



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>3</b>
1.1	Was ist Kern- und Teilchenphysik . . . . .	3
1.2	Nomenklatur + Einheiten . . . . .	3
1.3	Streuexperimente . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Eigenschaften stabiler Kerne</b>	<b>6</b>
2.1	Kernradius . . . . .	6
2.2	Ladungs- und Massenverteilung . . . . .	9
2.3	Kernmasse . . . . .	11
2.4	Bindungsenergie . . . . .	12
2.5	Separations- und Paarungsenergie . . . . .	13
2.6	Fermigas-Modell . . . . .	14
2.7	Tröpfchenmodell . . . . .	16
2.8	Kernspin $I$ . . . . .	20
2.9	Magnetisches Dipolmoment . . . . .	21
2.10	Elektrisches Quadrupolmoment . . . . .	25
2.11	Parität . . . . .	27
2.12	Schalenmodell . . . . .	28
2.13	Rotation und Vibration von Kernen . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Zerfall instabiler Kerne</b>	<b>38</b>
3.1	Zerfallsarten . . . . .	38
3.2	Das Zerfallsgesetz . . . . .	39
3.3	Einheiten . . . . .	41
3.4	Natürliche Radioaktivität . . . . .	42
3.5	Alpha-Zerfall . . . . .	43
3.6	Kernspaltung . . . . .	47
3.7	Elektromagnetische Übergänge ( $\gamma$ -Strahlung) . . . . .	53
3.8	Der Beta-Zerfall . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Elementarteilchen</b>	<b>66</b>

# 1 Einführung

## 1.1 Was ist Kern- und Teilchenphysik

Kernphysik ist die Wissenschaft, die sich mit dem Atomkern, seinem Aufbau, Vorkommen, Eigenschaften und Verhalten befasst.

Kernphysik ist die Physik der kondensierten stark wechselwirkenden Materie. In der Kernphysik wird untersucht,

- aus welchen Bausteinen die Atomkerne aufgebaut sind,
- welche Kräfte sie zusammenhalten,
- wie groß die Bindungsenergien sind,
- welche Energiezustände angeregter Kerne möglich sind,
- in welcher Form die Anregungsenergie abgegeben wird,
- wann Kerne zerfallen können,
- wie Kerne beim Zusammenstoß mit anderen Teilchen reagieren.

In der Teilchenphysik (Hochenergiephysik) wird die Substruktur der Kernbausteine untersucht.

## 1.2 Nomenklatur + Einheiten

Ein Atom/Nuklid ist charakterisiert durch:

- $Z$  = Zahl der Protonen = Kernladungszahl
  - $N$  = Zahl der Neutronen
  - $A = Z + N$  Zahl der Nukleonen = Massenzahl
  - $q_+$  Ionisierungsgrad
- |     |       |
|-----|-------|
| $A$ | $q_+$ |
| $X$ |       |
| $Z$ | $N$   |

Die Darstellung des Nuklids erfolgt gemäß dem rechtsstehenden Schema. Beispiele dafür sind  ${}^{238}_{92}\text{U}_{146}$ ,  ${}^{238}_{92}\text{U}_{146}$ ,  ${}^4_2\text{He}_2$ , ...

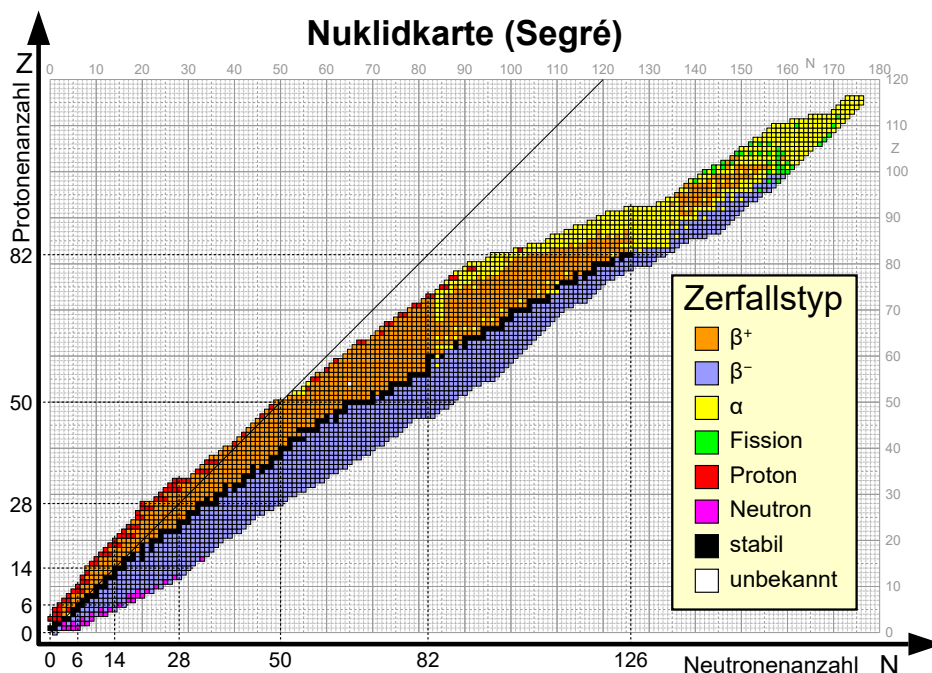
*Isotope*: Kerne mit gleichem  $Z$ , Beispiele:  ${}^1_1\text{H}_0$ ,  ${}^2_1\text{D}_1$ ,  ${}^3_1\text{T}_2$  bzw.  ${}^{12}_6\text{C}_6$ ,  ${}^{13}_6\text{C}_7$ ,  ${}^{14}_6\text{C}_8$

*Isotone*: Kerne mit gleichem  $N$ , Beispiel:  ${}^4_2\text{He}_2$ ,  ${}^3_1\text{T}_2$

*Isobare*: Kerne mit gleichem  $A$ , Beispiel:  ${}^{14}_6\text{C}_8$ ,  ${}^{14}_7\text{N}_7$

*Isomere*: In der Chemie bezeichnen Isomere chemische Verbindungen, die die gleichen Atome enthalten, jedoch in unterschiedlicher Anordnung. In der Kernphysik sind damit langlebige instabile Atomkerne bzw. metastabile angeregte Kerne gemeint.

