben. Damit sich ein GAUSS-Strahl auf sich selbst abbildet muss  $q_+ = q_- = q$  gelten. Der Strahlparameter  $q$  ergibt sich daher bei Auswertung von (3.49) durch Lösung der quadratischen Gleichung

$$q^2 + \frac{D-A}{C}q - \frac{B}{C} = 0 \quad \text{zu} \quad (3.50)$$

$$\boxed{q = \frac{A-D}{2C} \pm \sqrt{\left(\frac{A-D}{2C}\right)^2 + \frac{B}{C}}}. \quad (3.51)$$

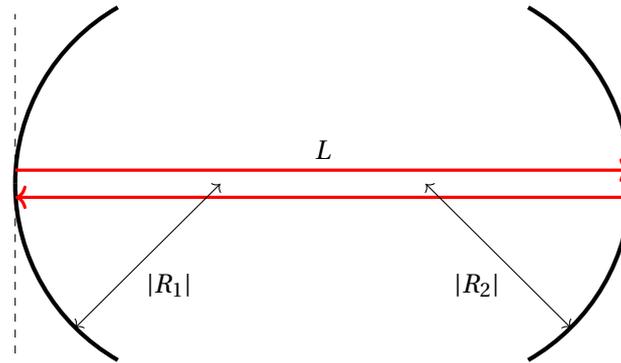
Da ein realistischer  $q$ -Parameter aber einen nicht verschwindenden Imaginärteil haben muss, die Elemente der ABCD-Matrix aber reell sind, muss das Argument der Wurzel in der obigen Gleichung negativ sein. Darüber hinaus ist dann nur eine der beiden Lösungen, nämlich die mit dem negativen Imaginärteil realistisch.

Ein beliebiger Resonator hat also höchstens eine einzige stationäre gaußförmige Mode und auch diese existiert nur, falls die Diskriminante von (3.51) negativ ist. Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die Determinante einer ABCD-Matrix stets 1 ist, vereinfacht sich die Diskriminante zu

$$(A-D)^2 + 4BC = (A-D)^2 + 4(AD-1) = (A+D)^2 - 4 < 0, \quad (3.52)$$

d. h. es muss gelten:  $|A+D| < 2$ .

Diese Gleichung soll jetzt auf einen klassischen Laserresonator, bestehend aus zwei im Abstand  $L$  angebrachten Hohlspiegeln, angewendet werden.



Die entsprechende Transfermatrix lautet

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/R_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/R_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 2L/R_1 & 2L(1 + L/R_1) \\ 2(1/R_1 + 1/R_2 + L/(R_1 R_2)) & 1 + 2L/R_1 + 4L/R_2 + 4L^2/(R_1 R_2) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Die Stabilitätsbedingung für einen aus zwei Hohlspiegeln bestehenden Resonator ergibt sich zu

$$\left| 1 + 2 \left( \frac{L}{R_1} + \frac{L}{R_2} \right) + \frac{2L^2}{R_1 R_2} \right| < 1. \quad (3.54)$$

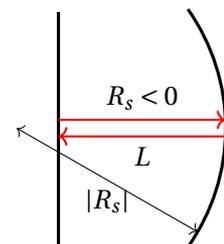
Wie zu erwarten wird die Stabilität des Resonators nur durch das Verhältnis zwischen Krümmungsradien und Resonatorlänge bestimmt. Für eine weitere Auswertung ist die Substitution  $g_1 = 1 + L/R_1$  und  $g_2 = 1 - L/R_2$  sinnvoll. Sie führt zu der Beziehung

$$|2g_1 g_2 - 1| < 1. \quad (3.55)$$

Aus  $2g_1 g_2 - 1 > -1$  folgt  $g_1 g_2 > 0$ , d. h. das Stabilitätsgebiet muss in den Quadranten I und III liegen. Weiter wird das Gebiet  $2g_1 g_2 - 1 < 1$  durch die Funktion  $g_2 = 1/g_1$  begrenzt. Es gilt also

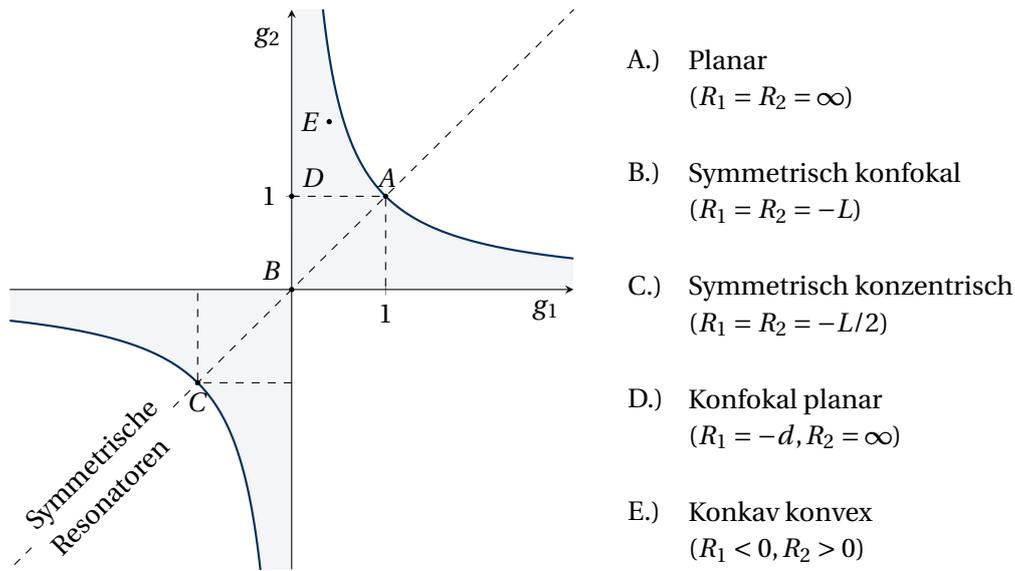
$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1. \quad (3.56)$$

Technisch relevante Laserresonatoren bestehen oft aus einem planaren ( $R_1 = \infty$ ) und einem gekrümmten Spiegel ( $g_1 = 1 + L/R_1 = 1$ ). Es muss dann nach (3.55)  $0 \leq g_2 = 1 + L/R_2 \leq 1$  gelten, d. h. der zweite Spiegel muss konkav ( $R_2 < 0$ ) sein und sein Krümmungsmittelpunkt muss hinter dem planaren Spiegel liegen ( $|R_2| > L$ ), damit er eine stabile gaußförmige Mode besitzt.



Abschließend werden noch die Krümmungsradien der GAUSS-Mode an den Spiegeloberflächen betrachtet. Stellvertretend wird dies für Spiegel 2 am Ende des Umlaufs getan. Die Herleitung für Spiegel 1 erfolgt analog. Dazu wird die Transferbedingung für  $q$  zu  $1/q$  umgeschrieben und angenommen, dass der  $q$ -Parameter nach einem Umlauf wieder unverändert vorliegt. Es ergibt sich also analog zu (3.50)

$$\frac{1}{q} = \frac{C + D/q}{A + B/q} \Rightarrow \left( \frac{1}{q} \right)^2 + \left( \frac{1}{q} \right) \frac{A - D}{B} - \frac{C}{B} = 0 \quad (3.57)$$



**Fig. 19:** Resonator-Stabilitäts-Diagramm: Ein sphärischer Resonator ist stabil, wenn die Parameter  $g_1 = 1 + L/R_1$  und  $g_2 = 1 + L/R_2$  in den schattierten Regionen, welche durch die Koordinatenachsen begrenzt werden, liegen. Alle symmetrischen Resonatoren liegen entlang der Linie  $g_2 = g_1$ .

und damit für

$$\frac{1}{R} = \text{Re} \left( \frac{1}{q} \right) = \text{Re} \left[ \frac{D-A}{2B} \pm \sqrt{\left( \frac{A-D}{2B} \right)^2 + \frac{C}{B}} \right]. \quad (3.58)$$

Durch Einsetzen der konkreten Werte für den Laserresonator ergibt sich

$$\frac{1}{R} = \frac{(1 + 2L/R_1 + 4L/R_2 + 4L^2/(R_1 R_2)) - (1 + 2L/R_1)}{2[2L(1 + L/R_1)]} = \frac{1}{R_2}, \quad (3.59)$$

d. h. der Phasenkrümmungsradius der GAUSS-Mode ist gleich dem Krümmungsradius des Spiegels. Im Fall einer stationären Lasermode sind die Phasenflächen des Feldes also parallel zur Spiegeloberfläche.

Für eine gegebene GAUSS-Mode lässt sich also sofort ein passender Laserresonator konstruieren, indem die Krümmungsradien der Spiegel an der jeweiligen Position angepasst werden. Umgekehrt, d. h. für gegebene Spiegel eine passende GAUSS-Mode zu ermitteln, muss nicht funktionieren, wie oben bereits gezeigt wurde.

Wird im Laserresonator ein planarer Spiegel verwendet, liegt die Strahltaile der sich einstellenden Resonatormode stets auf der Oberfläche des planaren Spiegels.

### 3.4.5 Paraxiale Wellengleichung und höhere Lasermoden

Ziel ist es, analytische Ausdrücke für weitere, nicht einfach gaußförmige Lasermoden zu bestimmen. Da die hergeleitete Lösung für den GAUSS  $u_G(x, y, z)$  Ergebnis einer Approximation war und die HELMHOLTZ-Gleichung nicht exakt löst, wird zuerst die zur Lösung gehörige

Differentialgleichung bestimmt. Es handelt sich um die *paraxiale Wellengleichung*

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2k} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + k \right] u_G(x, y, z) = 0, \quad (3.60)$$

wie durch Einsetzen in (3.19) leicht überprüft werden kann:

$$\begin{aligned} & \left[ i \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2k} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + k \right] u_G(x, y, z) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \bar{U}_0(\alpha, \beta) \left[ -k + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2k} - \frac{1}{2k} (\alpha^2 + \beta^2) + k \right] \\ & \quad e^{ikz} \exp \left[ -i \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2k} z \right] \exp [i(\alpha x + \beta y)] = 0. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Die paraxiale Wellengleichung ist auch für schwache Indexvariationen  $\Delta n$  um einen Indexmittelwert  $\bar{n} (\Delta n = \bar{n})$  gültig, was die numerische Berechnung der Feldausbreitung auch in leicht inhomogenen Indexverteilungen erlaubt. Sie kann auch direkt aus der HELMHOLTZ-Gleichung hergeleitet werden, wenn angenommen wird, dass eine Feldausbreitung überwiegend in  $z$ -Richtung erfolgt, d. h. eine schnelle Phasenevolution entlang der optischen Achse erfolgt. In diesem Fall wird diese schnelle Phasenevolution durch

$$u(x, y, z) = v(x, y, z) \exp(i\bar{k}z) \quad \text{mit} \quad \bar{k} = \bar{n} \frac{\omega}{c} \quad (3.62)$$

abgetrennt, wodurch sich die HELMHOLTZ-Gleichung für die langsam veränderliche Einhüllende  $v(x, y, z)$  zu

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2\bar{k}} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{[\bar{k} + \Delta k(x, y, z)]^2 - \bar{k}^2}{2\bar{k}} \right] v(x, y, z) = 0 \quad (3.63)$$

mit  $\Delta k(x, y, z) = \Delta n(x, y, z) \frac{\omega}{c}$  ergibt.

Im Sinne einer paraxialen Approximation wird angenommen, dass sich  $v(x, y, z)$  nur langsam in Richtung  $z$  entwickelt und daher die zweite Ableitung bzgl.  $z$ , die außerdem noch durch den großen Term  $2\bar{k}$  geteilt wird, vernachlässigt werden kann. Darüber hinaus können schwache Indexmodulationen angenommen werden

$$\frac{[\bar{k} + \Delta k(x, y, z)]^2 - \bar{k}^2}{2\bar{k}} \approx \Delta k(x, y, z), \quad (3.64)$$

wodurch sich die paraxiale Wellengleichung zu

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2\bar{k}} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \Delta k(x, y, z) \right] v(x, y, z) = 0 \quad (3.65)$$

vereinfacht. Diese Gleichung ist nicht nur numerisch sehr einfach zu handhaben, da sich auf eine Vorwärtsintegration in  $z$ -Richtung beschränkt werden kann, sondern ermöglicht auch einen direkten Vergleich mit der Schrödinger-Gleichung der Quantenmechanik, wobei  $z$  der Zeit  $t$ ,  $\bar{k}$  der Masse  $m$  und  $\Delta k(x, y, z)$  dem negativen eines zweidimensionalen und potentiell

zeitabhängigen Potentials  $-V(x, y, t)$  entspricht. Aus dieser Analogie heraus wird klar, dass Licht genauso wie quantenmechanische Teilchen durch Potentialminima durch Gebiete mit erhöhtem Brechungsindex angezogen wird.

