

FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA
PHYSIKALISCH-ASTRONOMISCHE-FAKULTÄT



**FRIEDRICH-SCHILLER-
UNIVERSITÄT
JENA**

SOMMERSEMESTER 2020

**Etwas höhere Mathematik
für die Experimentalphysik II**

SILVIO FUCHS

LaTeX-Satz und Design von Martin Beyer

Inhaltsverzeichnis

1	Vektorrechnung und Koordinatentransformationen	4
1.1	Das Wegintegral (Länge einer Kurve)	6
1.2	Mehrdimensionale Differentiation	8
1.3	Das Linienelement $d\vec{r}$	10
2	Mehrfachintegrale	12
2.1	Flächenintegrale	12
2.2	Volumenintegrale	13
3	Differentialoperatoren	14
3.1	Der Gradient	14
3.2	Die Divergenz	15
3.3	Die Rotation	17
4	Konservative Felder	18

Einleitung

Was dies ist:

Diese Zusammenfassung ist als Hilfestellung gedacht. Sie enthält stark komprimierte Inhalte der mathematischen Methoden der Physik. Sie soll Ihnen dabei helfen, die komplexeren mathematischen Zusammenhänge, die hinter den meist elementaren Rechnungen in der Experimentalphysikvorlesung stehen, besser zu verstehen. Mit den allgemeinen Beziehungen zu Koordinatensystemen und mehrdimensionalen Integralen ist man beispielsweise in der Lage, auch völlig unsymmetrische Probleme zu lösen.

Was dies nicht ist:

Für ein Verständnis der physikalischen Zusammenhänge der Experimentalphysik II ist der mathematische Formalismus, der hier zusammengefasst ist, nicht zwingend erforderlich. Mit Symmetrieargumenten und einer Portion Logik lassen sich zumindest für die elementaren Rechnungen der Vorlesung die meisten Probleme verstehen und lösen. Für die Prüfung ist das physikalische Verständnis ausschlaggebend, nicht der mathematische Formalismus. Wir möchten Sie aber ermutigen, diese Zusammenfassung durchzuarbeiten und zu verinnerlichen. Sie wird Ihnen auch in anderen Vorlesungen und im weiteren Verlauf ihres Studiums hilfreich sein - versprochen.

1 Vektorrechnung und Koordinatentransformationen

Vektoren sind Elemente eines n -dimensionalen Vektorraums V . Zwei Vektoren \vec{u} und \vec{v} können addiert und mit Skalaren (Elementen eines Körpers aus \mathbb{R} oder \mathbb{C}) multipliziert werden. Das Ergebnis ist dann wieder ein Vektor im Vektorraum V

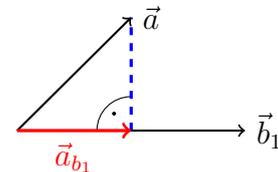
$$\vec{u}, \vec{v} \in V, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = \vec{w} \in V, \lambda \vec{v} \in V. \quad (1.1)$$

Jeder Vektor kann durch seine Komponenten bezogen auf beliebige (linear unabhängige) \vec{b}_n Basisvektoren dargestellt werden. Es gilt dann

$$\vec{a} = a_{b_1} \vec{b}_1 + a_{b_2} \vec{b}_2 + a_{b_3} \vec{b}_3 + \dots + a_{b_n} \vec{b}_n. \quad (1.2)$$

Mit dem *Skalarprodukt* lassen sich die Komponenten berechnen

$$\vec{a} \cdot \vec{b}_1 = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}_1\| \cdot \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b}_1)). \quad (1.3)$$



Damit lässt sich eine Länge (Norm) des Vektors definieren:

$$\|\vec{a}\|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} \quad \text{bzw.} \quad \|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}. \quad (1.4)$$

Das Skalarprodukt beschreibt also das Produkt der Projektion \vec{a}_{b_1} des Vektors \vec{a} auf \vec{b}_1 multipliziert mit der Länge des Vektors \vec{b}_1 .