*Spiegelkerne*: Kerne mit spiegelbildlicher Anzahl an  $N$  und  $Z$ :  ${}^{37}_{19}\text{Kr}_{18} \Leftrightarrow {}^{37}_{18}\text{Ar}_{19}$



**Fig. 1:** Die Farben auf der Nuklidkarte symbolisieren die Zerfallsarten der verschiedenen Isotope. Die häufigste Darstellungsweise ist die Karlsruher Nuklidkarte. Es zeigt sich, dass stabile Kerne neutronenreich sind ( $N \geq Z$ ). Abbildung aus [1].

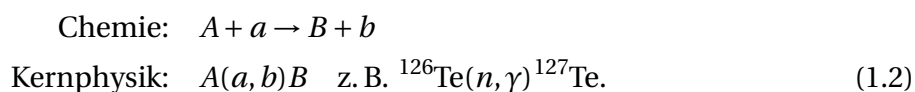
### Typische Größenordnungen in der Kernphysik

- Länge: 1 Fermi =  $10^{-15}$  m = 1 fm
- Fläche: 1 Barn =  $10^{-28}$  m<sup>2</sup>
- Energie: 1 eV =  $1,6 \cdot 10^{-19}$  CV
- Masse: 1 atomare Masseneinheit [u] =  $\frac{1}{12}$  m (<sup>12</sup>C) =  $1,66 \cdot 10^{-27}$  kg  
Vor 1960: [amu] =  $\frac{1}{16}$  m (<sup>16</sup>O)  $\Rightarrow$  1[u] = 1,000317917 [amu]

Über die Beziehung  $E = m \cdot c^2$  lässt sich die Masse der Atombestandteile auch in Energieeinheiten ausdrücken. Es folgt daher

$$\begin{aligned} e^- &= 511 \text{ keV}/c^2 \\ p &= 938,279 \text{ MeV}/c^2 \\ n &= 939,573 \text{ MeV}/c^2. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Kernreaktionen werden in der Kernphysik anders beschrieben als in der Chemie. Trifft ein Teilchen  $a$  auf den Kern  $A$  und entsteht dabei der Kern  $B$  mit Ejektil  $b$ , dann wird folgende Schreibweise verwendet:

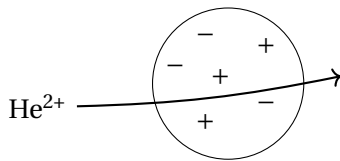


Te 126	Elementsymbol und Nukleonenzahl
18.95	Häufigkeit im natürlichen Element (Atom %)
$\sigma 0.135 \pm 0.9$	$(n, \gamma)$ -Querschnitt für die Bildung von $^{127}\text{Te}$ mit thermischen Neutronen
Tm 170	Elementsymbol und Nukleonenzahl
128,6 d	Halbwertszeit
$\beta^- 1,0...$	Zerfallsarten und Maximalenergie der $\beta^-$ -Strahlung (MeV)
$\gamma 84...$	$\gamma$ -Energie (keV)
$e^-; \sigma 92$	Konversionselektronen und $(n, \gamma)$ Querschnitt

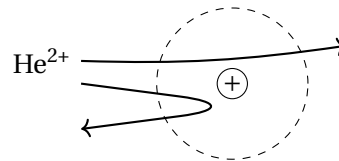
### 1.3 Streuexperimente

Neben der Spektroskopie bilden Streuexperimente die wesentliche Untersuchungsmethode in der Kern- und Elementarteilchenphysik. Die Kenntnisse über die Kernstruktur basieren auf elastischer und inelastischer Streuung.

Die RUTHERFORD'schen Streuexperimente führten zur Entdeckung des Atomkerns. Bis dahin galt das Atommodell nach THOMSON.

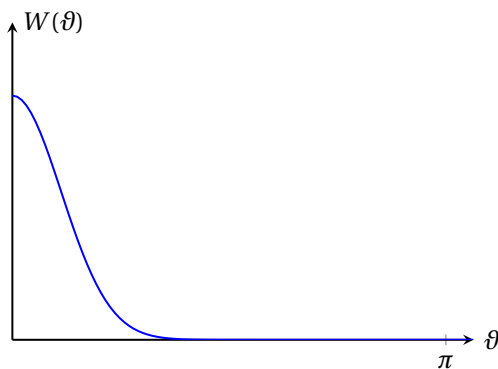


THOMSON'sches Atommodell. Positive Ladungen sind gleichmäßig im Atom verteilt ( $D \approx 10^{-10}$  m).

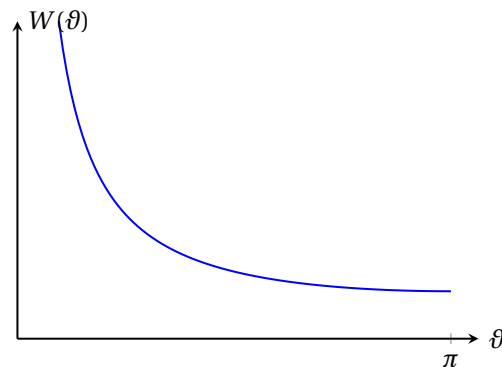


RUTHERFORD'sches Atommodell. Die positive Ladung ist im Kern konzentriert ( $D \approx 10^{-14}$  m).