Ausgehend von dem bekannten  $u_G(x, y, z)$  werden weitere Lösungen der paraxialen Wellengleichung gesucht. Ist  $u_G(x, y, z)$  eine Lösung, so ist auch jede Ableitung

$$u_{mm}^G = \frac{\partial^m}{\partial x^m} \frac{\partial^n}{\partial y^n} u_G \quad (3.66)$$

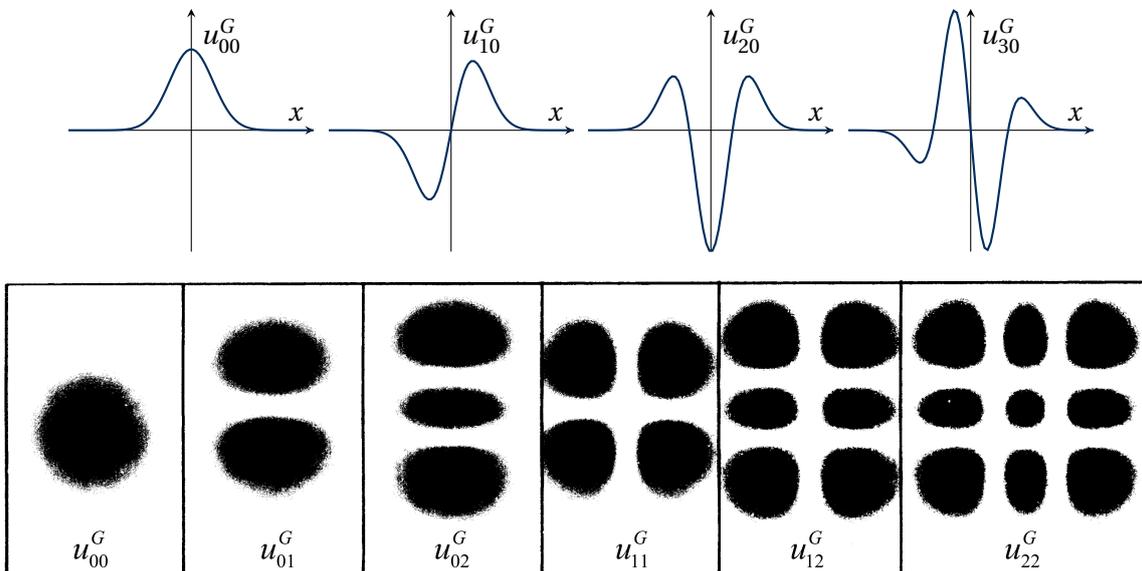
eine solche, da Ableitungen vertauschen und

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^m}{\partial x^m} \frac{\partial^n}{\partial y^n} u_G \left[ i \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2\bar{k}} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \Delta k(x, y, z) \right] u_G(x, y, z) \\ &= \left[ i \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2\bar{k}} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \Delta k(x, y, z) \right] u_{mm}^G(x, y, z) = 0 \end{aligned} \quad (3.67)$$

gilt. Wie am Beispiel von

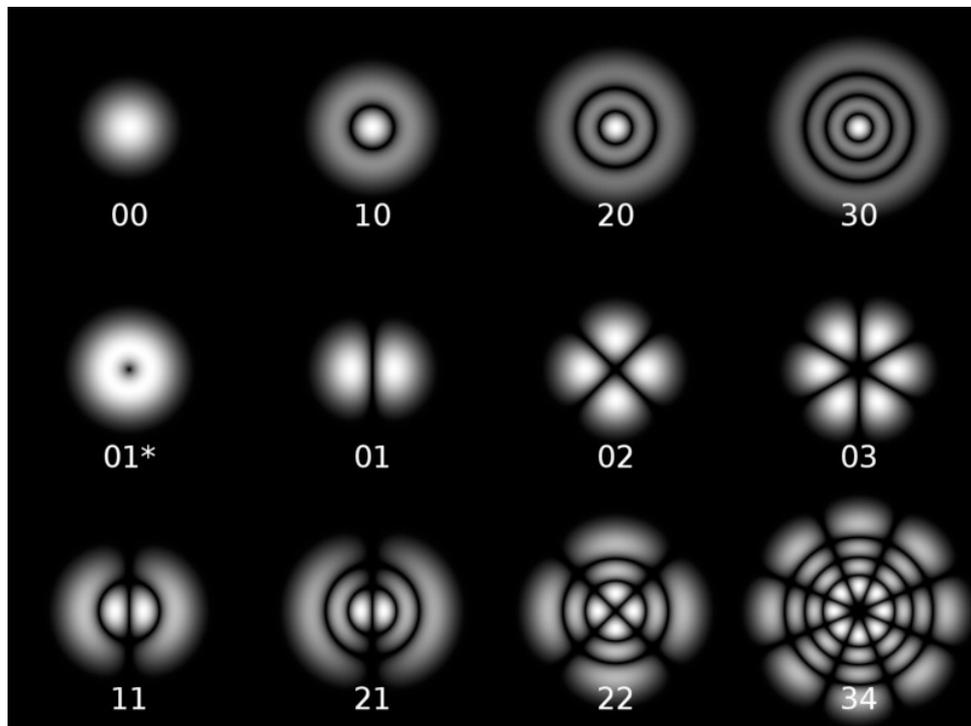
$$\begin{aligned} u_{10}^G &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{A_0 e^{ikz}}{1 + iz/z_R} \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{W_0^2 (1 + iz/z_R)} \right] \\ &= -\frac{A_0 e^{ikz}}{1 + iz/z_R} \frac{2x}{W_0^2 (1 + iz/z_R)} \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{W_0^2 (1 + iz/z_R)} \right] \end{aligned} \quad (3.68)$$

zu sehen ist, bestehen alle  $u_{mm}^G$  aus einem GAUSS und einem Polynom, dass auf die in der Mathematik bekannten GAUSS-Hermite-Polynome zurückgeführt werden kann.



Wie beim ursprünglichen GAUSS-Strahl skalieren alle transversalen Dimensionen ( $x$  und  $y$ ) nach wie vor mit  $1 + iz/z_R$ . Im Besonderen hat sich der Exponent der Funktion nicht geändert. Daher beugen alle  $u_{mn}^G(x, y, z)$  genauso wie der ursprüngliche GAUSS-Strahl und können mit den gleichen  $q$ -Parametern beschrieben werden. In einem Resonator, der eine stabile gaußförmige Mode besitzt, können also prinzipiell auch höhere Moden angeregt werden.

Natürlich müssen neue Resonatormoden nicht unbedingt durch Ableitungen entlang an sich willkürlich orientierter Koordinatenachse gebildet werden. Linearkombinationen von Ableitungen in  $x$ - und  $y$ -Richtung und im Besonderen radiale Ableitungen sind auch möglich. Eine zylindersymmetrische Verallgemeinerung führt zu GAUSS-Laguerre-Polynomen (siehe Abb. 20).



**Fig. 20:** Räumliche Energie Verteilung für Laguerre-GAUSS'sche Moden. Quelle: [optique-ingenieur.org/en/courses/OPI\\_ang\\_M01\\_C03/co/Contenu\\_14.html](http://optique-ingenieur.org/en/courses/OPI_ang_M01_C03/co/Contenu_14.html)

In Laserresonatoren wird die Anregung von Lasermoden aber auch noch durch die Wechselwirkung mit dem verstärkenden Medium bestimmt. Ist das verstärkende Medium auf der optischen Achse positioniert, erfahren höhere Moden gewöhnlich eine geringere Verstärkung, da ihr Feld Nullstellen auf der optischen Achse besitzt und ihr Überlapp mit dem verstärkenden Material daher geringer ist.

## 3.5 Fraunhofer Beugung

### 3.5.1 Entstehung des Beugungsbildes

Es werden folgende *Voraussetzungen* getroffen:

- Große Abstände:  $z \gg$  Objektbreite
- Paraxialität:  $x^2 + y^2 \ll z^2$

Den Ausgangspunkt der Überlegungen stellt die Lösung der HELMHOLTZ-Gleichung dar:

$$u(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \bar{U}_0(\alpha, \beta) \exp \left[ i \sqrt{k^2 - \alpha^2 - \beta^2} z \right] \exp [i(\alpha x + \beta y)]. \quad (3.69)$$

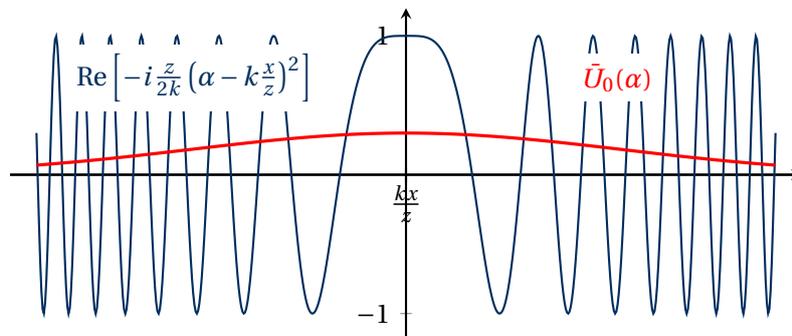
In paraxialer Approximation  $\alpha^2 + \beta^2 \ll k^2$  kann die Wurzel im Exponenten genähert werden zu

$$u(x, y, z) \approx \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \bar{U}_0(\alpha, \beta) \exp \left[ i \left( k - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2k} \right) z \right] \exp [i(\alpha x + \beta y)], \quad (3.70)$$

d. h. im Exponenten tritt ein komplexer GAUSS auf, was sich durch quadratische Ergänzung leicht zeigen lässt:

$$u(x, y, z) \approx \exp \left[ ik \left( z + \frac{x^2 + y^2}{2z} \right) \right] \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \bar{U}_0(\alpha, \beta) \exp \left\{ -i \frac{z}{2k} \left[ \left( \alpha - k \frac{x}{z} \right)^2 + \left( \beta - k \frac{y}{z} \right)^2 \right] \right\}. \quad (3.71)$$

Die Breite des komplexen GAUSS beträgt  $W_G = \sqrt{2k/z}$  und wird also für große Ausbreitungslängen beliebig klein. Das Integral mit dem komplexen GAUSS bringt aber nur im Zentrum des GAUSS einen von Null verschiedenen Beitrag, da sich Beiträge aus Gebieten außerhalb des Zentrums wegen der immer schneller werdenden Oszillationen gegenseitig kompensieren. Praktisch beeinflusst nur die Fourierkomponente  $\bar{U}_0(\alpha = k \frac{x}{z}, \beta = k \frac{y}{z})$  aus dem Zentrum des komplexen GAUSS das Integral

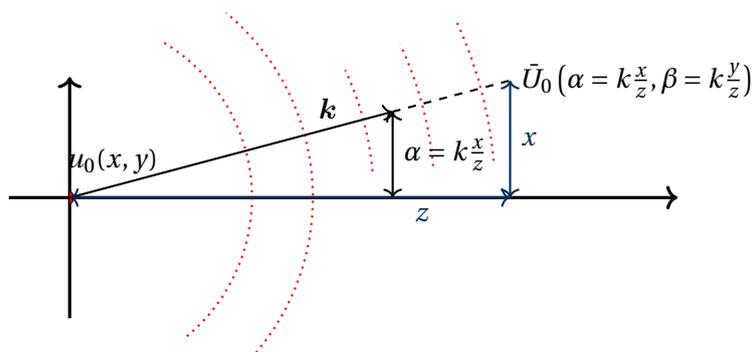


Nun kann das Integral ausgeführt werden und es ergibt sich

$$u(x, y, z) \approx \frac{(2\pi)^2}{i\lambda} \frac{\exp\left[ik\left(z + \frac{x^2+y^2}{2z}\right)\right]}{z} \bar{U}_0\left(\alpha = k\frac{x}{z}, \beta = k\frac{y}{z}\right). \quad (3.72)$$

Der erste Term stellt im Wesentlichen eine Kugelwelle dar, wobei  $r$  für kleine  $x$  und  $y$  entwickelt wurde ( $r = \sqrt{z^2 + x^2 + y^2} \approx z + \frac{x^2+y^2}{2z}$ ). Das gleiche gilt auch für die Richtungsabhängigkeit im Argument der Fouriertransformierten. Eine, allerdings wesentlich umfangreichere Rechnung zeigt, dass sich das Ergebnis auch auf den nicht paraxialen Fall verallgemeinern lässt zu:

$$u(x, y, z) \approx \frac{(2\pi)^2}{i\lambda} \frac{e^{ikr}}{r} \bar{U}_0\left(\alpha = k\frac{x}{r}, \beta = k\frac{y}{r}\right). \quad (3.73)$$



### Physikalische Interpretation

- $\bar{U}_0(\alpha = k\frac{x}{r}, \beta = k\frac{y}{r})$ : Amplitude der Welle, die in Richtung des Beobachtungspunktes emittiert wird. Die Richtung der beobachteten Welle wird durch das Verhältnis  $x/r$  bzw.  $y/r$  definiert. Das Beugungsbild hängt nur von der Emissionsrichtung ab, verändert sich also mit wachsendem Abstand nicht mehr qualitativ, sondern dehnt sich nur noch proportional zum Abstand aus
- $\frac{e^{ikr}}{r}$ : Der im Beugungsbild beobachtete Intensitätsabfall entspricht dem einer Kugelwelle, die vom Objekt emittiert wurde.

### 3.5.2 Grenzen der Fraunhofer-Näherung

Ein qualitativ unveränderliches Beugungsbild liegt genau dann vor, wenn die Fraunhofer-Näherung angewendet werden kann. Ein wesentliches Kriterium war dabei, dass das Fourierpektrum der Objektverteilung im Bereich der Breite des komplexen GAUSS nicht mehr variiert. Es wird daran erinnert, dass für einen GAUSS der Breite  $W_0$  das Fourierpektrum

die Breite  $2/W_0$  hat. Ein qualitativ ähnlicher Zusammenhang besteht für sämtliche Objektformen. Damit führt die Bedingung, dass die Breite des komplexen GAUSS  $\ll$  als Breite des Fourierspektrums der Objektverteilung ist zu der Beziehung

$$\sqrt{\frac{2k}{z}} \ll \frac{2}{W_0}, \quad (3.74)$$

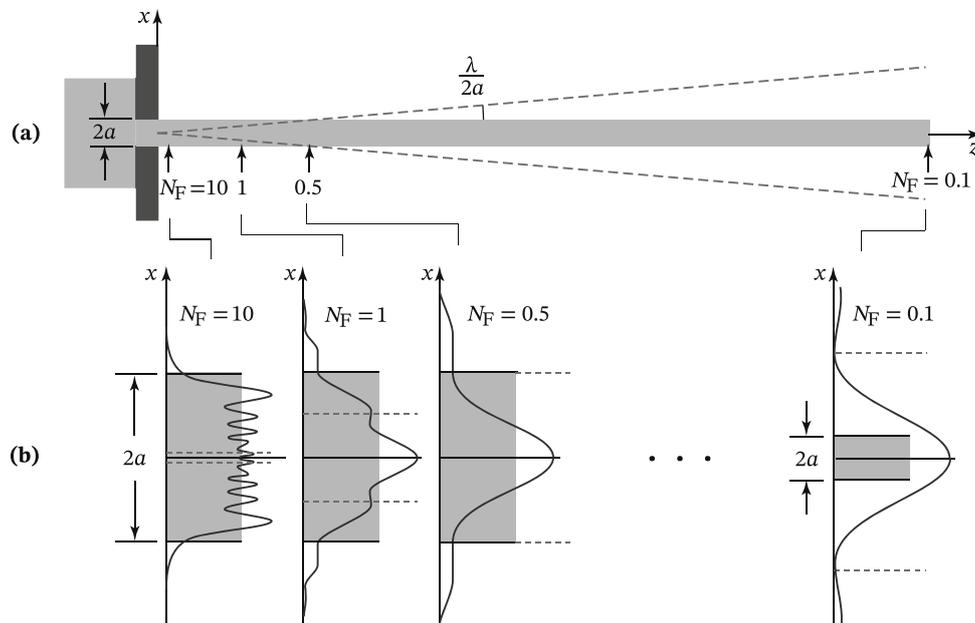
wobei  $W_0$  die Objektbreite darstellen soll. Wird diese Beziehung umgeformt, ergibt sich als Voraussetzung für die Anwendung der Fraunhofernäherung:

$$z \gg \frac{\pi W_0^2}{\lambda} = z_R, \quad (3.75)$$

d. h. der Abstand zwischen Objekt und Beugungsbild sollte größer als der von der Analyse der Ausbreitung GAUSS-förmiger Strahlen bekannte Beugungsparameter sein. Traditionell wird die Gültigkeit der Fraunhofer Näherung durch die Bestimmung der FRESNEL-Zahl

$$N_F = \frac{a^2}{\lambda \cdot z} \quad \text{mit } a: \text{ halbe Objektbreite} \quad (3.76)$$

ermittelt. Wird  $W_0 = 2a$  gesetzt und (3.75) benutzt, ergibt sich eine Gültigkeit der Fraunhofer Näherung für FRESNEL-Zahlen  $N_F \ll 1/(4\pi)$ . Tatsächlich ändert sich die Form des Beugungsbildes gewöhnlich schon nicht mehr, wenn die FRESNEL-Zahl 0.1 oder kleiner ist. Deutliche Beugungseffekte der Gesamtstruktur sind gewöhnlich nur außerhalb der Bereiche des geometrischen Schattens sichtbar.