Die Komponenten $a_{b_1} \vec{b}_1 \dots a_{b_n} \vec{b}_n$ ergeben sich nun als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b}_1 &= a_{b_1} \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1 + a_{b_2} \vec{b}_2 \cdot \vec{b}_1 + \dots \\ \vec{a} \cdot \vec{b}_2 &= a_{b_1} \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 + a_{b_2} \vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2 + \dots \end{aligned} \quad (1.5)$$

Sind die Basisvektoren \vec{b}_n *orthogonal* (senkrecht) zueinander, dann gilt für alle $i, j = 1, \dots, n$

$$\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j = \delta_{ij} \|\vec{b}_i\|, \quad (1.6)$$

wobei δ_{ij} das KRONECKER-Symbol bezeichnet, was folgende Eigenschaft besitzt:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}. \quad (1.7)$$

Weiterhin ergibt sich nun nach Gleichung (1.5)

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b}_1 &= a_{b_1} \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1 + a_{b_2} \underbrace{\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_1}_{=0} + \dots = a_{b_1} \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1 \\ \Rightarrow a_{b_1} &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}_1}{|\vec{b}_1|^2} \quad \text{bzw.} \quad a_{b_1} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_1}{|\vec{b}_1|} \quad \text{mit} \quad \vec{e}_1 = \frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|}.\end{aligned}\tag{1.8}$$

Wenn alle Basisvektoren zusätzlich noch die Länge $|\vec{b}_n| = 1$ besitzen (Einheitsvektoren), dann spricht man von einer *orthonormalen* Basis und Gleichung (1.8) vereinfacht sich zu

$$a_{b_1} = a_{e_1} = \vec{a} \cdot \vec{b}_1 = \vec{a} \cdot \vec{e}_1.\tag{1.9}$$

Besonders häufig wird die *kartesische Basis* verwendet, deren Basis folgendermaßen aussieht:

$$\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\} \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}.\tag{1.10}$$

Mit dem Ortsvektor lassen sich mit Vektoren Punkte im Raum definieren, z. B. in kartesischer Basis

$$\vec{r} = r_x \vec{e}_x + r_y \vec{e}_y + r_z \vec{e}_z\tag{1.11}$$

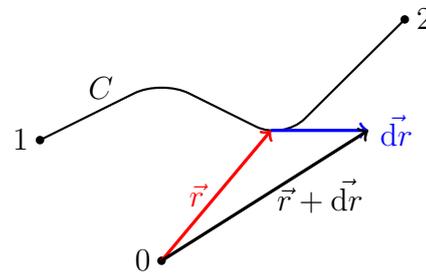
zeigt immer vom Koordinatenursprung zum entsprechenden Punkt im Raum. Ortsvektoren haben einen Ausgangspunkt, andere Vektoren jedoch nicht.

- Damit werden die *Koordinaten* eines Punktes zu den *Komponenten* des zugehörigen Ortsvektors (wenn die Basisvektoren nicht von den Koordinaten abhängen).
- Somit definiert ein Satz von Basisvektoren ein Koordinatensystem.
- Da man mit dem Skalarprodukt die Basis wechseln kann, lässt sich von einem Koordinatensystem ins andere transformieren.

1.1 Das Wegintegral (Länge einer Kurve)

Eine Kurve C im n -dimensionalen Raum lässt sich mithilfe eines Parameters t (z. B. Zeit) *parametrisieren* und beschreibt beispielsweise die Bewegung eines Massenpunktes im Raum. Sei die Kurve nun eine Funktion $C : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit Parameter t , dann beschreibt

$$L_C = \int_C dr = \int \left| \frac{dC}{dt} \right| dt \quad (1.12)$$



die Länge der Kurve. Eine explizite Parametrisierung wie z. B. in kartesischen Koordinaten ist immer möglich, da alle Punkte des Weges C erreicht werden wenn

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\vec{e}_x + f(x)\vec{e}_y, \quad x \in [x_1, x_2], \quad t = x \\ &= \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Diese Komponentenschreibweise in (1.13) ist mit Vorsicht zu genießen, da immer geschaut werden muss, auf welche Basis sich bezogen wird. Am besten sollte diese Schreibweise nur für kartesische Koordinaten verwendet werden.