Die Experimentelle Überprüfung beider Theorien erfolgte durch Messung der Streuung von  $\alpha$ -Teilchen an einer dünnen Goldfolie.



THOMSON'sches Atommodell: große Werte von  $\vartheta$  sind beliebig unwahrscheinlich.

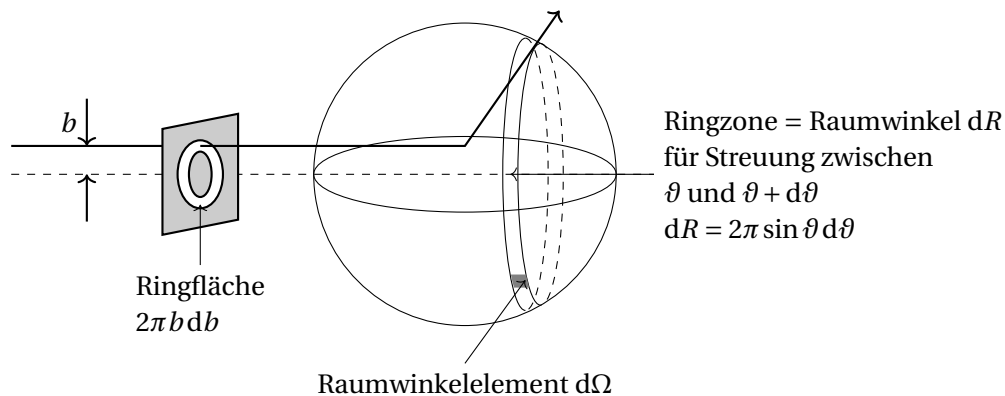


RUTHERFORD'sches Atommodell: große Werte von  $\vartheta$  treten mit endlicher Wahrscheinlichkeit auf.

## 2 Eigenschaften stabiler Kerne

### 2.1 Kernradius

Im Jahr 1909 führte RUTHERFORD das Experiment der Streuung von  $\alpha$ -Teilchen ( $\text{He}^{2+}$ ) an einer Gold-Folie durch. Als Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  wird nun die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass bei einem Streuexperiment zwei Teilchen in Wechselwirkung treten  $\Rightarrow \sigma$  hat die Dimension einer Fläche [barn]. Im Experiment wird meist der differentielle Wirkungsquerschnitt gemessen, welcher die Winkelverteilung der Streueignisse beschreibt.



Der differentielle Wirkungsquerschnitt (bezogen auf ein Streuzentrum) wird nun definiert als

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\vartheta} = \frac{\text{Zahl der Streueignisse pro Zeit in } d\Omega}{\text{Teilchenstromdichte}}. \quad (2.1)$$

Aufgrund der Erhaltung der Teilchenzahl ergibt sich nun (ausführliche Herleitung in THORNTON, MARION. Classical dynamics of particles and systems, Kap. 9.9)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\vartheta} = \frac{b}{\sin \vartheta} \left| \frac{db}{d\vartheta} \right| \quad (2.2)$$

wobei  $b$  den Stoßparameter bezeichnet. Dieser beschreibt den minimalen senkrechten Abstand zum Streuzentrum, wenn das einfallende Teilchen nicht gestreut werden würde, bzw. den Abstand zur Achse die in Einfallsrichtung durch das Streuzentrum verläuft.

Der Streuwinkel  $\vartheta$  ist dabei abhängig von  $b$ . Der Zusammenhang folgt aus dem Wechselwirkungspotential  $V$ . Mithilfe der Impuls- und Energieerhaltung folgt

$$\vartheta(b) = \pi - 2b \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{1}{r \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{V}{E}}} dr \quad (2.3)$$

mit dem Vektor  $\mathbf{r}$  als Relativkoordinate im Schwerpunktsystem.  $E$  bezeichnet die Energie. Das Schwerpunktsystem ist nur dann mit dem Laborsystem vergleichbar, wenn der Schwerpunkt im Koordinatenursprung ruht. Bei dem Beschuss von  $\alpha$ -Teilchen ( $m_{\alpha} = 4 \text{ u}$ ) auf Gold ( $m_{\text{Au}} = 198 \text{ u}$ ) ist dies in guter Näherung jedoch gegeben.

Ist nun also das Potential  $V$  bekannt, dann lässt sich daraus  $\vartheta(b)$  gewinnen, was direkt zum differentiellen Wirkungsquerschnitt führt. Bei der RUTHERFORD-Streuung ist die Wechselwirkung durch das COULOMB-Potential gegeben:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}, \quad (2.4)$$