**Fig. 21:** Beugung hinter einem Spalt der Breite  $2a$ . Schraffiertes Gebiet: geometrischer Schatten der Öffnung, gestrichelte Linie: Position des ersten Minimums des Fraunhofer-Beugungsbildes a.) Prinzipskizze des Aufbaus, b) Beugungsbilder für 4 FRESNEL-Zahlen und entsprechende Ausbreitungslängen. Quelle: Saleh, Bahaa EA, and Malvin Carl Teich. Grundlagen der Photonik. John Wiley & Sons, 2020 (3. Auflage), Seite 94.

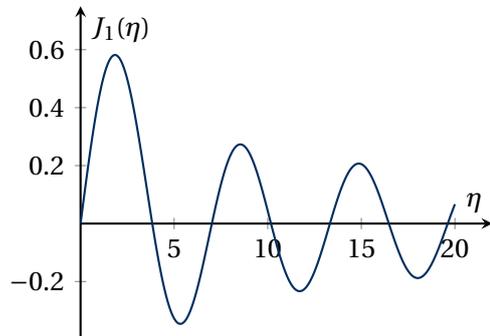
### 3.5.3 Beugungsbilder

#### Kreisförmige Feldverteilung (Lochblende)

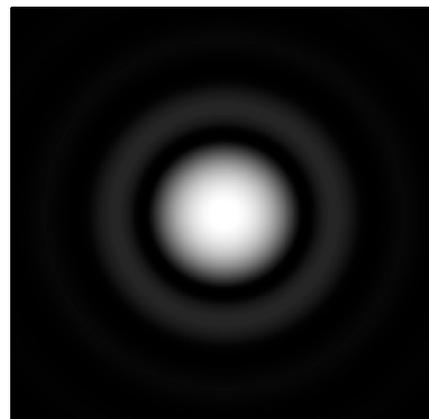
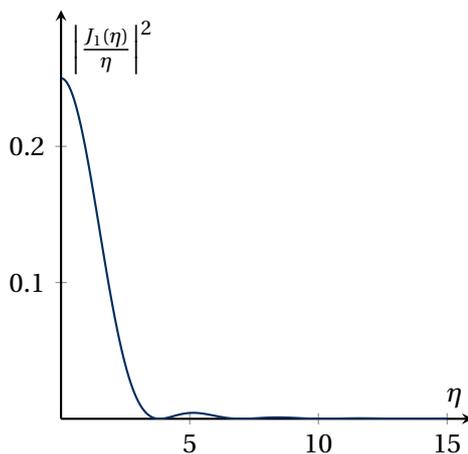
Eine kreisförmige Lochblende mit Radius  $a$  erzeugt eine Feldverteilung von:

$$u_0(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x^2 + y^2 \leq a^2 \\ 0 & \text{für } x^2 + y^2 > a^2. \end{cases}$$

Die Fouriertransformation erhält die Zylindersymmetrie und es ergibt sich in Fraunhofer Näherung das sogenannte Airy-Scheibchen:



$$|u(x, y, z)|^2 \sim \left| \frac{J_1(\eta)}{\eta} \right|^2 \quad \text{mit } \eta = ka \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r} = 2\pi \frac{a R}{\lambda r} \quad (3.77)$$

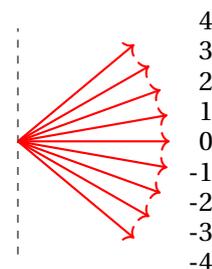


Die Airy-Funktion  $J_1(\eta)/\eta$  stellt das zylindersymmetrische Äquivalent zum  $\text{sinc}(x)$  dar, wobei  $J_1$  die Bessel-Funktion 1. Ordnung ist. Ihre erste von Null verschiedene Nullstelle liegt bei  $\eta \approx 1.22\pi$  und sie fällt für große  $\eta$  wie  $1/\sqrt{\eta}$ . Damit fällt die Intensität des Beugungsbildes der Lochblende wie  $1/\eta^3$ , weshalb schon das erste Nebenmaximum neben dem Hauptmaximum fast verschwindet (es besitzt nur ca. 1,7% der Intensität des Hauptmaximums).

#### Beugungsbilder periodischer Strukturen (Gitter)

Im Folgenden werden nur 1D-Strukturen betrachtet. Die Feldverteilung nimmt die Form  $u_0(x) = u_0(x + d)$  mit der Gitterperiode  $d$  an. Periodische Strukturen können stets in eine Fourierreihe entwickelt werden

$$u_0(x) = \sum_m a_m \exp\left(im \frac{2\pi}{d} x\right). \quad (3.78)$$



Jede Fourierkomponente dieser Struktur führt zu einer  $\delta$ -Distribution im Fourierspektrum

$$\bar{U}_0(\alpha) = \sum_m a_m \delta\left(\alpha - m \frac{2\pi}{d}\right), \quad (3.79)$$

d. h. das Gitter emittiert entsprechend seiner Fourierzerlegung eine Serie von Wellen mit den transversalen Wellenzahlvektoren  $\alpha_m = m \frac{2\pi}{d}$  unter den Winkeln  $\varphi_m$ , definiert durch  $\sin \varphi_m = \frac{\alpha_m}{k} = m \frac{\lambda}{d}$ . Im Beugungsbild ist daher eine Serie von diskreten Punkten zu sehen. In Fraunhofer-Näherung (Paraxialität) ergibt sich die Position der sogenannten Beugungsordnungen zu

$$u(x, z) : \bar{U}_0\left(\alpha = k \frac{x}{r}\right) = \sum_m a_m \delta\left(k \frac{x}{r} - m \frac{2\pi}{d}\right). \quad (3.80)$$

### Babinet'sches Prinzip

Untersucht wird die Wirkung zueinander inverser Blendenstrukturen, die Intensitätsverteilungen der Objektwelle erzeugen, die zueinander komplementär sind. Wenn  $u_0(x, y)$  nur zwei Werte, z. B. 0 und 1 annimmt, dann ist die dazu komplementäre Struktur

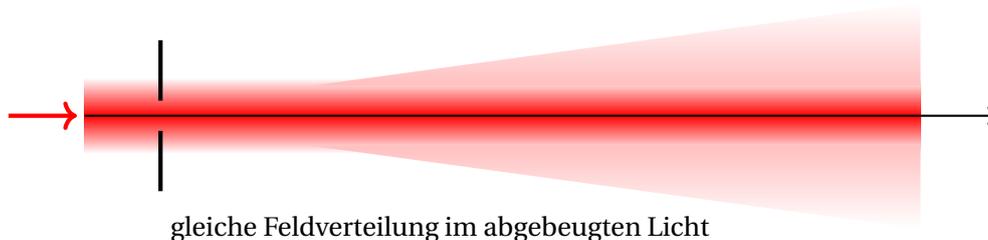
$$\tilde{u}_0(x, y) = 1 - u_0(x, y). \quad (3.81)$$

Das Fraunhofersche Beugungsbild der inversen Struktur ist damit

$$\begin{aligned} |\tilde{u}(x, y, z)|^2 &\sim \left| \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' [1 - u_0(x', y')] \exp\left[-i\left(k \frac{x}{r} x' + k \frac{y}{r} y'\right)\right] \right|^2 \\ &\sim \left| \delta\left(k \frac{x}{r}\right) \delta\left(k \frac{y}{r}\right) - \bar{U}_0\left(k \frac{x}{r}, k \frac{y}{r}\right) \right|^2. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Damit gilt für  $x \neq 0, y \neq 0$ :  $|u(x, y, z)|^2 = |\tilde{u}(x, y, z)|^2$ , d. h. außerhalb der sogenannten nullten Beugungsordnung unterscheiden sich die Beugungsbilder von Originalstruktur und komplementärer Struktur nicht (Babinet'sches Prinzip).

Streng genommen erfüllen allerdings entweder die Originalstruktur oder die komplementäre Struktur nicht die Voraussetzungen für die Gültigkeit der Fraunhofer-Näherung, da eine von beiden Strukturen unendlich ausgedehnt sein müsste. Das Babinet'sche Prinzip gilt nur außerhalb des direkt von der Beleuchtungsquelle beleuchteten Bereiches des Beugungsbildes.



## 3.6 Fourier-Optik

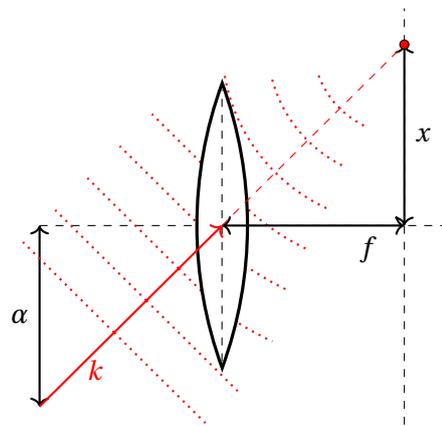
### 3.6.1 Fouriertransformation an dünnen Linsen

#### Ebene Wellen

Eine ebene Welle wird durch eine dünne Linse auf einen Punkt in der Brennebene ( $z = f$ ) fokussiert, wobei die Position des Brennpunkts durch den Mittelpunktstrahl, der nicht gebrochen wird, bestimmt wird. Für die Position des Fokuspunktes gilt:

$$\begin{aligned} \frac{x}{f} &= \frac{\alpha}{\sqrt{k^2 - \alpha^2 - \beta^2}} \approx \frac{\alpha}{k} \\ \frac{y}{f} &= \frac{\beta}{\sqrt{k^2 - \alpha^2 - \beta^2}} \approx \frac{\beta}{k}. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Ein an den Koordinaten  $(x, y)$  in der Fokusebene aufgefundener Fokuspunkt entspricht also einer Welle mit den transversalen Ausbreitungskonstanten  $\alpha = kx/f$  bzw.  $\beta = ky/f$ .



#### Beliebige Anfangsverteilung $u_0(x, y)$

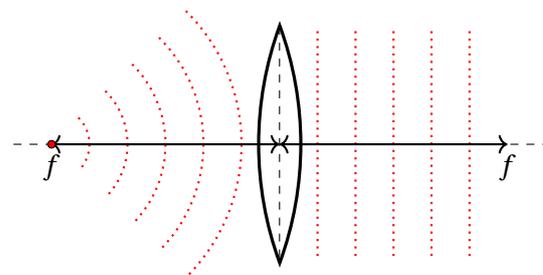
Eine beliebige Anfangsverteilung kann als Summe von ebenen Wellen dargestellt werden, wobei sich die Amplituden der beteiligten Wellen durch eine Fouriertransformation ergeben. Es gilt für die Intensitätsverteilung in der Brennebene daher:

$$|u_f(x, y)|^2 = 2\pi \left(\frac{k}{f}\right)^2 \left| \bar{U}_0 \left( \alpha = k \frac{x}{f}, \beta = k \frac{y}{f} \right) \right|^2, \quad (3.84)$$

wobei sich der Vorfaktor aus der zu gewährleistenden Energieerhaltung ergibt. Tatsächlich stimmt aber nur die Intensitätsverteilung mit dem Absolutquadrat der Fouriertransformierten überein. Im Allgemeinen, d. h. für beliebige Objektpositionen stimmt die Phasenverteilung in der Brennebene nicht mit der, der Fouriertransformation überein.

Weiter oben wurde bereits ermittelt, dass die Intensitätsverteilung in der Brennebene dem Absolutquadrat der Fouriertransformierten der Objektverteilung entspricht. Tatsächlich ist auch eine komplette, d. h. phasenrichtige, optische Fouriertransformation möglich, dafür muss nur die richtige Objektposition gefunden werden.

Dazu wird eine punktförmige Lichtquelle auf der optischen Achse mit einer Feldverteilung  $u_0(x, y) \sim \delta(x)\delta(y)$  verwendet, bei der die Fouriertransformation in eine Konstante  $\bar{U}_0(\alpha, \beta) \sim 1$  umgeformt wird, d. h. in eine ebene Welle mit flacher Phase, die entlang der optischen Achse propagiert. Genau diese Forderung wird aber durch einen Punkt im vorderen Brennpunkt einer dünnen Linse erfüllt: Das von ihm ausgehende Licht

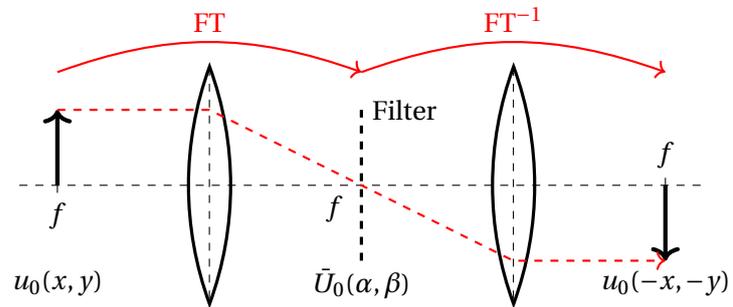


wird zu einer ebenen Welle mit flacher Phase umgeformt. Zwischen den beiden Brennebenen einer idealen Linse findet also eine Fouriertransformation statt.