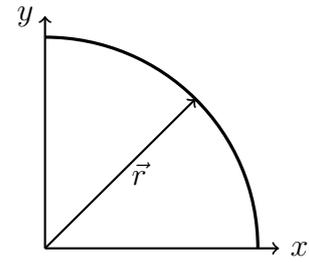
Das in (1.12) auftauchende Infinitesimal dr wird *Linielement* genannt und beschreibt die Änderung des Punktes \vec{r} , wenn sich der Parameter von x zu $x + dx$ ändert

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dx} &= \vec{e}_x + \frac{df(x)}{dx}\vec{e}_y \\ \Rightarrow \left| \frac{d\vec{r}}{dx} \right| &= \sqrt{1 + \left(\frac{df(x)}{dx} \right)^2} \\ \Rightarrow L_C &= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{df(x)}{dx} \right)^2} dx. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Jedoch ist eine implizite Darstellung, welche an die Geometrie angepasst ist, fast immer einfacher

$$\begin{aligned} \vec{r} &= g(t)\vec{e}_x + h(t)\vec{e}_y = \begin{pmatrix} g(t) \\ h(t) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow L_c &= \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{g}(t)^2 + \dot{h}(t)^2} dt. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Ein einfaches Beispiel dafür stellt die Berechnung der Länge eines Kreisabschnittes dar. In kartesischen Koordinaten ist dieser über die Parametrisierung $\vec{r} = x\vec{e}_x + \sqrt{r^2 - x^2}\vec{e}_y$ definiert. Somit berechnet sich die Kurvenlänge zu



$$\begin{aligned} L_c &= \int_0^r \left| \frac{d}{dx} \left(\sqrt{r^2 - x^2} \right) \right| dx = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx \\ &= \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = \int_0^r \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}} dx = \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1 - u^2}} du = r \cdot \arcsin(u) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} r. \end{aligned}$$

Wird die Kurve jedoch mithilfe von Polarkoordinaten $\vec{r} = r \cos(t)\vec{e}_x + r \sin(t)\vec{e}_y$ parametrisiert, dann vereinfacht sich das Integral erheblich:

$$L_c = \int_0^{\pi/2} \left| \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} r \cos(t) \\ r \sin(t) \end{pmatrix} \right| dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 \sin^2(t) + r^2 \cos^2(t)} dt = \int_0^{\pi/2} r dt = \frac{\pi}{2} r. \quad (1.16)$$

Arbeit ist ebenfalls ein Wegintegral über ein Vektorfeld \vec{F} oder Skalarfeld f

$$\vec{F} : \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad f : \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}. \quad (1.17)$$

Die Arbeit ergibt sich nun als das Wegintegral über das Vektorfeld \vec{F} entlang der Kurve C

$$W = \int_C \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} dt. \quad (1.18)$$

Der Parameter t spiegelt also eindeutig die Position auf der eindimensionalen Kurve C wider. t entspricht also einer Koordinate, die jedem Punkt auf der Kurve C zugeordnet ist. Es fehlt aber noch ein Parameter, um z. B. \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 darzustellen.

Lässt sich jede Koordinate durch n -Parameter ausdrücken und ist diese Abbildung invertierbar (umkehrbar), dann bilden die n -Parameter ein neues Koordinatensystem.

$$\begin{aligned} \Psi : x_1 &= x_1(u_1, u_2, u_3, \dots); & x_2 &= x_2(u_1, u_2, u_3, \dots); & \dots \\ \Psi^{-1} : u_1 &= u_1(x_1, x_2, x_3, \dots); & u_2 &= u_2(x_1, x_2, x_3, \dots); & \dots \end{aligned} \quad (1.19)$$

Jeder Punkt beider Koordinatensysteme muss erreicht werden. Dies wird durch die Bijektivität von Ψ sichergestellt.

1.2 Mehrdimensionale Differentiation

Wird nun ein Koordinatensystem durch geeignete Parameter vorgegeben, wie erhält man die dazugehörigen Basisvektoren?

Antwort: Man baut sie sich:

Die Frage, wie sich \vec{r} ändert, wenn die Koordinate u_i geändert wird und alle anderen Koordinaten konstant bleiben führt zum Begriff der *partiellen* Ableitung (Richtungsableitung)

$$\vec{b}_{u_i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}. \quad (1.20)$$

Der entstehende Vektor \vec{b}_{u_i} ist kein Einheitsvektor und kann selbst koordinatenabhängig sein.

Es gibt noch die zu \vec{b}_{u_i} jeweils senkrecht stehende duale (gleichwerte) Basis \vec{b}^{u_i} . Für rechtwinklige Koordinatensysteme sind beide gleich. Die Unterscheidung zwischen kovarianter Basis \vec{b}_{u_i} und kontravarianter Basis \vec{b}^{u_i} wird erst in der SRT und ART relevant.