woraus dann die RUTHERFORD'sche Streuformel resultiert

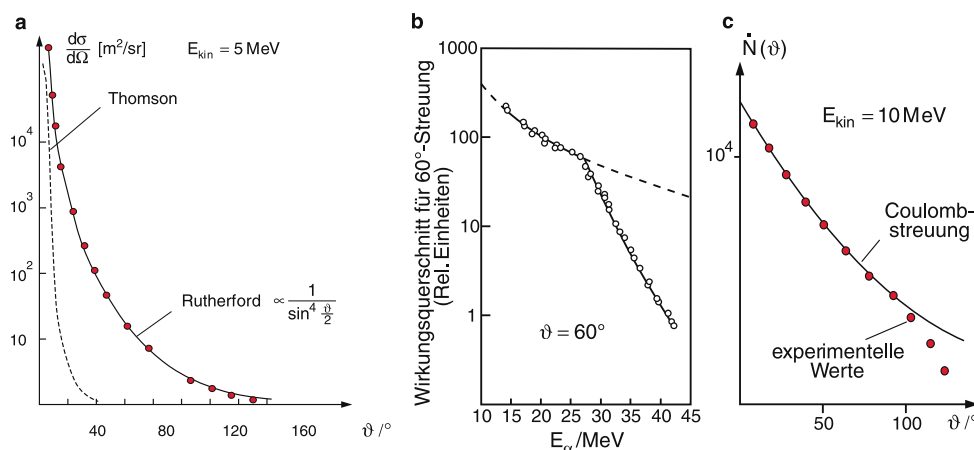
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\vartheta = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{1}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\vartheta/2)}. \quad (2.5)$$

### Vergleich mit dem Experiment

Werden nun die experimentellen Daten von RUTHERFORDS Experiment mit den theoretisch berechneten Streuquerschnitten für das RUTHERFORD- und THOMSON-Modell verglichen, zeigt sich eine gute Übereinstimmung der experimentellen Werte mit dem RUTHERFORD-Modell.

Diese Übereinstimmung ist jedoch nur gegeben für kleine Energien und kleine Winkel. In Abbildung 4 ist dargestellt, dass bei einem festen Winkel ( $60^\circ$ ) Abweichungen ab einer Energie von ca. 30 MeV auftreten und bei konstanter Energie (10 MeV) die experimentellen Werte nur für Winkel  $\vartheta < 100^\circ$  durch RUTHERFORD erklärt werden können.

Der Grund dafür liegt in der falschen Annahme, dass die Kerne punktförmig sind. Wenn das  $\alpha$ -Teilchen dem Streupartner (Goldkern) sehr nahe kommt, wirkt neben der COULOMB-Kraft ebenfalls die kurzreichweitige starke Kernkraft. Daher kann diese Tatsache zur Abschätzung des Kernradius verwendet werden.



**Fig. 4:** a.) Vergleich der experimentellen Ergebnissen RUTHERFORDS mit den Wirkungsquerschnitten beider Atommodelle.  
 b.) Abweichung vom COULOMB-Streuquerschnitt bei höheren Energien.  
 c.) Abweichung der Zählrate für große Winkel. Abbildung aus [2].

### Berechnung des Kernradius

Bei der Analyse von weiteren Elementen ergibt sich ein empirischer Zusammenhang für den Kernradius

$$R = r_0 A^{1/3} \quad \text{mit} \quad r_0 = 1,3(1) \text{ fm.} \quad (2.6)$$

Die Proportionalität  $\sim \sqrt[3]{A}$  ergibt sich aus dem Volumen, der als kugelförmig angenommen Kernbausteine mit Volumen  $V = \frac{4}{3}\pi R^3 \sim A$ . Dies gilt nur unter der Annahme, dass die Dichte des Kerns

$$\rho \approx 10^{17} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (2.7)$$

als konstant angenommen wird. Dabei ähnelt die Dichte eines Kerns der eines Neutronensterns.

### Bestimmung des Kernradius mithilfe von Spiegelkernen

Eine weitere Methode zur Bestimmung des Kernradius ist der Vergleich von Spiegelkernen (Kerne mit spiegelbildlicher Anzahl an Neutronen und Protonen). Unter der Annahme, dass die Masse von Neutronen und Protonen etwa gleich ist und sie die gleiche Anzahl an Kernbausteinen ( $A$ ) enthalten, besitzen Spiegelkerne etwa die gleiche Masse und sind auch gleich groß. Der wesentliche Unterschied der Spiegelkerne ist die Anzahl der Protonen, was in einer unterschiedlichen COULOMB-Energie resultiert.

Wird nun der Kern als eine homogen geladene Kugel mit Radius  $R$  und Ladung  $Z \cdot e$  angenommen, dann folgt aus der Elektrodynamik für die COULOMB-Energie [Demtröder 4, S.29]

$$E_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{5} \frac{e^2}{R} Z^2. \quad (2.8)$$

Der Unterschied der COULOMB-Energie von zwei Spiegelkernen ergibt sich aufgrund des verschiedenen  $Z$  zu

$$\begin{aligned} \Delta E_C &= E_C(X) - E_C(Y) \\ &= E_C({}^{11}_6\text{C}_5) - E_C({}^{11}_5\text{B}_6) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{5} \frac{e^2}{R} (6^2 - 5^2). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Die linke Seite der Gleichung ergibt sich experimentell aus der Maximalenergie im Spektrum beim  $\beta$ -Zerfall. In dem Nuklid  ${}^{11}_6\text{C}_5$  wird ein Proton des Kerns unter  $\beta^+$ -Zerfall in ein Neutron umgewandelt und es entsteht  ${}^{11}_5\text{B}_6$ . Durch Umstellen von (2.9) nach  $R$  lässt sich der Kernradius  $R$  bzw.  $r_0$  abschätzen.



## 2.2 Ladungs- und Massenverteilung

Im vorherigen Abschnitt wurde der Kern als homogene Kugel mit scharfem Rand angesehen, wobei der Radius  $R$  dadurch definiert wurde, dass starke Kernkräfte auftreten. In Wirklichkeit sinken die Kernkräfte trotz der kleinen Reichweite nicht plötzlich auf null ab, d. h. es gibt keinen scharfen Kernrand. Sowohl Massen- als auch Ladungsdichte werden i. A. monoton fallende Funktionen des Abstandes vom Kernzentrum sein. Zudem verbietet die HEISENBERG'sche Unschärfrelation einen unendlich scharfen Rand.