## 3.6.2 Bildverarbeitung

Konfiguration: 4- $f$ -Anordnung zur optischen Fouriertransformation

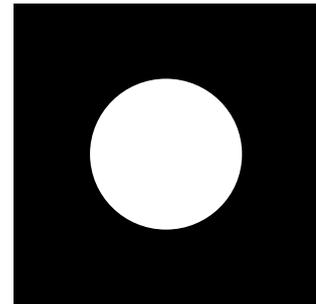
In einem sogenannten 4- $f$ -Aufbau aus zwei Linsen der Brennweite  $f$ , die im Abstand  $2f$  positioniert sind, wird eine zweifache Fouriertransformation ausgeführt, die am Schluss wieder zur seitenverkehrten Originalverteilung führt. Dieser Aufbau ermöglicht eine vergleichsweise problemlose Manipulation des Fourierpektrums der Feldverteilung, indem in die Brennebene ein Filter eingebracht wird.



## a.) Begrenzung des Frequenzspektrums (Kontrastreduktion)

Wird das Frequenzspektrum nur auf die Mitte begrenzt, dann gehen Kanteninformationen verloren und das Bild erscheint weichgezeichnet. Für die Transferfunktion gilt folgender Ausdruck:

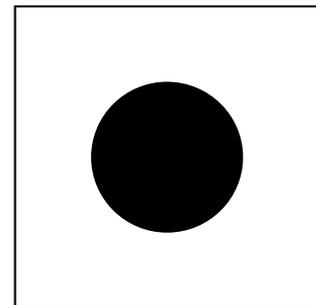
$$T(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x^2 + y^2 \leq a^2 \\ 0 & \text{für } x^2 + y^2 > a^2 \end{cases} \quad (3.85)$$



## b.) Ausblenden langwelliger Komponenten (Kontrasterhöhung)

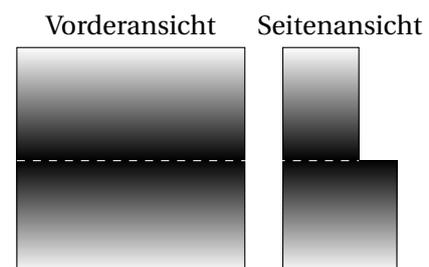
Wird das Frequenzspektrum in der Mitte unterdrückt, werden langwellige Komponenten unterdrückt und auftretende Kanten (hohe Frequenzen) verstärkt sichtbar. Für die Transferfunktion gilt analog:

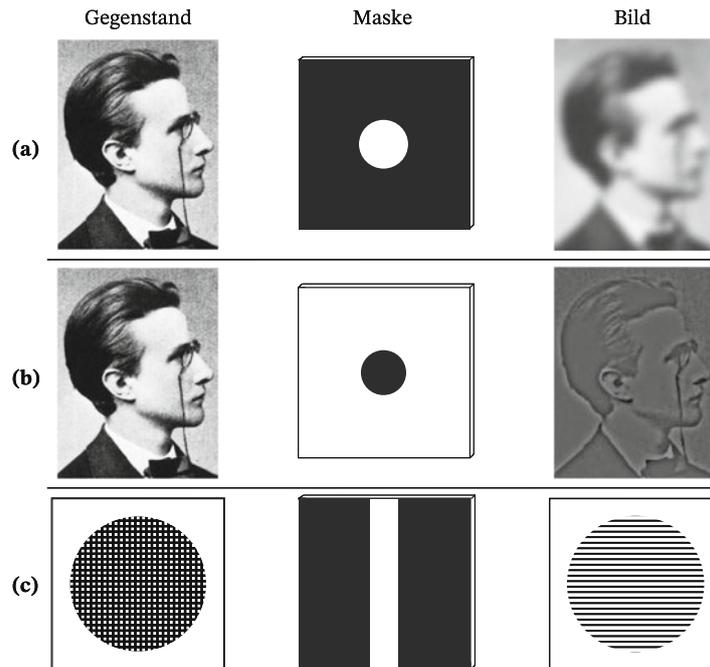
$$T(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x^2 + y^2 \leq a^2 \\ 1 & \text{für } x^2 + y^2 > a^2 \end{cases} \quad (3.86)$$



## c.) Optisches Differenzieren

eine Differentiation (z. B. nach  $x$ ) entspricht im Fourierraum einer Multiplikation mit der äquivalenten Koordinate (z. B.  $\alpha$ ). Wirkt auf die Feldverteilung in der Brennebene bei  $2f$  eine Filterfunktion, die proportional zu einer räumlichen Koordinate ist (z. B.  $T(x, y) \sim x$ ), ergibt sich am Ausgang der 4- $f$ -Anordnung die nach der entsprechenden Koordinate differenzierte Eingangsfieldverteilung.





**Fig. 22:** Beispiele von Objekt, Maske und gefiltertem Bild für drei räumliche Filter: a.) Tiefpassfilter, b.) Hochpassfilter, c.) Vertikaler Filter. Quelle: Saleh, Bahaa EA, and Malvin Carl Teich. Grundlagen der Photonik. John Wiley & Sons, 2020 (3. Auflage), Seite 101.

Ein solcher Filter muss eine proportional zur Koordinate ansteigende Transmission (entsprechend  $|x|$ ) und zusätzlich einen  $\pi$ -Phasensprung beim Vorzeichenwechsel der Koordinate aufweisen (bei  $x = 0$ ). Das wird durch eine raumabhängige Schwärzung und eine stufenförmige Filterdicke realisiert. Die Höhe der Stufe  $d$  wird so gewählt, dass eine Phasenverschiebung von  $\pi$  induziert wird

$$d = \frac{\lambda_0}{n_{\text{Filter}} - 1}. \quad (3.87)$$

Darüber hinaus eignet sich die Fourierebene nicht nur ausgezeichnet zur Manipulation des Originalbildes, sondern auch zur direkten Bildauswertung. Da die Intensitätsverteilung in der Fourierebene für ideale Linsen nicht von der Objektposition abhängt, ist eine Bilderkenntnis z. T. wesentlich einfacher durch Auswertung der Intensitätsverteilung in der Brennebene zu realisieren.

## 3.7 Auflösungsgrößen

### 3.7.1 Teleskope (Rayleigh-Kriterium)

Die Frage, die sich jeder Astronom eines Tages stellt ist: *Wann kann ich zwei benachbarte Sterne noch optisch voneinander trennen?*

Um diese Frage zu beantworten, werden zunächst einige *Voraussetzungen* getroffen. Sterne sind praktisch unendlich weit entfernt, d. h. auf die Erde fallen ebene Wellen ein, die sich nur

durch ihre Ausbreitungsrichtung unterscheiden. Wegen des kleinen Bildfeldes kann Paraxialität vorausgesetzt werden.

Wird nun angenommen, dass die von einem Stern ausgehende Welle durch die transversalen Ausbreitungskonstanten  $\alpha_0$  und  $\beta_0$  gegeben ist, ergibt sich das Feld am Eingang des Teleskops zu  $u_0(x, y) = T(x, y)e^{i\alpha_0 x} e^{i\beta_0 y}$ , wobei die Transferfunktion  $T(x, y)$  durch die Eintrittspupille des Objektivs gegeben ist und normalerweise die Form (3.85) hat. Die Fouriertransformierte des Eingangsfeldes

$$\bar{U}_0(\alpha, \beta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy T(x, y) e^{-i[(\alpha - \alpha_0)x + (\beta - \beta_0)y]} \quad (3.88)$$

stellt die um  $\alpha_0$  und  $\beta_0$  verschobene Fouriertransformierte der Transferfunktion und damit ein entsprechend verschobenes Airy-Scheibchen dar. Die Intensitätsverteilung in der Brennebene ergibt sich so zu:

$$|u_f(x, y)|^2 \sim \left| \frac{J_1\left(k \frac{a}{f} \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\right)}{k \frac{a}{f} \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \right|^2 \quad \text{mit } x_0 = \frac{\alpha_0}{k} f, \quad y_0 = \frac{\beta_0}{k} f \quad (3.89)$$

Jeder Stern bildet also in der Brennebene ein um  $x_0$  und  $y_0$  verschobenes Airy-Scheibchen. Die Bilder zweier Sterne gelten noch als optisch voneinander trennbar, wenn das Zentrum des Airy-Scheibchens des einen Sterns auf die Nullstelle des Airy-Scheibchens des anderen Sterns fällt. Da die Nullstelle der Airy-Funktion bekannt ist ( $\eta \approx 1.22\pi$ ), muss die Verschiebung beider Airy-Scheibchen in der Bildebene mindestens  $\delta x_0$  betragen, wobei  $\delta x_0$  die Beziehung

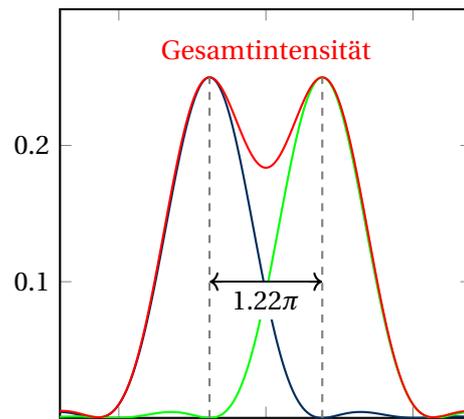
$$k \frac{a}{f} \delta x_0 > 1.22\pi \quad \text{oder} \quad \delta x_0 > 0.61 \frac{\lambda f}{a} \quad (3.90)$$

erfüllen muss. Das entspricht einer Differenz der transversalen Ausbreitungskonstanten der beiden ebenen Wellen von  $\delta \alpha_0 > 1.22 \frac{\pi}{a}$  oder einer minimalen noch aufzulösenden Winkeldifferenz  $\delta \varphi_0$  von

$$\boxed{\delta \varphi_0 > 0.61 \frac{\lambda}{a}} \quad a : \text{Öffnungsradius des Teleskops.} \quad (3.91)$$

Interessanterweise ist diese minimale noch auflösbare Winkeldifferenz nicht mehr von der Brennweite des Objektivs abhängig.

Die obige Herleitung und die daraus resultierenden Auflösungsgrenzen gelten analog auch für Fotoobjektive und andere abbildende optische Systeme, solange *Paraxialität* gewährleistet ist und keine Interferenz zwischen den beiden noch zu trennenden Objektpunkten auftritt. In der obigen Herleitung wurden Interferenzeffekte vernachlässigt, d. h. es wurde davon



überlagerte Airy-Scheibchen

ausgegangen, dass sich die Intensitäten der beiden Airy-Scheibchen einfach addieren, eine Annahme, die für Objekte, die von der gleichen Beleuchtungsquelle angestrahlt werden, wie das z. B. in der Mikroskopie der Fall ist, nicht mehr erfüllt ist.

### 3.7.2 Mikroskope (Abbe'sche Auflösungsgrenze)

Das Rayleigh Kriterium kann auf Mikroskope nicht direkt angewendet werden, da in der hochauflösenden Mikroskopie auch extrem nicht paraxiale Strahlen auftreten und bei zwei unterschiedlichen Objektpunkten Interferenzen zu erwarten sind. Ernst Abbe verwendete daher für die Mikroskopie einen anderen Ansatz und definierte die Auflösungsgrenze eines Mikroskops durch die kleinste periodische Struktur, die noch abgebildet wird.

Wird wieder eine 1D-periodische Struktur als Objektverteilung mit der Gitterperiode  $d$  angenommen (vgl. Gleichung (3.78) und (3.79))

$$u_0(x) = u_0(x + d) = \sum_m a_m \exp\left(i m \frac{2\pi}{d} x\right), \quad (3.92)$$

so besteht das Fourierspektrum aus diskreten Punkten

$$\tilde{U}_0(\alpha) = \sum_m a_m \delta\left(\alpha - m \frac{2\pi}{d}\right), \quad (3.93)$$

d. h. die periodische Struktur emittiert nur in bestimmte Richtungen, die sogenannten Beugungsordnungen, unter den Winkeln  $\varphi_m$ , definiert durch

$$\sin \varphi_m = \frac{\alpha_m}{k} = m \frac{\lambda}{d} \quad (3.94)$$

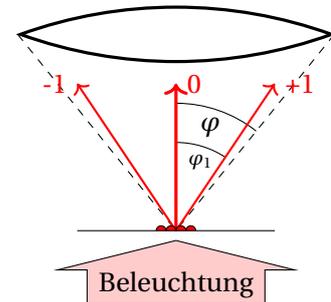
entsprechend einem transversalen Wellenzahlvektor  $\alpha_m = m \frac{2\pi}{d}$ . Da nur die höheren Beugungsordnungen ( $m \neq 0$ ) Information über die Gitterperiode tragen, muss also mindestens die erste Beugungsordnung eingefangen werden, damit Rückschlüsse auf die Gitterperiode gezogen werden können. Der halbe Öffnungswinkel  $\varphi$  muss also größer als der Emissionswinkel der 1. Beugungsordnung  $\varphi_1$  sein:

$$\sin \varphi \geq \sin \varphi_1 = \frac{\lambda}{d} = \frac{\lambda_0}{nd} \quad (3.95)$$

mit der Vakuumwellenlänge  $\lambda_0$  und der Brechzahl  $n$ . Damit ergibt sich für die noch auflösbare Periodenlänge

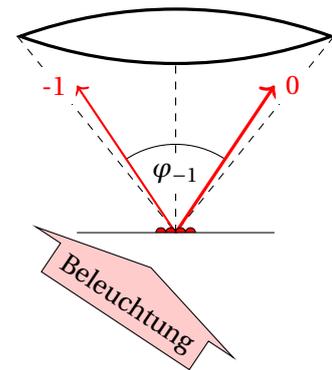
$$d \geq \frac{\lambda_0}{n \sin \varphi} = \frac{\lambda_0}{NA} \quad \text{Abbe'sche Auflösungsgrenze} \quad (3.96)$$

mit der *numerischen Apertur*  $NA = n \sin \varphi$ .