Beispiel: Polarkoordinaten

Die Richtungsableitungen nach den Koordinaten r, φ stehen senkrecht aufeinander

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = 0. \quad (1.21)$$

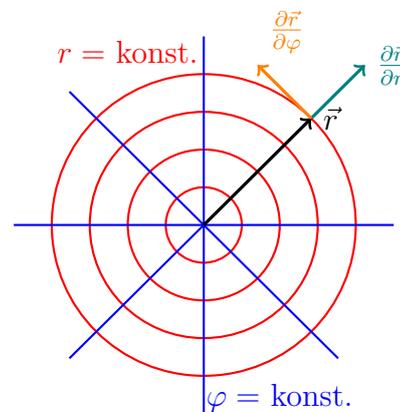
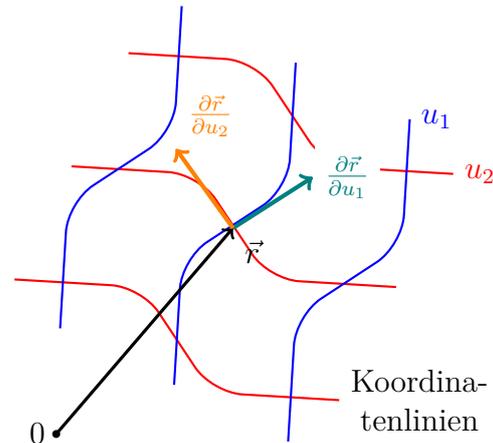
Die Komponenten in der neuen (senkrechten) Basis lauten nun

$$\vec{a} = \sum_i a_{u_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} = \sum_i a_{u_i} \vec{b}_{u_i}$$

$$a_{u_i} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}_{u_i}}{|\vec{b}_{u_i}|^2}. \quad (1.22)$$

Die gesamten partiellen Ableitungen der Transformation werden in der *Jacobi-Matrix* zusammengefasst¹:

¹Die Bezeichnung J_{ik} beschreibt hier die gesamte Matrix und nicht nur den Eintrag in Zeile i und Spalte j .



$$J_{ik} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \cdots \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

Die Spalten sind die Komponenten der neuen Basisvektoren ausgedrückt mithilfe der alten Basisvektoren

$$\vec{b}_{u_i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} = J_{i1} = \frac{\partial x_1}{\partial u_1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial u_1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_2} + \dots = \frac{\partial x_1}{\partial u_1} \vec{b}_{x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial u_1} \vec{b}_{x_2} + \dots \quad (1.24)$$

Hierbei wurde die mehrdimensionale *Kettenregel* verwendet

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}. \quad (1.25)$$

Die die Transformation invertierbar sein muss ($\det J_{ik} \neq 0$) existiert eine Inverses J_{ki}^{-1} mit der Eigenschaft

$$J_{ik} J_{ki}^{-1} = \mathbb{1}, \quad J_{ki}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

$$\vec{b}_{x_i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i} = J_{i1}^{-1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} + \dots = \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \vec{b}_{u_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \vec{b}_{u_2} + \dots \quad (1.27)$$

Zur Verdeutlichung wird nochmal das Beispiel der *Polarkoordinaten* aufgegriffen. Für die Transformation ergeben sich folgende Formeln

$$\begin{aligned} x_1 = x &= r \cos \varphi = u_1 \cos u_2 & r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ x_2 = y &= r \sin \varphi = u_1 \sin u_2 & \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Für die Jacobi-Matrix ergibt sich nun der Ausdruck

$$J_{ik} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & -y \\ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & x \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

$$J_{ki}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ -\frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\frac{1}{r} \sin \varphi & \frac{1}{r} \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (1.30)$$

Damit folgt für die Basisvektoren

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \vec{b}_r = \cos \varphi \vec{b}_x + \sin \varphi \vec{b}_y = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y \\ r \vec{e}_\varphi &= \vec{b}_\varphi = -r \sin \varphi \vec{b}_x + r \cos \varphi \vec{b}_y = -r \sin \varphi \vec{e}_x + r \cos \varphi \vec{e}_y\end{aligned}\quad (1.31)$$

$$\begin{aligned}\vec{e}_x &= \vec{b}_x = \cos \varphi \vec{b}_r - \frac{1}{r} \sin \varphi \vec{b}_\varphi \\ \vec{e}_y &= \vec{b}_y = \sin \varphi \vec{b}_r + \frac{1}{r} \cos \varphi \vec{b}_\varphi\end{aligned}\quad (1.32)$$