Es stellt sich nun die Frage, wie der Kern "abgetastet" werden kann? Zur Auflösung des Kerns werden Teilchen benötigt, die eine DEBROGLIE-Wellenlänge  $\lambda$  besitzen, die viel kleiner als der Kernradius ist:  $\lambda \ll R$ . Aufgrund der hohen beteiligten Energien wird als Ansatz der relativistische Impuls  $p$  gewählt, welcher definiert ist als

$$cp = \sqrt{E^2 - E_0^2} = \sqrt{(E_0 + E_{\text{kin}})^2 - E_0^2} = \sqrt{2E_0 E_{\text{kin}} + E_{\text{kin}}^2}. \quad (2.10)$$

Mit  $E_0 = m_0 c^2$  folgt nun  $p = \sqrt{2m_0 E_{\text{kin}} + \frac{E_{\text{kin}}^2}{c^2}}$ , woraus die DEBROGLIE-Wellenlänge resultiert als

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 E_{\text{kin}} + \frac{E_{\text{kin}}^2}{c^2}}}. \quad (2.11)$$

Damit die DEBROGLIE-Wellenlänge der Sonden klein genug ist, werden hohe kinetische Energien  $E_{\text{kin}}$  benötigt.

Die Frage ist nun, mit welchen Teilchen der Kern beschossen werden soll, um seine innere Struktur zu erhalten?

- $\alpha$ -Teilchen: Es treten COULOMB-Wechselwirkungen und starke Kernkräfte mit dem Kern auf. Die Streuung hängt sowohl von Ladungs- als auch von der Massenverteilung ab
- $e^-$ : Elektronen unterliegen als Leptonen nicht der starken Wechselwirkung (Kapitel 4). Es lässt sich die Ladungsverteilung ausmessen.
- $n$ : Neutronen unterliegen nicht der COULOMB-Wechselwirkung. Es lässt sich die Massenverteilung ausmessen.

### Massenverteilung

Für die Massendichte  $\rho_m(r)$  wird meistens eine FERMI-DIRAC-Verteilung angenommen

$$\rho_m(r) = \rho_0 \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{r - R_{1/2}}{a}\right)}, \quad (2.12)$$

wobei  $a$  die Dicke der Randzone beschreibt und  $r = R_{1/2}$  der halben Dicke des Kerns entspricht.

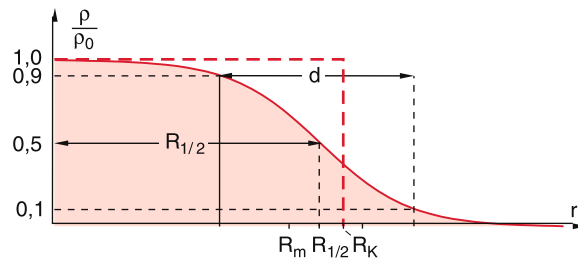


Fig. 5: Radiale FERMI-Verteilung  $\rho(r)$  der Massendichte im Kern. Abbildung aus [2].

Ladungsverteilung

Die Ladungsverteilung lässt sich genauer messen, denn Elektronen sind besser handhabbar, ihre Energie lässt sich besser einstellen und Elektronen lassen sich einfacher fokussieren. Zudem ist die COULOMB-Wechselwirkung besser bekannt als die Kernkraft.

In einem Experiment wird dann mit Elektronen der Energie von 500 MeV gearbeitet, was einer DEBROGLIE-Wellenlänge von  $\lambda = 0,4$  fm entspricht. Dies ist hinreichend, um  $e^-$ -Beugung am Kern zu erzeugen. Es entsteht eine Überlagerung der COULOMB-Streuung mit einer Diffraktionsstruktur.