### Köhlersche Beleuchtung

Tatsächlich wird bei der Erfüllung obiger Bedingungen aber sowohl die +1., als auch die -1. Beugungsordnung eingefangen, es wird aber neben der nullten Beugungsordnung nur noch eine Weitere als Referenz benötigt. Wird nun die Beleuchtungsquelle geneigt, werden auch die verschiedenen Beugungsordnungen schräg abgestrahlt. Es gelingt dann auch, bei kleineren Strukturen und bei einem entsprechend doppelt so weit aufgespreizten Beugungsbild noch eine 1. und die 0. Beugungsordnung einzufangen. Es ergibt sich eine in etwa verdoppelte Auflösung und die kleinste auflösbare Struktur zu:



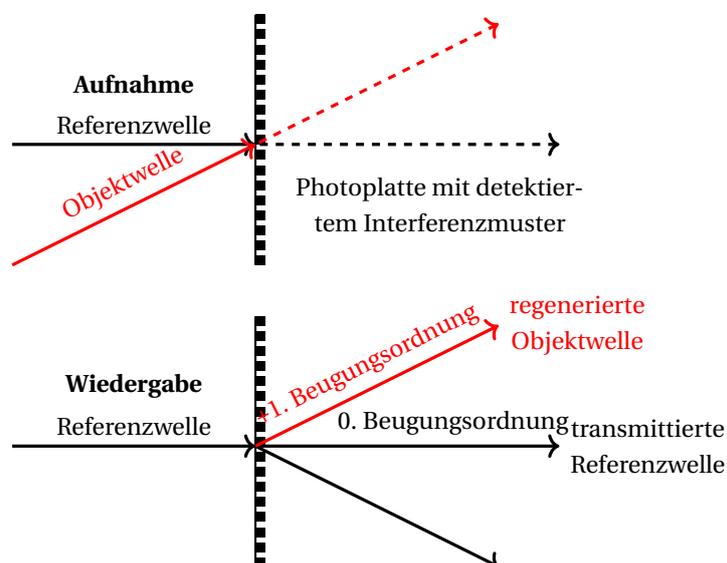
$$d_{\min} \approx \frac{\lambda_0}{2NA} \quad (3.97)$$

Ganz offensichtlich wird die Auflösung entscheidend durch drei Faktoren bestimmt:

- die Wellenlänge  $\lambda$
- die Numerische Apertur  $NA$ , die selbst von der Brennweite  $f$ , dem Radius der Eintrittspupille des Objektivs  $a$  ( $\tan \varphi = a/f$ ) und von der Brechzahl  $n$  des Materials zwischen Objekt und Objektiv abhängt.
- die Struktur der Beleuchtungswelle. Die Auflösung lässt sich verbessern, wenn vor allem schräge Beleuchtungsstrahlen verwendet werden (Köhler'sche Beleuchtung)

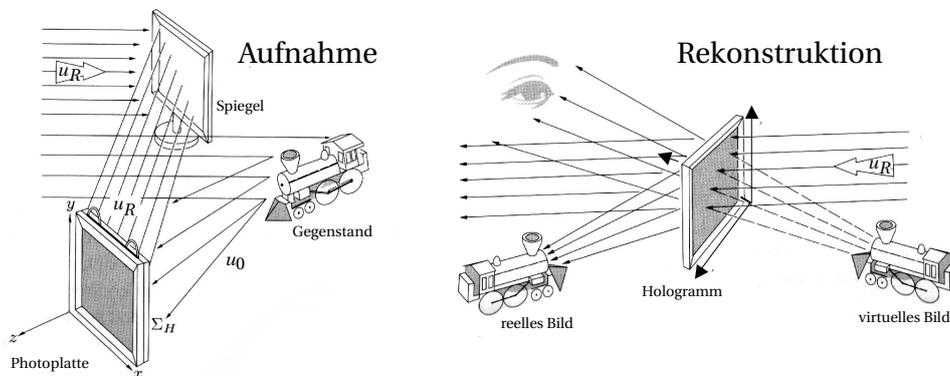
## 3.8 Holographie

Wegen der hohen Frequenz des optischen Feldes ist nur eine Detektion der Intensität und nicht der Phase möglich. Damit geht jede Information über die Richtung einer weiteren Feldausbreitung verloren und die Objektwelle kann nicht mehr vollständig rekonstruiert werden. In der Holographie wird dieses Problem umgangen, indem die Objektwelle mit einer Referenzwelle überlagert und das entstehende Interferenzmuster detektiert wird.



Der Vorgang der Aufnahme und folgenden Wiedergabe lässt sich am einfachsten beim Studium der Überlagerung zweier ebener Wellen auf einer Photoplatte verstehen. Zur "Aufnahme" wird das bei der Überlagerung von Objekt- und Referenzwelle entstehende Beugungsgitter detektiert. Wird das entstandene Amplitudengitter wieder mit der Referenzwelle beleuchtet, wird die Objektwelle in der +1. Beugungsordnung generiert. Ein Hologramm stellt jetzt nur noch die Überlagerung sehr vieler solcher Interferenzgitter dar, die die verschiedenen vom Objekt ausgesandten ebenen Wellen rekonstruieren. Wird eine beliebig strukturierte Objektwelle  $u_0(x, y)$ , aber eine im Idealfall unstrukturierte Referenzwelle  $u_R$  auf der Photoplatte angenommen, so entsteht eine Schwärzung, die für kleine Intensitäten zu folgender Transmissionsfunktion der Photoplatte führt:

$$T(x, y) = T_0 - \gamma |u_0(x, y) + u_R|^2. \tag{3.98}$$



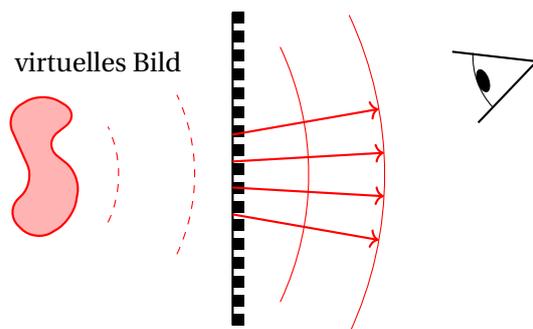
Wird die Photoplatte nachträglich mit der Referenzwelle  $u_R$  beleuchtet, entsteht hinter der Photoplatte folgende Feldstruktur:

$$\begin{aligned} u_+(x, y) &= T(x, y) u_R = \left[ T_0 - \gamma |u_0(x, y) + u_R|^2 \right] u_R \\ &= \left[ T_0 - \gamma |u_0(x, y)|^2 - \gamma |u_R|^2 \right] u_R - \gamma u_R^2 u_0(x, y)^* - \gamma |u_R|^2 u_0(x, y). \end{aligned} \tag{3.99}$$

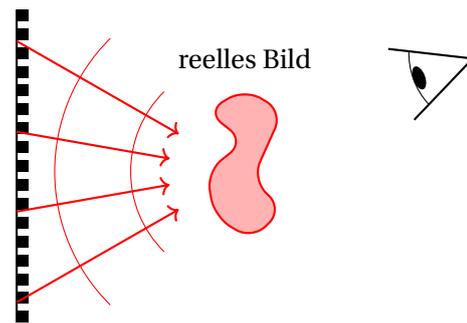
Die drei auftretenden Terme haben folgende Bedeutung:

$\left[ T_0 - \gamma |u_0(x, y)|^2 - \gamma |u_R|^2 \right] u_R$  ist, da weder Objektwelle noch Referenzwelle auf die Photoplatte fokussiert wurden, im Wesentlichen unstrukturiert und stellt die nullte Beugungsordnung des Hologramms dar.

Der Term  $-\gamma u_R^2 u_0(x, y)^*$  ist die rekonstruierte Objektwelle oder die +1. Beugungsordnung, die sich hinter der Photoplatte ausbreitet. Sie erzeugt ein virtuelles Bild des Objektes exakt an der Stelle des Objektes, d. h. vor der Photoplatte. Dieses Bild kann durch die Photoplatte wie durch ein Fenster beobachtet werden.



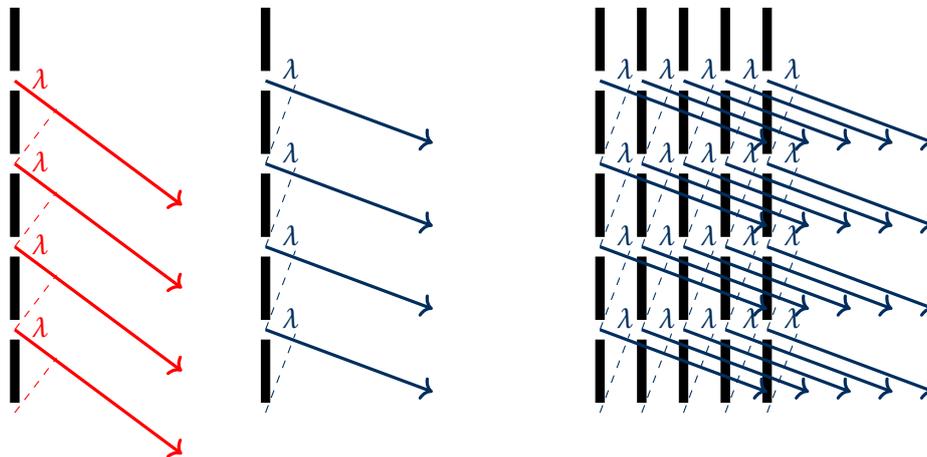
Der Term  $-\gamma|u_R|^2 u_0(x, y)$  generiert die phasenkonjugierte Objektwelle, d. h. der Strahlengang wird invertiert. Es entsteht ein reelles Bild des Objektes hinter der Photoplatte. Bei einer sehr schräg auf die Photoplatte einfallenden Referenzwelle kann das reelle Bild verschwinden, ähnlich wie bei einem Gitter einzelne Ordnungen bei schräger Einstrahlung verschwinden können.



### Farbige Hologramme - Dickschichthologramme

Konventionelle Hologramme stellen im Wesentlichen nur zweidimensionale Amplituden- oder Phasengitter dar. Eine Variation der Wellenlänge der zum Auslesen benutzten Referenzwelle führt nur zu einer Größenänderung des erzeugten Bildes, ähnlich wie sich die Position der Beugungsordnungen eines Gitters mit der Wellenlänge verschiebt, ohne, dass Beugung völlig unterdrückt wird.

Beim Dickschichthologramm wird eine mehrere Wellenlängen dicke, photosensitive Schicht verwendet und ein dreidimensionales Interferenzmuster detektiert. Damit muss das gebeugte Licht die Bedingung konstruktiver Interferenz nicht nur in transversaler, sondern auch in longitudinaler Richtung erfüllen, was nur für die ehemals zur Aufzeichnung verwendete Wellenlänge möglich ist. Das Hologramm kann also nur noch mit einer Farbe ausgelesen werden. Werden Hologramme für die drei Grundfarben im Photolack überlagert, ergibt sich ein Hologramm, das sich aus beliebigem Weißlicht die richtigen Frequenzanteile selbst aussucht und so eine farbige Abbildung realisiert.



**Fig. 23:** Links: Beugung an einer transversalen Struktur. Konstruktive Interferenz kann bei unterschiedlichen Wellenlängen erreicht werden.  
Rechts: Beugung am Volumengitter. Konstruktive Interferenz ist nur für eine einzige Wellenlänge möglich.

## 4 Dynamische Phänomene in der Optik

### 4.1 Pulsausbreitung in homogenen Medien

#### 4.1.1 Das Spektrum

Bisher wurden nur Felder fester Frequenz (monochromatische Felder) betrachtet. Jetzt sollen optische Pulse, d. h. Felder mit einem breiten Spektrum analysiert werden.

Ein typischer optischer Puls, beispielsweise von einem Titan-Saphir-Laser hat eine Dauer von  $T_0 = 100$  fs und eine mittlere Wellenlänge  $\lambda_0 = 800$  nm. Der optische Zyklus dauert dann

$$T_c = \frac{1}{f_0} = \frac{\lambda_0}{c} = 2,7 \text{ fs.} \quad (4.1)$$

Somit gilt  $T_c \ll T_0$ , die Pulseinhüllende überstreicht also viele optische Zyklen.

Für einen linear polarisierten, gaußförmigen Puls

$$\mathbf{E}_{\text{reell}}(t) \approx \mathbf{E}_0 \cos(\omega_0 t) \exp \left[ -\left( \frac{t}{t_0} \right)^2 \right] \quad (4.2)$$

lässt sich das Spektrum einfach berechnen:

$$\begin{aligned} E(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathbf{E}_{\text{reell}}(t) e^{i\omega t} \\ &= \frac{\mathbf{E}_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp \left[ -\left( \frac{t}{t_0} \right)^2 \right] [e^{i(\omega-\omega_0)t} + e^{i(\omega+\omega_0)t}] \\ &= \frac{\mathbf{E}_0 T_0}{e\sqrt{\pi}} \left[ \exp \left( \frac{T_0^2}{4} (\omega - \omega_0) \right) + \exp \left( \frac{T_0^2}{4} (\omega + \omega_0) \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Da Spektrum eines reellen Feldes ist stets symmetrisch bzgl.  $\omega = 0$ . Es gilt  $\mathbf{E}(-\omega) = \mathbf{E}(\omega)^*$ . Im Fall des gaußförmigen Pulses entstehen zwei spektrale Peaks, die um  $\pm\omega_0$  zentriert sind.

Für die spektrale Breite bzgl.  $\omega$  gilt:  $\Delta\omega = \frac{2}{T_0}$

Für die spektrale Breite bzgl.  $\lambda$  für  $\Delta\omega \ll \omega_0$  gilt:  $\Delta\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ .

Eine Linearisierung um  $\omega_0$  ergibt

$$\Delta\lambda \approx \frac{2\pi c}{\omega_0^2} \Delta\omega = \frac{\lambda_0^2}{2\pi c} \Delta\omega = \frac{\lambda_0^2}{\pi c T_0}. \quad (4.4)$$

Für das oben betrachtete Beispiel ergibt sich  $\Delta\lambda = 6,8$  nm  $\ll \lambda_0$ .

## 4.1.2 Pulsausbreitung

Zur Beschreibung der Pulsausbreitung werden wieder *Annahmen* getroffen:

- Das Feld besitzt keine transversale Struktur:  $\mathbf{E}_{\text{reell}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{\text{reell}}(z, t)$
- Lineare und fixe Polarisation:  $\mathbf{E}_{\text{reell}}(z, t) = \mathbf{E}_0 u(z, t)$

Für einen bei  $z = 0$  gegebenen Puls mit den Feldkomponenten  $u(z = 0, t) = u_0(t)$  wird nun ein Ausdruck für das Feld  $u(z, t)$  gesucht.