1.3 Das Linienelement $d\vec{r}$

Unter der Verwendung der mehrdimensionalen Kettenregel ergibt sich das Linienelement zu

$$\begin{aligned}d\vec{r}(x_1(u_1, \dots), x_2(u_1, \dots)) &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} du_2 + \dots = \sum_k J_{ik} du_k \\ &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_2} dx_2 + \dots\end{aligned}\quad (1.33)$$

Es stellt sich nun die Frage, wie lang $d\vec{r}$ ist. Geht man in jede Richtung den Schritt du_i , wie weit ist man vom Ausgangspunkt entfernt?

$$\begin{aligned}|\vec{d\vec{r}}|^2 &= d\vec{r} \cdot d\vec{r} = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \right|^2 (du_1)^2 + \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \right|^2 (du_2)^2 + 2 \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} du_1 du_2 + \dots \\ &= \sum_{i,j} J^T J du_i du_j = \sum_{i,j,k} J_{ki} J_{kj} du_i du_j = g_{ij} du_i du_j\end{aligned}\quad (1.34)$$

Der Ausdruck $g_{ij} = (J^T J)_{ij}$ wird *metrischer Tensor*² genannt. Er gibt an, wie der Raum verzerrt ist. In Polarkoordinaten nimmt er folgende Gestalt an:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \Rightarrow (d\vec{r})^2 = (dr)^2 + r^2(d\phi)^2.\quad (1.35)$$

In kartesischen Koordinaten ist der metrische Tensor identisch mit der Einheitsmatrix $g_{ij} = \mathbb{1}$. Besondere Bedeutung erhält der metrische Tensor in der SRT und

²Der Tensor ist ein Oberbegriff für Skalare, Vektoren, Matrizen mit bestimmten Transformationsinvarianzen. Egal welches Koordinatensystem verwendet wird, der physikalische Inhalt eines Tensors bleibt gleich. Verschwindet also ein Tensor in einem Koordinatensystem, dann auch in allen anderen.

ART beispielsweise mit dem metrischen Tensor des *Minkowski-Raums*

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.36)$$

Der Minkowski-Raum ist im speziellen invariant unter *Lorentz-Transformationen*³. Die Einträge des metrischen Tensors g_{ik} geben die Länge der Basisvektoren an. Weiterhin ist der metrische Tensor immer symmetrisch $g_{ik} = g_{ki}^T$. Abgesehen einiger Ausnahmen⁴ besitzt der metrische Tensor nur Einträge auf der Hauptdiagonalen, weshalb meist $g_{11} = g_1$ usw. gesetzt wird. Damit lassen sich die Einträge des metrischen Tensors für häufig verwendete Koordinatensysteme zusammenfassen zu:

	x_1	x_2	x_3	g_1	g_2	g_3
kartesisch	x	y	z	1	1	1
Zylinder	r	φ	z	1	r^2	1
Kugel	r	ϑ	φ	1	r^2	$r^2 \sin^2 \varphi$

Das in (1.16) betrachtete Wegintegral in Polarkoordinaten lässt sich ebenfalls mithilfe des Linienelements berechnen:

$$L_C = \int_C dr = \int_C \sqrt{(d\vec{r})^2} = \int_C \sqrt{(dr)^2 + r^2(d\varphi)^2} = \int_0^{\pi/2} r d\varphi = \frac{\pi}{2}r. \quad (1.37)$$

³Transformationen, die das Linienelement unverändert lassen

⁴Eine Ausnahme bilden die Eddington-Finkelstein-Koordinaten der ART

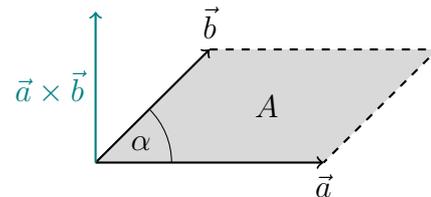
2 Mehrfachintegrale

2.1 Flächenintegrale

Zunächst soll erstmal die Frage geklärt werden, wie groß die Fläche eines Parallelogramms ist, das von zwei Vektoren aufgespannt wird.