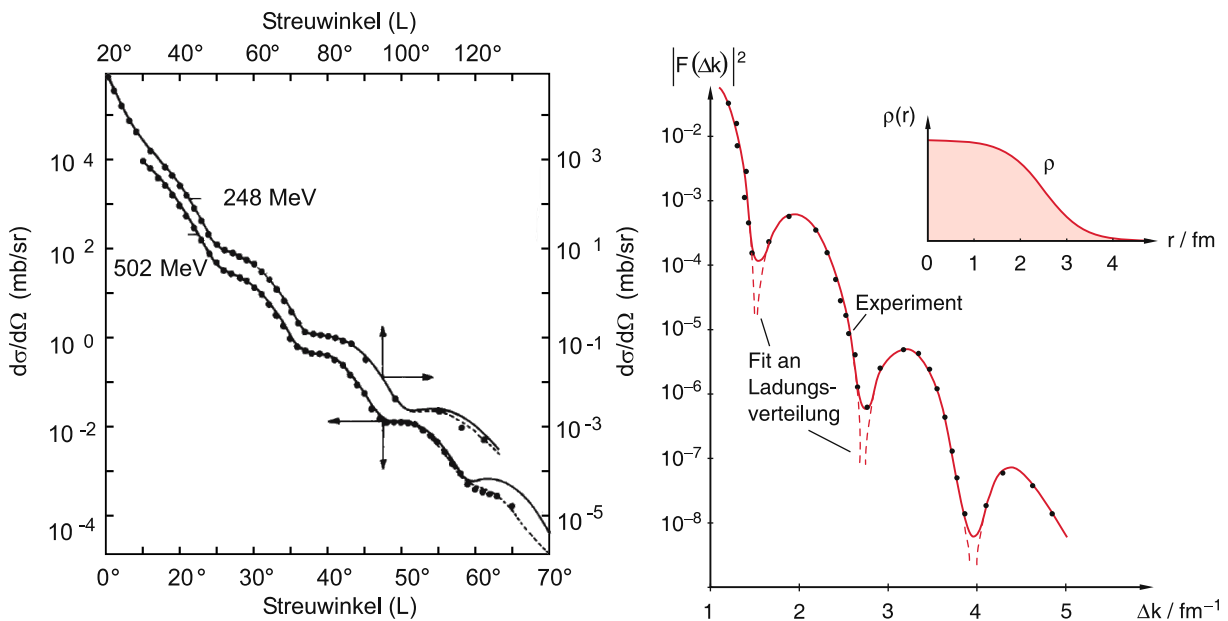


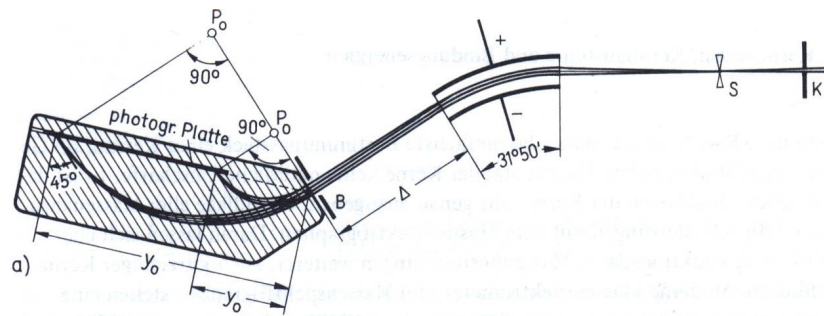
Fig. 6: Links: Elektronenstreuung an Uran mit Diffraktionsstruktur. Abbildung aus [3].  
 Streuung von Elektronen mit 750 MeV an  $^{16}\text{O}$  Kernen. Abbildung aus [2].

Die mathematische Beschreibung erfordert die Berücksichtigung des Spins. Zudem muss die Streuung relativistisch betrachtet werden. Dies führt zur MOTT-Streuung

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{\text{Mott}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{\text{Ruth.}} \underbrace{\left(\frac{1-\beta^2}{\beta^4}\right)}_{\text{relativ.}} \underbrace{\left[1-\beta^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right]}_{\text{Spin}} \tag{2.13}$$

## 2.3 Kernmasse

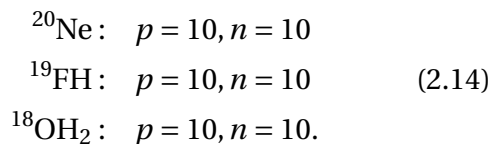
Die Kernmasse ist wie der Kernradius einfach zu bestimmen und mithilfe von Massenspektrometern sehr genau zu messen. Dabei werden die Atome ionisiert und eine Beschleunigungsspannung  $U$  angelegt. Senkrecht zur Beschleunigungsrichtung wird dann ein elektrisches oder magnetisches Feld angelegt, um damit einen Energiefilter ( $E$ -Feld) oder Impulsfilter ( $B$ -Feld) zu erzeugen.



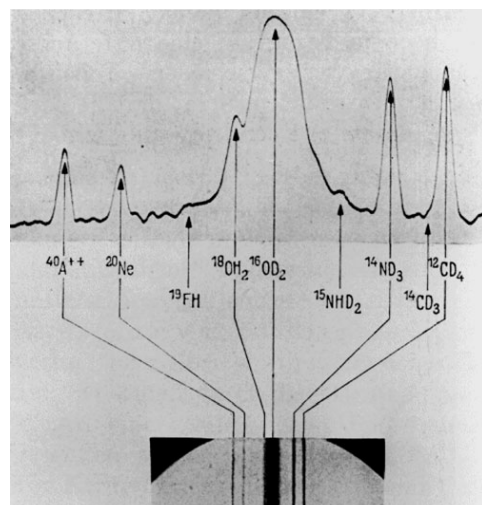
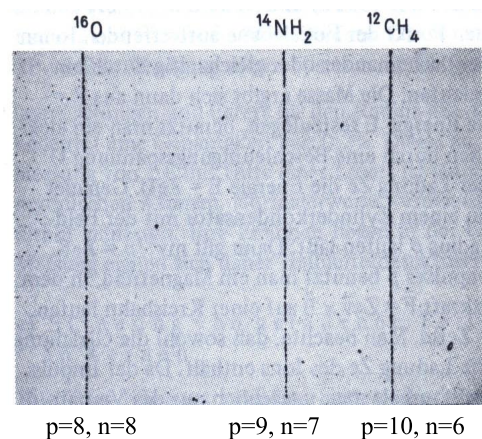
**Fig. 7:** Massenspektrometer: Ein Ionenstrahl wird mithilfe eines Kondensators parallel gerichtet und tritt durch eine Blende in ein Magnetfeld (schraffierter Bereich). Durch die Lorentzkraft werden leichte Elemente stärker abgelenkt als schwere. Abbildung aus [4].

Dass Protonen und Neutronen unterschiedlich schwer sind, zeigt das nebenstehende Bild [4]. Hier wurden verschiedene Verbindungen mit der Massenzahl 16 analysiert. Dabei ist allerdings die jeweilige Verteilung von Protonen und Neutronen unterschiedlich. Da Neutronen schwerer als Protonen sind, ist das  $^{16}\text{O}$  hier am schwersten und erfährt im Magnetfeld eine kleinere Ablenkung als  $^{14}\text{NH}_2$  oder  $^{12}\text{CH}_4$ .