## a.) Lösung im Frequenzraum

Der Eingangspuls wird mithilfe einer Fouriertransformation in einzelne Frequenzkomponenten zerlegt:

$$u_0(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt u_0(t) e^{i\omega t}. \quad (4.5)$$

Die Ausbreitung der einzelnen Frequenzkomponenten gehorcht der HELMHOLTZ-Gleichung, spezifiziert für die ausschließliche Raumabhängigkeit in  $z$ -Richtung

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} + k(\omega)^2 \right] u(\omega, z) = 0 \quad \text{mit} \quad u(\omega, z = 0) = u_0(\omega) \quad (4.6)$$

mit der Lösung  $u(\omega, z) = u_0(\omega) \exp[ik(\omega)z]$ . Durch die Summation aller Frequenzkomponenten (entspricht der Rücktransformation in der Zeitbereich mittels inverser Fouriertransformation) ergibt sich

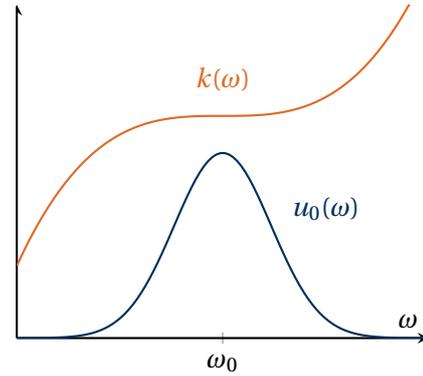
$$u(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega u(z, \omega) e^{-i\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega u_0(\omega) e^{i[k(\omega)z - \omega t]}. \quad (4.7)$$

Diese Lösung erlaubt eine komplette numerische Lösung und kann formal auch komplett in den Zeitraum überführt werden, wobei die aus Kapitel 1 bekannte Responsefunktion (1.88) wieder auftaucht:

$$\begin{aligned} u(z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' u_0(t') e^{i[k(\omega)z - \omega(t-t')]} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau u_0(t - \tau) e^{i[k(\omega)z - \omega\tau]} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau u_0(t - \tau) R(z, \tau) \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\text{mit } R(z, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i[k(\omega)z - \omega\tau]}. \quad (4.9)$$

Da die Responsefunktion wieder kausal sein muss, kann das Integral über die Responsefunktion auf den positiven Frequenzbereich beschränkt oder  $R(z, \tau < 0) = 0$  gefordert werden. Allerdings kann obiges Ergebnis nur bei einer genaueren Kenntnis von  $k(\omega)$ , d. h. der Dispersion des Materials weiter spezifiziert werden. Eine direkte Lösung im Zeitbereich mittels einer Differentialgleichung ist dahingegen anschaulicher.



### b.) Direkte Lösung im Zeitbereich

Den Ausgangspunkt stellt hier die obige Lösung im Frequenzbereich  $u(\omega, z) = u_0(\omega)e^{ik(\omega)z}$  dar, die ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichung

$$\left[ i \frac{d}{dz} + k(\omega) \right] u(\omega, z) = 0 \quad \text{mit} \quad u(\omega, z=0) = u_0(\omega) \quad (4.10)$$

darstellt. Es wird nun versucht, diese Differentialgleichung durch eine inverse Fouriertransformation in den Zeitbereich zu überführen, allerdings führt der Term  $k(\omega)u(\omega, z)$  zu einer Faltung.

Um eine Faltung zu vermeiden, wird ausgenutzt, dass  $u(\omega, z)$  nur um  $\pm\omega_0$  zentriert ist und deshalb wird sich nur auf den positiven Frequenzbereich um  $+\omega_0$  konzentriert. Unter Ausnutzung der Tatsache, dass  $u(t, z)$  reell ist, reicht dieser Bereich aus, denn es gilt:

$$\begin{aligned} u(z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega u(z, \omega) e^{-i\omega t} = \int_{-\infty}^0 d\omega u(z, \omega) e^{-i\omega t} + \int_0^{\infty} d\omega u(z, \omega) e^{-i\omega t} \\ &= \int_0^{\infty} d\omega u(z, -\omega) e^{i\omega t} + \int_0^{\infty} d\omega u(z, \omega) e^{-i\omega t} \\ &= \int_0^{\infty} d\omega u(z, \omega)^* e^{i\omega t} + \int_0^{\infty} d\omega u(z, \omega) e^{-i\omega t} \\ &= 2 \operatorname{Re} \left[ \int_0^{\infty} d\omega u(z, \omega) e^{-i\omega t} \right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

Von nun an wird nur noch der positive Frequenzanteil von  $u(\omega, z)$  berücksichtigt, aber nach der Rücktransformation wird entsprechend der Realteil gebildet. Wegen der im Vergleich zur Grundfrequenz  $\omega_0$  geringen Breite des Spektrums  $u_0(\omega)$  wird  $k(\omega)$  um  $\omega_0$  in eine Taylorreihe entwickelt

$$k(\omega) = k(\omega_0) + \frac{1}{v_g}(\omega - \omega_0) + \frac{\text{GVD}}{2}(\omega - \omega_0)^2 + \dots, \quad (4.12)$$

wobei die häufiger auftretenden Terme der Gruppengeschwindigkeit (engl. group velocity) und Gruppengeschwindigkeitsdispersion (engl. group velocity dispersion) auftauchen:

$$\text{Gruppengeschwindigkeit} \quad \frac{1}{v_g} = \frac{\partial}{\partial \omega} k(\omega) \Big|_{\omega=\omega_0} \quad (4.13)$$

$$\text{Gruppengeschwindigkeitsdispersion} \quad \text{GVD} = \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} k(\omega) \Big|_{\omega=\omega_0}. \quad (4.14)$$

Im Folgenden wird die Entwicklung nach der zweiten Ordnung abgebrochen, wobei sich der Abbruch der Entwicklung an der spektralen Breite von  $u_0(t)$  und der Stärke der Dispersion von  $k(\omega)$  orientieren muss. Eine Rücktransformation der Differentialgleichung

$$\left[ i \frac{d}{dz} + k(\omega_0) + \frac{1}{v_g} (\omega - \omega_0) + \frac{\text{GVD}}{2} (\omega - \omega_0)^2 \right] u(\omega, z) = 0 \quad (4.15)$$

in den Zeitbereich liefert (unter Berücksichtigung von  $\omega \Rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}$ )

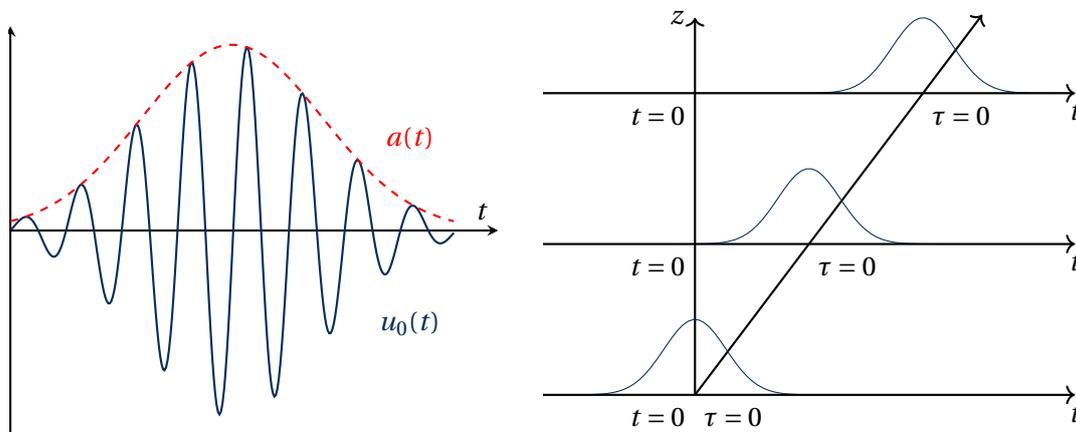
$$\left[ i \frac{d}{dz} + k(\omega_0) + \frac{1}{v_g} \left( i \frac{\partial}{\partial t} - \omega_0 \right) + \frac{\text{GVD}}{2} \left( i \frac{\partial}{\partial t} - \omega_0 \right)^2 \right] u(\omega, z) = 0 \quad (4.16)$$

eine partielle Differentialgleichung für die Pulsdynamik im Zeitbereich. Tatsächlich ist aber vor allem die Dynamik der Pulseinhüllenden interessant, weshalb die schnell oszillierende Phase der Trägerwelle vom Puls abgespalten wird:

$$u(t, z) = \underbrace{a(t, z)}_{\text{Einhüllende}} \underbrace{\exp[ik(\omega_0)z - i\omega_0 t]}_{\text{Trägerwelle}}. \quad (4.17)$$

Damit ergibt sich eine Differentialgleichung für die Pulseinhüllende, in der hier unwichtige Konstanten nicht mehr enthalten sind:

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial z} + \frac{i}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\text{GVD}}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] a(t, z) = 0 \quad (4.18)$$



Eine weitere Vereinfachung kann durch Abspaltung von  $\frac{i}{v_g} \frac{\partial}{\partial t}$  und Einführung einer “mitbewegten” Zeit  $\tau = t - \frac{z}{v_g}$  erfolgen. Für jede Ausbreitungslänge wird dabei der Zeitnullpunkt

anders festgelegt. In den neuen Koordinaten  $z = z'$  und  $\tau = t - \frac{z}{v_g}$  verändern sich die Differentiale zu  $\frac{\partial}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z'} - \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial \tau}$  und  $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \tau}$ , was in der Differentialgleichung die erste Zeitableitung eliminiert

$$\left[ i \left( \frac{\partial}{\partial z'} - \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) + \frac{i}{v_g} \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\text{GVD}}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] a(\tau, z) = 0 \quad (4.19)$$

Die finale Gleichung der Einhüllenden des Pulses ergibt sich zu

$$\boxed{\left[ i \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\text{GVD}}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] a(\tau, z) = 0}, \quad (4.20)$$

wobei wieder  $z$  statt  $z'$  eingesetzt wurde. Die finale Gleichung erinnert in ihrer grundsätzlichen Struktur stark an die paraxiale Wellengleichung oder die Schrödinger-Gleichung im homogenen Raum. Der Term  $\frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial \tau}$  bewirkt also eine gleichmäßige Bewegung des Pulses mit der Gruppengeschwindigkeit  $v_g$ . Ein Puls bewegt sich also mit der Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{1}{\frac{\partial}{\partial \omega} \left[ n(\omega) \frac{\omega}{c} \right]} = \frac{1}{\frac{n}{c} + \frac{\omega}{c} \frac{\partial n}{\partial \omega}} = \frac{1}{\frac{1}{v_p} + \frac{\omega}{c} \frac{\partial n}{\partial \omega}} \quad (4.21)$$

und nicht mit der durch die Brechzahl  $n$  bestimmten Phasengeschwindigkeit  $v_p = \frac{c}{n}$ . In Materialien gilt gewöhnlich  $v_g \neq v_p$ , d. h. die Trägerwelle bewegt sich relativ zur Einhüllenden.

### 4.1.3 Ausbreitung gaußförmiger Pulse

Es wird nun eine Lösung der verbleibenden Gleichung (4.20) für einen gaußförmigen Puls

$$a(\tau, z = 0) = A_0 \exp\left(-\frac{\tau^2}{T_0^2}\right) \quad (4.22)$$

gesucht. Zur Erinnerung: Ein GAUSS-Strahl im Raumbereich  $u_G(x, y, z)$  wird durch die sehr ähnliche paraxiale Gleichung (3.60) beschrieben:

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2k} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + k \right] u_G(x, y, z) = 0, \quad (4.23)$$

d. h. das gleiche Lösungsverfahren kann angewendet werden, wobei sich eine sehr ähnliche Lösung für den gaußförmigen Puls ergibt.

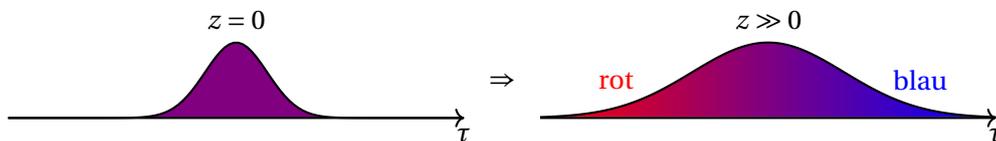
$$\begin{aligned} a(\tau, z) &= \frac{A_0}{\sqrt{1 + i(z/z_R)}} \exp\left[ -\frac{\tau^2}{T_0^2 [1 + i(z/z_R)]} \right] \\ &= \frac{A_0}{\sqrt{1 + i(z/z_R)}} \underbrace{\exp\left[ -\frac{\tau^2}{T_0^2 [1 + (z/z_R)^2]} \right]}_{\text{Pulsverbreiterung}} \underbrace{\exp\left[ i \frac{z}{z_R} \frac{\tau^2}{T_0^2 [1 + (z/z_R)^2]} \right]}_{\text{Phasenvariation}} \end{aligned} \quad (4.24)$$

mit der Dispersionslänge  $z_R = -\frac{T_0^2}{2 \cdot \text{GVD}}$ .

Wesentliche Unterschiede bestehen im Vorhandensein nur einer transversalen Dimension und darin, dass  $k$  in der ursprünglichen Differentialgleichung und in der finalen Lösung durch  $-1/\text{GVD}$  ersetzt wurde.

a.) Effekt der Pulsverbreiterung  $T(z) = T_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}$

Der Pulse enthält unterschiedliche Frequenzanteile mit unterschiedlicher Gruppengeschwindigkeit  $v_g = v_g(\omega)$ . Diese Frequenzkomponenten propagieren unterschiedlich schnell, z. B. für normale Dispersion ( $\text{GVD} > 0$ ) propagiert "blau" langsamer als "rot", d. h. rot/blau trifft früher/später bzw. für kleinere/größere Werte der mitbewegten Zeit ein.



b.) Chirp (Frequenzvariation über dem Puls, engl. Zwitschern)

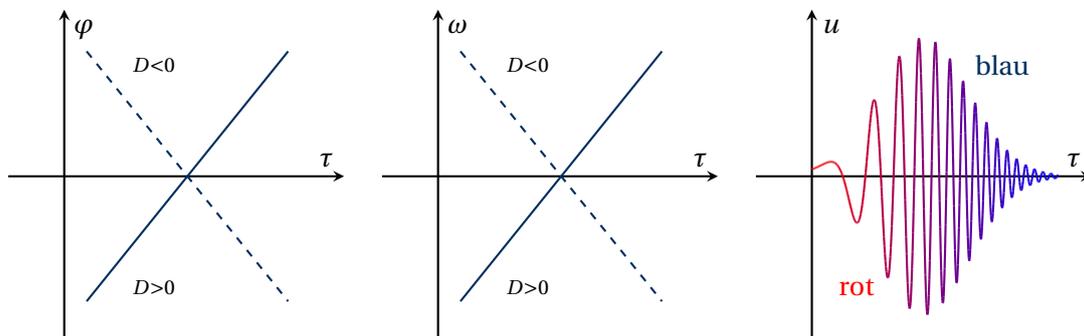
Die *instantane* Frequenz

$$\omega(\tau) = -\frac{\partial \varphi(\tau)}{\partial \tau} \quad \text{mit} \quad \varphi(\tau) = \arg[a(\tau)] \quad (4.25)$$

ist im Fall des gaußförmigen Pulses

$$\omega(\tau) \approx -2 \frac{z}{z_R} \frac{\tau}{T_0^2 [1 + (z/z_R)^2]} \quad (4.26)$$

und steigt für normale Dispersion  $\text{GVD} > 0$  und damit  $z_R = -\frac{T_0^2}{2 \cdot \text{GVD}} < 0$  linear mit  $\tau$  an.