Die Fläche A lässt sich mithilfe des *Kreuzproduktes* berechnen:

$$A = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \alpha = |\vec{a} \times \vec{b}|. \quad (2.1)$$



Das Kreuzprodukt liefert im Gegensatz zum Skalarprodukt wieder einen Vektor, der senkrecht auf den beiden anderen steht. \vec{c} bildet also einen Flächennormalenvektor zur Fläche A . Im dreidimensionalen lässt sich das Kreuzprodukt alternativ auch formulieren als

$$\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

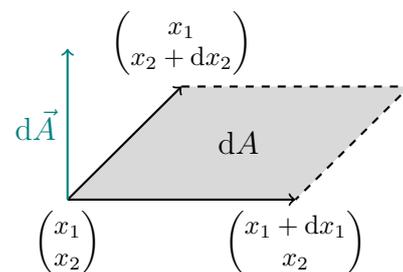
was mit der Regel von SARRUS oder dem Entwicklungssatz von LAPLACE berechnet werden kann.

Weiterhin lässt sich das Kreuzprodukt auch im Indexkalkül formulieren:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \vec{e}_i \quad \text{mit} \quad \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (ijk) \text{ gerade Permutation} \\ -1 & (ijk) \text{ ungerade Permutation} \\ 0 & \text{zwei Indizes sind gleich} \end{cases}. \quad (2.3)$$

Das Flächenelement dA lässt sich nun in allen Koordinaten durch ein Kreuzprodukt definieren

$$\iint_A dA = \iint_{u_1 u_2} \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \right| du_1 du_2. \quad (2.4)$$



Das Flächenelement ist also von der Form

$$dA = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \right| du_1 du_2 \quad \text{bzw.} \quad d\vec{A} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \right) du_1 du_2. \quad (2.5)$$

Der Faktor vor den Infinitesimalen entspricht der zweidimensionalen Jacobi-Matrix

$$\det J = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \right| \quad (2.6)$$

$$\Rightarrow \det J = \pm \sqrt{g} \quad \text{mit} \quad g = \det(g_{ik}). \quad (2.7)$$

Die Flächenelemente sind für die beiden behandelten Koordinatensysteme nochmal aufgeführt:

$$\text{Kartesisch:} \quad \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right| = 1 \quad dA = dx dy \quad (2.8)$$

$$\text{Polar:} \quad \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = r \quad dA = r dr d\varphi \quad (2.9)$$

Für Funktionen gilt entsprechend:

$$\boxed{\iint_A \vec{F}(\vec{r}) d\vec{A} = \iint_{u_1, u_2} \vec{F}(u_1, u_2) \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \right) du_1 du_2.} \quad (2.10)$$

Das Flächenintegral über ein Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r})$ beschreibt den *Fluss* des Vektorfeldes durch die Fläche A .

2.2 Volumenintegrale

Das Volumenintegral ergibt sich analog zum Flächenintegral als das Spatprodukt der natürlichen Basisvektoren:

$$\begin{aligned} \iiint_V dV &= \iiint_{u_1 u_2 u_3} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} du_1 du_2 du_3 \\ &= \iiint_{u_1 u_2 u_3} \underbrace{\det J}_{\pm \sqrt{g}} du_1 du_2 du_3. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Aus der Jacobi-Determinante ergeben sich nun auch direkt die Volumenelemente der einzelnen Koordinatensysteme

$$\begin{aligned} \text{Zylinderkoordinaten:} \quad dV &= \varrho d\varrho d\varphi dz \\ \text{Kugelkoordinaten:} \quad dV &= r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta dr. \end{aligned} \quad (2.12)$$

3 Differentialoperatoren

3.1 Der Gradient

Der Gradient einer skalaren Funktion $\text{grad } f = \vec{\nabla} f = \vec{a}$ ist ein Vektor und zeigt in Richtung des steilsten Anstiegs von f im Punkt \vec{a} . Dabei bezeichnet $\vec{\nabla}$ den *Nabla-Operator*

$$\vec{\nabla} = \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (3.1)$$

Für einen allgemeinen Ausdruck für den Gradienten in beliebigen Koordinaten, wird er zunächst für Polarkoordinaten berechnet. Sei $f(x, y)$ ein Skalarfeld in kartesischen Koordinaten und $\tilde{f}(r, \varphi)$ dasselbe Feld in Polarkoordinaten. Dann gilt⁵