Im rechten Bild [2] ist ein hochaufgelöstes Massenspektrum von Ionen der Massenzahl 20 dargestellt. Ein paar auftretende Verbindungen sind



Es zeigt sich sich, dass verschiedene Moleküle mit gleichem  $A = Z + N$  unterschiedlich schwer sind. An dieser Stelle tritt ein Massendefekt auf. Es macht einen Unterschied, ob die Protonen und Neutronen in einem Kern vereinigt sind oder nicht. Die Kerne sind leichter als die Summe ihrer Bausteine, wenn sie in einem Kern vereinigt sind.



## 2.4 Bindungsenergie

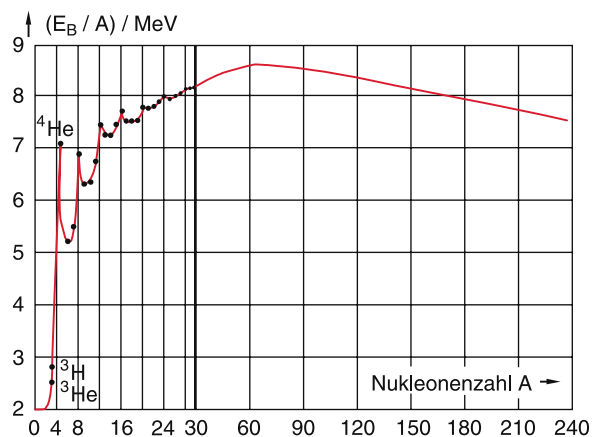
Die Kernmassen sind immer leichter als die Summe der einzelnen Protonen-, Elektronen- und Neutronenmassen:

$$\text{Kernmasse} < Z \cdot m_{\text{H}} + \underbrace{(A - Z)}_{=N} \cdot m_{\text{n}}. \quad (2.15)$$

Dieser Massendefekt entspricht der Bindungsenergie.

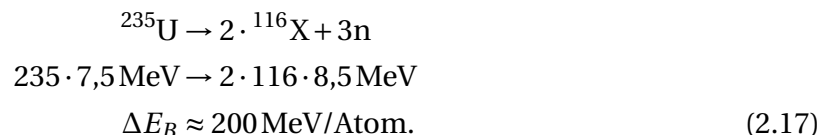
Die Bindungsenergie ist also die Energie, die aufgebracht werden muss, um den Kern in seine einzelnen Nukleonen zu zerlegen:

$$\begin{aligned} m(Z, N) &= Z \cdot m_{\text{H}} + N \cdot m_{\text{n}} - \frac{E_{\text{B}}(Z, N)}{c^2} \\ E_{\text{B}}(Z, N) &= (Z \cdot m_{\text{H}} + N \cdot m_{\text{n}} - m(Z, N))c^2 \\ \frac{E_{\text{B}}}{A} &= \frac{c^2}{A} (Z \cdot m_{\text{H}} + N \cdot m_{\text{n}} - m(Z, N)). \end{aligned} \quad (2.16)$$



**Fig. 8:** Mittlere Bindungsenergie pro Nukleon als Funktion der Nukleonenzahl. Das Maximum liegt etwa bei 60 (Eisen). Abbildung aus [2].

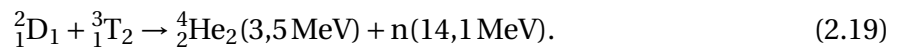
In Abbildung 8 ist erkennbar, dass die Bindungsenergie bei  $A \approx 60$  ein Maximum annimmt. Wenn ein schweres Nuklid (rechts vom Maximum) durch Fission gespalten wird, dann erhöht sich der Massendefekt pro Nukleon. Diese nun zusätzlich fehlende Masse wird in Energie umgewandelt, die genutzt werden kann. Ein Beispiel ist die Spaltung von Uran



Wenn zwei leichte Nuklide durch Kernfusion verschmelzen, dann erhöht sich ebenfalls der Massendefekt pro Nukleon



Bei einer Wasserstoffbombe wird beispielsweise Deuterium mit Tritium fusioniert und es ergibt sich



Da die Bindungsenergie nur bis zum Element Eisen ansteigt, enden alle Fusionsprozesse bei Eisen. Dies wird ebenfalls in Sternen beobachtet.

Abbildung 8 zeigt ebenfalls, dass die Bindungsenergie mit steigender Nukleonenzahl trotzdem recht konstant bleibt (die Schwankungen liegen nur bei knapp  $\pm 1\text{MeV}$ ). Daraus lässt sich schlussfolgern, dass die Kernkraft eine Zweikörperkraft ist, die sehr kurzreichweitig ist. Im Kern wechselwirken die Nukleonen nur mit ihren nächsten Nachbarn und nicht mit allen Nukleonen des Kerns. Würden alle Nukleonen wechselwirken, gelte für die Bindungsenergie

$$E_B \propto \frac{1}{2}A(A-1) \propto A^2$$

$$\text{oder } \frac{E_B}{A} \propto A, \quad (2.20)$$

was allerdings nicht beobachtet wird.

## 2.5 Separations- und Paarungsenergie

*Separationsenergie* bezeichnet die Energie, die benötigt wird, um aus einem speziellen Kern ein einzelnes Nukleon abzuspalten. Die Definition lässt sich analog wie die Ionisierungsenergie für Elektronen in der Atomhülle interpretieren.