**Fig. 24:** Phase  $\varphi$ , instantane Frequenz  $\omega(\tau)$  und Feldamplitude  $u(\tau)$  eines Pulses

Obwohl Beugung von Strahlen und dispersive Verbreiterung von Pulsen sehr ähnlich ablaufen, gibt es doch signifikante Unterschiede:

Die Gruppengeschwindigkeitsdispersion GVD ist als Vorfaktor vor der zweiten Ableitung im Gegensatz zu  $1/2k$  im Vorzeichen nicht fixiert. Eine Pulsverbreiterung kann daher durch eine Abfolge von Elementen mit Gruppengeschwindigkeitsdispersion unterschiedlichen Vorzeichens kompensiert werden (Dispersionskompensation). Bedingung für vollständige Kompensation in einer Abfolge aus unterschiedlichen Komponenten der Längen  $L_i$  und der Dispersion  $GVD_i$  ist

$$\sum_i GVD_i L_i = 0. \quad (4.27)$$

Gechirpte Pulse können durch die Propagation durch ein Medium mit entsprechender Dispersion komprimiert werden.

## 4.2 Kohärenz

### 4.2.1 Begriffsbestimmung

Licht besitzt als elektromagnetisches Feld an jedem Orts- und Zeitpunkt eine wohldefinierte Polarisationsrichtung  $\mathbf{e}_0$ , Amplitude  $|u|$  und Phase  $\varphi$  mit der Feldverteilung

$$\mathbf{E}_{\text{reell}}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{e}_0(\mathbf{r}, t)|u(\mathbf{r}, t)|\exp[i\varphi(\mathbf{r}, t)]]. \quad (4.28)$$

Diese Größen sind oft nicht gut bekannt bzw. reproduzierbar oder variieren so irregulär, dass sie sich einer kompletten Beschreibung entziehen.

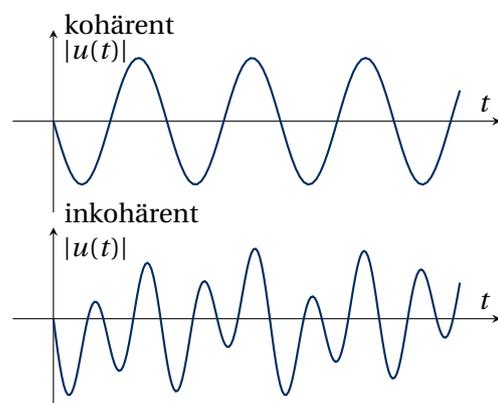
Thermische Lichtquellen sind gewöhnlich zeitlich inkohärent, d. h. sie emittieren mit einer variierenden und nicht kontrollierbaren Phase. Licht, das von verschiedenen Stellen der Oberfläche eines thermischen Strahlers ausgeht, ist gewöhnlich vollständig unkorreliert, d. h. räumlich inkohärent.

Zur Beschreibung inkohärenter Lichtfelder müssen statistische Methoden herangezogen werden. Im Folgenden werden Polarisations-effekte vernachlässigt und nur die komplexe Feldamplitude  $u(\mathbf{r}, t)$  betrachtet. Zur mathematischen Beschreibung werden die Korrelationsfunktionen zweiter Ordnung

$$G(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2) = \langle u^*(\mathbf{r}_1, t_1)u(\mathbf{r}_2, t_2) | u^*(\mathbf{r}_1, t_1)u(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle \quad (4.29)$$

verwendet, wobei  $\langle \dots | \dots \rangle$  im Idealfall ein Ensemblemittel, d. h. eine am besten über sehr viele äquivalente Systeme auszuführende statistische Mittelung bedeutet.

Tatsächlich ist ein solches Ensemblemittel aber praktisch nicht realisierbar. Daher wird die Translationsinvarianz der Zeit ausgenutzt, was zur Folge hat, dass für unbeeinflusste Systeme die Korrelationsfunktion nur von der Zeitdifferenz abhängt. Die Mittelung wird dann am



selben System, aber an verschiedenen Zeitpunkten ausgeführt:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) &= \langle u^*(\mathbf{r}_1, t)u(\mathbf{r}_2, t + \tau) | u^*(\mathbf{r}_1, t)u(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle_t \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt u^*(\mathbf{r}_1, t)u(\mathbf{r}_2, t + \tau). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Für  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$  und  $\tau = 0$  ist  $G$  proportional zur mittleren Intensität

$$G(\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2, \tau = 0) = \langle |u(\mathbf{r}_1, t)|^2 | |u(\mathbf{r}_1, t)|^2 \rangle_t \sim \langle I(\mathbf{r}_1, t) | I(\mathbf{r}_1, t) \rangle_t. \quad (4.31)$$

Daher wird die Korrelationsfunktion oft auf die mittlere Intensität an beiden Punkten normiert, um mit dem Kohärenzgrad

$$\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \frac{\langle u(\mathbf{r}_1, t)^* u(\mathbf{r}_2, t + \tau) | u(\mathbf{r}_1, t)^* u(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle_t}{\sqrt{\langle |u(\mathbf{r}_1, t)|^2 | |u(\mathbf{r}_1, t)|^2 \rangle_t \langle |u(\mathbf{r}_2, t)|^2 | |u(\mathbf{r}_2, t)|^2 \rangle_t}} \quad (4.32)$$

eine Größe, die im Betrag zwischen 0 (Inkohärenz) und 1 (Kohärenz) variiert, zu erhalten. Dieses Kapitel handelt speziell von ortsfesten Kohärenzeigenschaften, d. h. mit der

### zeitlichen Korrelationsfunktion

$$G_t(\tau) = \langle u^*(\mathbf{r}_1, t)u(\mathbf{r}_1, t + \tau) | u^*(\mathbf{r}_1, t)u(\mathbf{r}_1, t + \tau) \rangle_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt u^*(\mathbf{r}_1, t)u(\mathbf{r}_1, t + \tau) \quad (4.33)$$

und mit den Kohärenzeigenschaften zu einem festen Zeitpunkt, d. h. mit der

### räumlichen Korrelationsfunktion

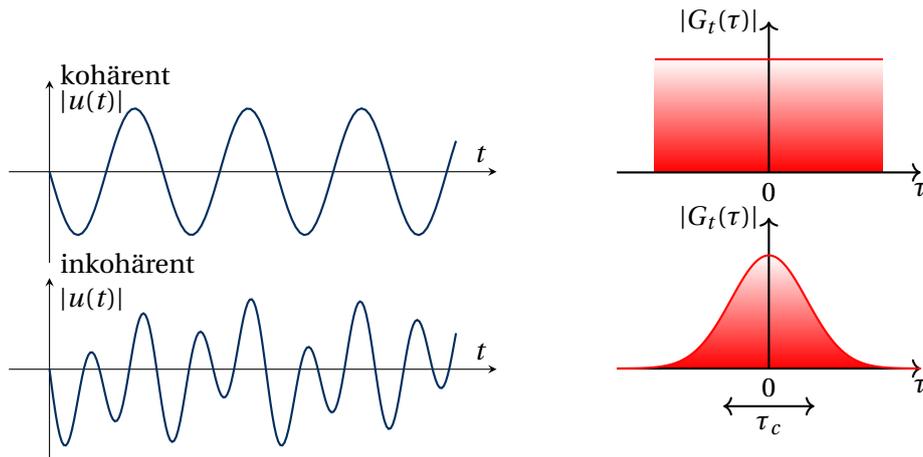
$$G_r(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle u^*(\mathbf{r}_1, t)u(\mathbf{r}_2, t) | u^*(\mathbf{r}_1, t)u(\mathbf{r}_2, t) \rangle_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt u^*(\mathbf{r}_1, t)u(\mathbf{r}_2, t). \quad (4.34)$$

#### 4.2.2 Zeitliche Kohärenz

Kohärente Felder sind stark korreliert, d. h. über längere Zeiträume voraussagbar. Die Korrelationsfunktion eines ideal kohärenten Feldes  $u(\mathbf{r}, t) = u_0(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)$  berechnet sich zu

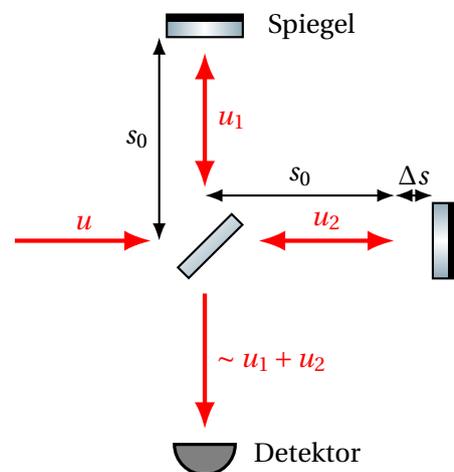
$$G_t(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt [u_0 \exp(-i\omega t)]^* u_0 \exp[-i\omega_0(t + \tau)] = |u_0|^2 \exp(-i\omega_0 \tau). \quad (4.35)$$

Ihr Betrag ist konstant und der Betrag ihres Kohärenzgrades 1. Die Korrelationsfunktion inkohärenter Felder fällt dahingegen innerhalb einer charakteristischen Zeit - der Korrelations- oder Kohärenzzeit  $\tau_c$  - von ihrem Maximum bei  $\tau = 0$  gegen Null ab.



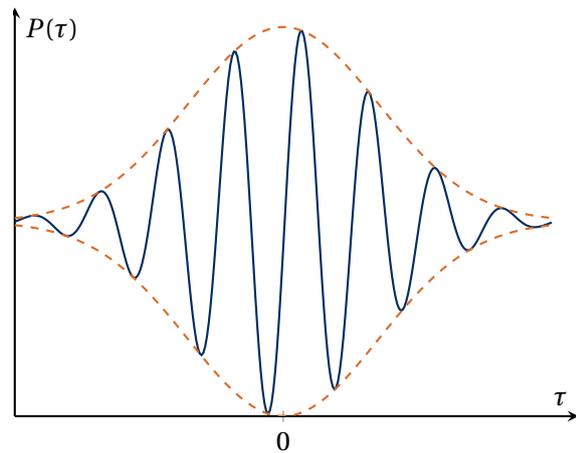
### Messung der zeitlichen Korrelationsfunktion

Bei der Messung der Korrelationsfunktion wird ausgenutzt, dass es nur zwischen kohärenten Feldern zu messbarer Interferenz kommt. Die Auswertung eines Interferenzsignals gibt also gewöhnlich Auskunft über den Kohärenzgrad des interferierenden Lichtes. Bei der Verwendung eines Michelson-Interferometers (siehe nebenstehende Skizze) wird das zu analysierende Feld  $u(t)$  an einem halbdurchlässigen Spiegel (Transmission 50%) in zwei Felder  $u_1(t) = u_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}u(t)$  aufgetrennt. Beide Felder durchlaufen jeweils zweimal (Rückreflexion an einem Spiegel) einen Interferometerarm und erfahren einen von der Länge des Interferometerarms abhängigen Zeitversatz. Da beide Arme um eine kleine Strecke  $\Delta s$  unterschiedlich lang sind, treffen beide Felder leicht zueinander zeitversetzt am halbdurchlässigen Spiegel ein und werden dort wieder überlagert. Schließlich wird die Leistung des Gesamtfeldes  $u_1 + u_2$  zeitgemittelt gemessen. Das am Detektor registrierte Signal



$$\begin{aligned}
 P(\tau) &\sim \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt |u_1(t) + u_2(t)|^2 \\
 &\sim \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt \left| u\left(t - 2\frac{s_0}{c}\right) + u\left(t - 2\frac{s_0}{c} - 2\frac{\Delta s}{c}\right) \right|^2 \\
 &\sim 2 \langle |u(t)|^2 |u(t)|^2 \rangle_t + \langle u(t)^* u(t+\tau) | u(t)^* u(t+\tau) \rangle_t + \langle u(t+\tau)^* u(t) | u(t+\tau)^* u(t) \rangle_t \\
 &\sim G_t(\tau = 0) + \text{Re } G_t(\tau)
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

hängt vom Zeitversatz  $\tau = 2 \frac{\Delta s}{c}$  ab und enthält die Korrelationsfunktion. Das Signal weist einen zur mittleren Leistung proportionalen konstanten Untergrund auf. Für einen Zeitversatz von der Größenordnung der Korrelationszeit lassen sich jedoch kohärente Oszillationen beobachten, die normaler Interferenz entsprechen und deren Einhüllende die doppelte Amplitude des konstanten Untergrunds erreicht.