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y = \left(\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_y \\ &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial r}{\partial y} \vec{e}_y \right) + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{e}_y \right) \\ &\stackrel{(1.27)}{=} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \left[\frac{\partial r}{\partial x} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial r}{\partial y} \left(\frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right) \right] \\ &\quad + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(\frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right) \right] \\ &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \left[\underbrace{\left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2}_{=1} \right] \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} \left[\underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial y}}_{=0} \right] \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \\ &\quad + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \left[\underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial y}}_{=0} \right] \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} \left[\underbrace{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2}_{=r^{-2}} \right] \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \\ &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Allgemein gilt nun also für den Gradienten

$$\vec{\nabla} f(u_1, \dots, u_n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{g_{ii}} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}. \quad (3.3)$$

⁵Die Rechnung ist nicht klausurrelevant aber Teil des Stoffes von MMP II.

Somit lässt sich der Nabla-Operator ebenfalls allgemein für beliebige Koordinatensysteme ausdrücken als

$$\vec{\nabla} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{g_{ii}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \frac{\partial}{\partial u_i}. \quad (3.4)$$

Für häufig verwendete Koordinatensysteme wird der Gradient nochmal speziell aufgeführt:

$$\begin{aligned} \text{Zylinderkoordinaten: } \vec{\nabla} f(r, \varphi, z) &= \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z \\ \text{Kugelkoordinaten: } \vec{\nabla} f(r, \vartheta, \varphi) &= \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi. \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.2 Die Divergenz

Man kann den Nabla-Operator ebenfalls mithilfe des Skalarprodukts auf ein Vektorfeld \vec{F} anwenden

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \text{div } \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \quad (3.6)$$

Die Divergenz trifft eine Aussage für die Quellstärke des Vektorfeldes \vec{F} an einem bestimmten Raumpunkt. Eine positive Divergenz steht für eine Quelle (Feldlinien treten aus dem Punkt heraus), eine negative Divergenz steht für eine Senke (Feldlinien laufen in den Punkt).

Analog zum Gradienten wird die Divergenz in Polarkoordinaten berechnet:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot (A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y) = \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot (A_r \vec{e}_r + A_\varphi \vec{e}_\varphi) \\ &\stackrel{(1.31)}{=} \left[\vec{e}_x \left(\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right] \\ &\quad \cdot \left[A_r \left(\frac{\partial x}{\partial r} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r} \vec{e}_y \right) + A_\varphi \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \vec{e}_y \right) \frac{1}{r} \right] \\ &= \vec{e}_x \left[\frac{\partial r}{\partial x} \left(\frac{\partial A_r}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} \vec{e}_\varphi \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \vec{e}_r + A_r \vec{e}_\varphi + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi - A_\varphi \vec{e}_r \right) \right] \\ &\quad + \vec{e}_y \left[\frac{\partial r}{\partial y} \left(\frac{\partial A_r}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} \vec{e}_\varphi \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \vec{e}_r + A_r \vec{e}_\varphi + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi - A_\varphi \vec{e}_r \right) \right] \\ &\stackrel{(1.27)}{=} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \vec{e}_r + r \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{e}_\varphi \right) \cdot [\dots] + \left(\frac{\partial r}{\partial y} \vec{e}_r + r \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{e}_\varphi \right) \cdot [\dots] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial A_r}{\partial r} + \cancel{\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}} - \cancel{\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} A_\varphi} + \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial A_r}{\partial r} + \cancel{\frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}} - \cancel{\frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} A_\varphi} \right] \\
&+ \left[r \cancel{\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial A_\varphi}{\partial r}} + r \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 A_r + r \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right. \\
&+ \left. r \cancel{\frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial A_\varphi}{\partial r}} + r \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 A_r + r \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right] \\
&= \frac{1}{r} A_r + \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} = \boxed{\frac{1}{r} \frac{\partial (r \cdot A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}}. \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Die Divergenz für die gängigsten Koordinatensysteme ist folgend nochmals aufgeführt:

$$\begin{aligned}
\text{Zylinderkoordinaten: } \vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= \frac{1}{r} \frac{\partial (r \cdot F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \\
\text{Kugelkoordinaten: } \vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= \frac{1}{r} \frac{\partial (r \cdot F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial (\sin \vartheta F_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \right]. \tag{3.8}
\end{aligned}$$

Für die Interpretation der Divergenz als eine Quellendichte ist die koordinatenfreie Definition wichtig:

$$\text{div } \vec{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{|\Delta V|} \oiint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{A}. \tag{3.9}$$

Es wird hierbei über den Rand $\partial(\Delta V)$ des Volumenelementes ΔV integriert. $d\vec{A}$ bezeichnet den nach außen gerichteten Normalenvektor der Randfläche. Wesentlich relevanter ist jedoch der GAUSS'sche Integralsatz:

$$\boxed{\iiint_V \text{div } \vec{F} \, dV = \oiint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{A}}. \tag{3.10}$$

Der GAUSS'sche Integralsatz ist besonders nützlich um die integrale- und differentielle Form der MAXWELL-Gleichungen ineinander überzuführen. Betrachtet man das GAUSS'sche Gesetz der Elektrodynamik in integraler Form

$$\frac{q}{\varepsilon_0} = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} \, dV = \oiint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} \tag{3.11}$$

und vergleicht dies mit (3.10), dann ergibt sich sofort

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{3.12}$$

3.3 Die Rotation

Wird das Kreuzprodukt des Nabla-Operators mit einem Vektorfeld \vec{F} ausgeführt, ergibt sich die *Rotation*

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{F} = \text{rot } \vec{F} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z.\end{aligned}\quad (3.13)$$

Die Rotation trifft eine Aussage darüber, ob in dem Vektorfeld Wirbel (Kreiströme) auftreten. Verschwindet die Rotation, bezeichnet man das Vektorfeld als wirbelfrei.

In den einzelnen Koordinatensystemen nimmt die Rotation folgende Form an:

$$\begin{aligned}\text{Zylinder: } \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rF_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z \\ \text{Kugel: } \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial(\sin \vartheta F_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial F_\vartheta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial r F_\varphi}{\partial r} \right) \vec{e}_\vartheta \\ &\quad + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r F_\vartheta}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \vartheta} \right) \vec{e}_\varphi.\end{aligned}\quad (3.14)$$

Eine in den Ingenieurwissenschaften geläufige Definition der Rotation lautet

$$\text{rot } \vec{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_{\partial V} d\vec{A} \times \vec{F}.\quad (3.15)$$

Eine weitere, für uns wichtigere Beziehung stellt der klassische Integralsatz von STOKES dar

$$\boxed{\iint_A \text{rot } \vec{F} d\vec{A} = \oint_{\partial A} \vec{F} d\vec{r}}.\quad (3.16)$$

Der Satz von STOKES kann ebenfalls zur Verknüpfung von integraler- und differentieller Form zweier MAXWELL-Gleichungen verwendet werden.

4 Konservative Felder

Ein Vektorfeld \vec{F} heißt konservativ, wenn es eine skalare Funktion U gibt für die gilt:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U. \quad (4.1)$$

Das Minuszeichen auf der rechten Seite der Gleichung ist lediglich eine bequeme Konvention. Die Funktion U wird Potential zu \vec{F} genannt.

Weiterhin sind für ein konservatives Kraftfeld \vec{F} Wegintegrale nur von den Endpunkten und nicht vom Weg abhängig. Wird also entlang eines geschlossenen Weges integriert, fallen die Integralgrenzen zusammen und das Ergebnis ist Null

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \vec{F} \text{ konservativ.} \quad (4.2)$$

Für das Wegintegral lässt sich schreiben

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} d\vec{r} &= - \int_C (\vec{\nabla}U) d\vec{r} = - \int_{t_1}^{t_2} (\vec{\nabla}U) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dt}}_{\frac{dU}{dt}} dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \frac{dU}{dt} dt = U(t_1) - U(t_2). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Unter Verwendung des Satzes von STOKES (3.16), folgt für ein konservatives Kraftfeld:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial A} \vec{F} d\vec{r} &= \iint_A \text{rot } \vec{F} d\vec{A} \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \text{rot } \vec{F} &= 0 \Leftrightarrow \vec{F} \text{ konservativ.} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Weiterhin folgt daraus eine weitere nützliche Beziehung:

$$\text{rot}(\text{grad } U) = \underbrace{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}\right)}_{=0} \vec{e}_x + \underbrace{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x}\right)}_{=0} \vec{e}_y + \underbrace{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}\right)}_{=0} \vec{e}_z$$

$\text{rot}(\text{grad } U) = 0$

(4.5)

Das Verschwinden der einzelnen Summanden beruht auf dem Satz von SCHWARZ, nach dem partielle Ableitungen vertauscht werden dürfen.