Die Analyse der Interferenzeffekte im Michelson-Interferometer zeigt auch, dass die Korrelationszeit  $\tau_c$  stets auch mit einer Kohärenzlänge  $L_c = \tau_c c$  verknüpft ist. Entsprechende Werte sind für thermische Strahler sehr klein (gefiltertes Sonnenlicht ( $\lambda = 400 - 800 \text{ nm}$ ):  $\tau_c = 2,8 \text{ fs}$  und  $L_c = 800 \text{ nm}$ ). Dahingegen können mit Lasern wesentlich höhere Werte erreicht werden (He-Ne-Laser:  $\tau_c = 1 \mu\text{s}$  und  $L_c = 300 \text{ m}$ )

### 4.2.3 Zeitliche Kohärenz und Spektrum

Offensichtlich besteht ein Zusammenhang zwischen spektraler Breite und Kohärenzverhalten einer Lichtquelle. Dieser Zusammenhang soll nun genauer analysiert werden. Dazu wird das Spektrum der Korrelationsfunktion (Fouriertransformierte) bestimmt, wobei die eigentliche Definition eines Integrals mit Definitionsbereich über die ganzen reellen Zahlen verwendet wird.

$$\begin{aligned}
 F[G_t(\tau)](\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T d\tau G_t(\tau) \exp(i\omega\tau) \\
 &\stackrel{(4.35)}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T d\tau \lim_{T' \rightarrow \infty} \frac{1}{2T'} \int_{-T'}^{T'} dt u(t)^* u(t+\tau) \exp(i\omega t) \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{T' \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi T'} \int_{-T'}^{T'} dt u(t)^* \exp(-i\omega t) \int_{-T}^T dt + \tau \exp[i\omega(t+\tau)] \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{T' \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{2T'} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-T'}^{T'} dt u(t) \exp(i\omega t) \right]^* \frac{1}{2\pi} \int_{-T+T}^{T+T} d\tau u(t') \exp(i\omega t') \\
 &\sim |\tilde{u}(\omega)|^2
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

Streng genommen sind die obigen Grenzwerte für Felder mit konstanter mittlerer Intensität nicht ausführbar. Im realen physikalischen System erstreckt sich aber jede Messung zwar über einen gegenüber der Korrelationszeit sehr großen, jedoch stets endlichen Zeitraum,

weshalb keine Divergenzen auftreten. Weiterhin kann bei stationären Verhältnissen angenommen werden, dass es bedeutungslos ist, zu welchem Zeitpunkt das Spektrum bestimmt wird, d. h. die Verschiebung des Integrationsbereiches im zweiten Integral sollte keine Rolle spielen.

Damit ergibt sich das *Wiener-Khinchin-Theorem*:

$$F[G_t(\tau)](\omega) \sim |F[u(t)](\omega)|^2. \quad (4.38)$$

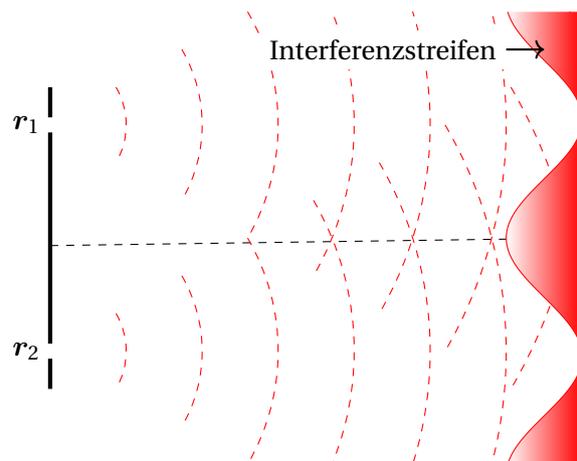
Die Fouriertransformierte der Korrelationsfunktion ist proportional zum Leistungsspektrum. Diese Aussage hat interessante Konsequenzen. Ein Michelson-Interferometer kann also benutzt werden, um ein Leistungsspektrum zu bestimmen was in der Korrelationsspektroskopie tatsächlich getan wird. Weiterhin kann der Kohärenzgrad einer Quelle durch spektrale Filterung verändert werden. Je schmaler das Spektrum, desto höher ist der erzielte Kohärenzgrad.

#### 4.2.4 Räumliche Kohärenz

Die räumliche Korrelationsfunktion  $G_r$  definiert, inwiefern das optische Feld an zwei Raumpunkten voneinander abhängt. Unterschiedliche Punkte auf der Oberfläche eines thermischen Strahlers sind völlig unabhängig, während im Allgemeinen Lichtfelder durchaus untereinander korreliert sind. Den Grad räumlicher Kohärenz bestimmt man ebenfalls durch ein Interferenzexperiment. Wird die räumliche Korrelationsfunktion

$$G_r(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle u^*(\mathbf{r}_1, t)u(\mathbf{r}_2, t) | u^*(\mathbf{r}_1, t)u(\mathbf{r}_2, t) \rangle_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt u(\mathbf{r}_1, t)^* u(\mathbf{r}_2, t) \quad (4.39)$$

experimentell bestimmt, werden die beiden von diesen Punkten ausgehenden Lichtfelder in einem Doppelspaltexperiment überlagert. Im kohärenten Grenzfall sind in großem Abstand zwischen Null und einem Maximalwert durchmodulierte Interferenzstreifen erkennbar. Bei steigender Inkohärenz nimmt der Kontrast dieser Interferenzstreifen ab, bis sie schließlich ganz verschwinden. Der Kontrast ist direkt proportional zum Wert der Korrelationsfunktion.



#### Experiment zur räumlichen Kohärenz

Da  $G_r(\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2)$  der mittleren Intensität entspricht und damit von Null verschieden ist, ist ein Einzelpunkt stets räumlich kohärent. Der Kohärenzgrad einer Quelle kann gesteigert werden, wenn ihre Abstrahlfläche reduziert wird.

Im Experiment (siehe Abbildung 25) wird dies demonstriert, indem die Breite eines Schlitzes vor einer thermischen Lichtquelle verändert wurde. Das durch den Schlitz fallende Licht wurde für ein Beugungsexperiment an einem Einfachspalt verwendet. Unabhängig von der Größe des die Lichtquelle begrenzenden Schlitzes war der Einfachspalt stets gleichmäßig ausgeleuchtet. Trotzdem veränderte sich das Beugungsbild qualitativ bei Variation der Schlitzbreite. Während bei fast geschlossenem Schlitz ein deutliches Interferenzbild zu sehen war, verschwanden bei offenem Schlitz die Nebenmaxima und das Hauptmaximum verbreiterte sich. Im inkohärenten Fall verschwinden also typische Interferenzeffekte. Licht verliert seinen Wellencharakter und beginnt, sich wie ein klassischer Teilchenstrom zu verhalten.

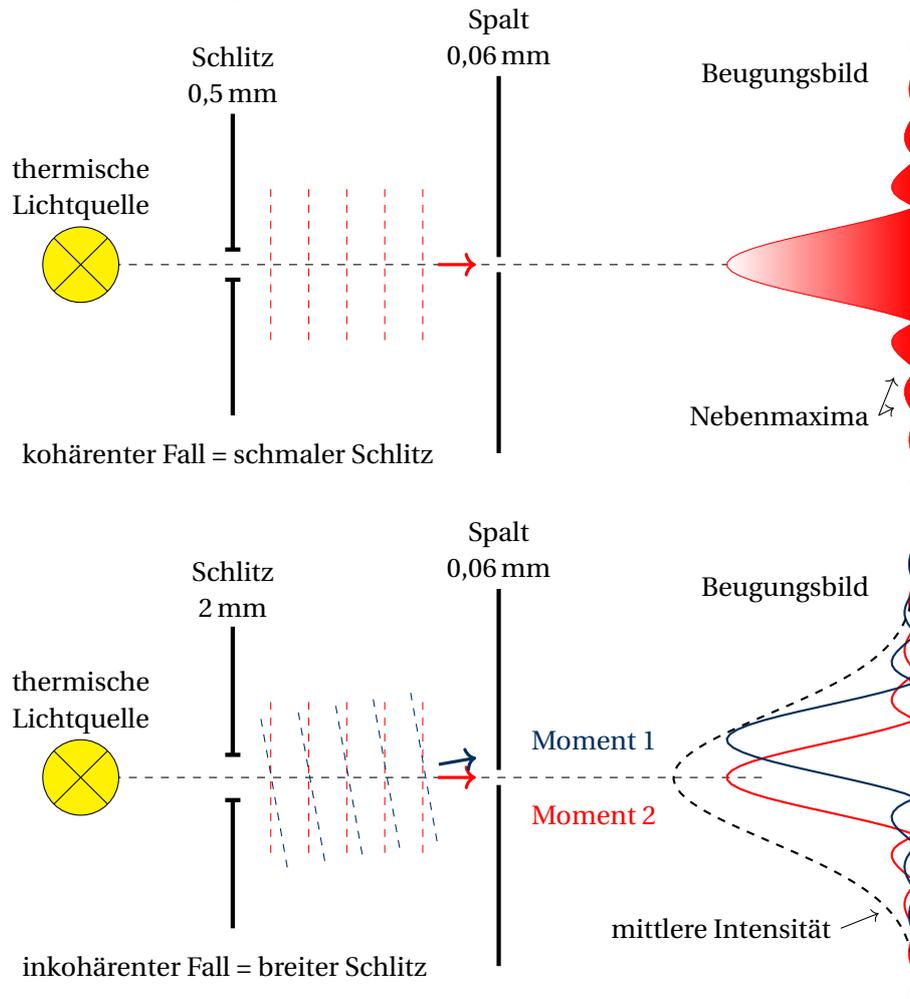


Fig. 25: Veränderung des Beugungsbildes bei Variation der Schlitzbreite.

#### 4.2.5 Ausbreitung räumlich inkohärenter monochromatischer Felder

In diesem Kapitel soll die Ausbreitung inkohärenter Felder und die damit verbundene Veränderung der räumlichen Korrelationsfunktion untersucht werden. Zur Vereinfachung wird angenommen, dass die Ausbreitung bevorzugt entlang  $z$  erfolgt und dass die räumliche Korrelationsfunktion in der Ebene  $z = 0$

$$G_0(x_0, y_0, x'_0, y'_0) = G_r(x_0, y_0, z = 0, x'_0, y'_0, z' = 0) \quad (4.40)$$

gegeben ist. Das Ziel ist nun die Bestimmung der Korrelationsfunktion

$$G_{\parallel}(x, y, x', y) = G_r(x, y, z > 0, x', y', z' > 0). \quad (4.41)$$

Das Feld  $u$  bei  $z > 0$  ergibt sich unter diesen Annahmen und unter Ausnutzung des Huygenschen Prinzips in guter Näherung aus dem Feld  $u_0$  bei  $z = 0$  durch

$$u(x, y, z) = \int dx_0 \int dy_0 u_0(x_0, y_0) h(x - x_0, y - y_0, z) \quad (4.42)$$

mit der Übertragungsfunktion (Kugelwelle)

$$h(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\exp(ikr)}{r} \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (4.43)$$

Damit ergibt sich die Korrelationsfunktion bei  $z$  zu:

$$\begin{aligned} G_{\parallel}(x, y, x', y') &= \langle u^*(x, y, z) u(x', y', z') | u^*(x, y, z) u(x', y', z') \rangle \\ &= \int dx_0 \int dy_0 \int dx'_0 \int dy'_0 h(x - x_0, y - y_0, z)^* h(x' - x'_0, y' - y'_0, z) \\ &\quad \underbrace{\langle u_0(x_0, y_0)^* u_0(x'_0, y'_0) | u_0(x_0, y_0)^* u_0(x'_0, y'_0) \rangle}_{G(x_0, y_0, x'_0, y'_0)}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Damit ergibt sich ein Ausdruck, der die Ausbreitung einer räumlichen Korrelationsfunktion beschreibt.

Dieser Ausdruck soll nun auf den Spezialfall einer inkohärenten Quelle angewendet werden. Dabei wird angenommen, dass bei  $z = 0$  das Licht von Punkt zu Punkt vollständig unkorreliert ist. Eine solche Korrelationsfunktion wird gut durch eine  $\delta$ -Distribution approximiert

$$G(x_0, y_0, x'_0, y'_0) \sim \delta(x_0 - x'_0) \delta(y_0 - y'_0) I_0(x_0, y_0). \quad (4.45)$$

Es muss beachtet werden, dass die Korrelationsfunktion im Ursprung  $G_0(x_0, y_0, x'_0 = x_0, y'_0 = y_0)$  der Intensität  $I_0(x_0, y_0)$  entspricht, d. h. zwar einen Vergleich zum Restgebiet sehr hohen aber nicht unendlichen Wert annimmt. Damit ergibt sich durch Einsetzen von (4.44) in (4.45)

$$G_{\parallel}(x, y, x', y') \sim \int dx_0 \int dy_0 h(x - x_0, y - y_0, z)^* h(x' - x'_0, y' - y'_0, z) I_0(x_0, y_0). \quad (4.46)$$

Interessanterweise ist die Korrelationsfunktion nach endlicher Ausbreitung offensichtlich nicht mehr  $\delta$ -korreliert. Dadurch, dass Raumpunkte nun Licht vom selben Punkt der Quelle erhalten, steigt ihrer gegenseitige Korrelation.

Wird angenommen, dass ähnlich wie bei einem Beugungsexperiment nur Ausbreitungsphänomene in der Nähe der optischen Achse interessant sind und ähnlich wie bei der Fraunhofer-Näherung ein Fernfeld vorliegt, kann (4.46) noch weiter vereinfacht werden. Es wird dabei berücksichtigt, dass eine Hierarchie

$$z \gg x, y, x', y', \gg x_0, y_0 \quad (4.47)$$

gilt. Damit kann die Übertragungsfunktion ähnlich wie bei der Herleitung zur Fraunhoferbeugung durch

$$r(x - x_0, y - y_0, z) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2} \approx z + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2z}$$

$$h(x - x_0, y - y_0, z) \approx -\frac{1}{4\pi} \frac{\exp(ikz)}{r} \exp\left(ik \frac{x^2 + y^2}{2z}\right) \exp\left(-ik \frac{xx_0 + yy_0}{z}\right)$$

approximiert werden. Es ergibt sich damit für den Betrag der Korrelationsfunktion die Fouriertransformierte der Intensitätsverteilung der inkohärenten Strahlenquelle

$$|G_{\parallel}(x, y, x', y')| \sim \frac{1}{z^2} \left| \int dx_0 \int dy_0 \exp\left[-i\frac{k}{z}(x' - x)x_0\right] \exp\left[-i\frac{k}{z}(y' - y)y_0\right] I_0 \right|$$

$$\sim \left| \frac{1}{z^2} F[I_0(x_0, y_0)] \left[ \frac{k}{z}(x' - x), \frac{k}{z}(y' - y) \right] \right| \quad (4.48)$$

Dieses Ergebnis ist bei Kenntnis der Fraunhofer-Beugung nicht verwunderlich: zu jedem Einzelzeitpunkt entsteht ein Fraunhofersches Beugungsbild. Da bei Bestimmung der Korrelationsfunktion Felder zum gleichen Zeitpunkt verglichen werden, "sieht" die Korrelationsfunktion das Fraunhofersche Beugungsbild.