Für ein Neutron ergibt sich die Separationsenergie zu

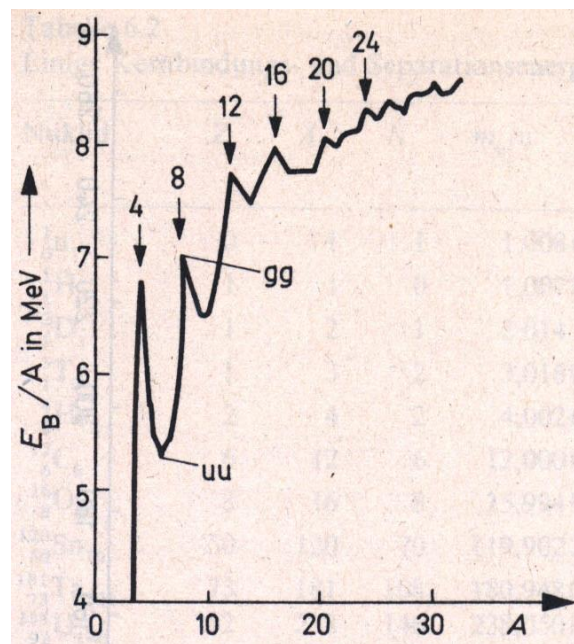
$$S_n(Z, N) = \underbrace{[m(Z, N-1) + m_n]}_{\text{neuer Kern}} - \underbrace{m(Z, N)}_{\text{alter Kern}} c^2$$

$$\stackrel{(2.16)}{=} E_B(Z, N) - E_B(Z, N-1). \quad (2.21)$$

Sie lässt sich auch als Änderung der Gesamtbindungsenergie auffassen. Die Größenordnung von  $S$  entspricht wenigen MeV bis zu 20 MeV.

Ebenso wie bei der Ionisierungsenergie der Atomhülle, hängt die Separationsenergie von der Schalenstruktur des Kerns ab.

Im nebenstehenden Bild [5] ist nochmal die Bindungsenergie für leichte Nuklide dargestellt. Hier ist eindeutig die zackenförmige Struktur sichtbar. Kerne, die sowohl eine gerade Zahl von Protonen als auch Neutronen





besitzen, weisen eine signifikant höhere Bindungsenergie auf, als Kerne, die eine ungerade Anzahl an Protonen und Neutronen enthalten. Diese sind mit "gg" für gerade-gerade oder "uu" für ungerade-ungerade gekennzeichnet.

Es zeigt sich also, dass es schwer ist, Nukleonen aus Kernen abzuspalten, deren Anzahl an Neutronen und Protonen jeweils gerade ist. Die Separationsenergie ist dementsprechend groß.

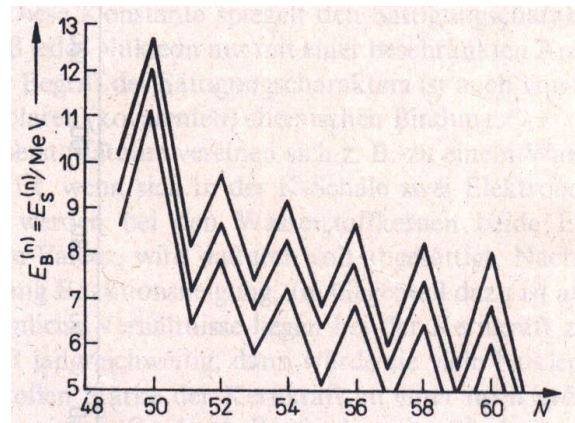
Den Grund dafür stellt das PAULI-Prinzip dar. Nukleonen (Protonen und Neutronen) sind Fermionen mit dem Spin  $1/2$ , somit ist die Bindung stärker, wenn die jeweiligen Nukleonen mit entgegengesetztem Spin paarweise auftreten.

Dies führt zu einer empirischen Einführung der Paarungsenergie  $\delta_n, \delta_p$  mit

$$\delta_n = S_n(Z, N) - S_n(Z, N - 1) \sim 2 \text{ MeV}. \quad (2.22)$$

In der nebenstehenden Abbildung [5] ist die Separationsenergie des Neutrons als Funktion der Neutronenzahl bei gerader Protonenzahl im Gebiet um Zirkonium ( $Z = 42, 40, 38$  von oben nach unten) dargestellt.

Deutlich erkennbar ist hier die Paarungsenergie als die Änderung der Separationsenergie entlang der Abszisse.



## 2.6 Fermigas-Modell

Analog zur Festkörperphysik, wo die Elektronen als FERMI-Gas betrachtet werden, lassen sich Nukleonen als System freier Spin  $1/2$ -Teilchen im Kern als FERMI-Gas im kugelsymmetrischen Rechteckpotential betrachten.

Die stationäre SCHRÖDINGER-Gleichung liefert die Energieniveaus

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} k_n^2 \quad \text{mit} \quad k_n = \frac{n\pi}{a}, \quad (2.23)$$

wobei  $a$  die Ausdehnung des Kerns beschreibt und der Impuls der Nukleonen nach der Formel von DEBROGLIE folgende Form annimmt:

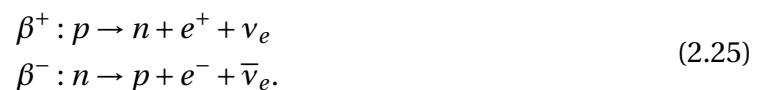
$$p = \hbar k = \frac{h}{\lambda_{\text{deBroglie}}}. \quad (2.24)$$

Protonen und Neutronen besitzen als Fermionen den Spin  $1/2$  und gehorchen deshalb dem PAULI-Prinzip, d. h. jeder Quantenzustand ist höchstens von zwei Protonen oder zwei Neutronen mit Spin-up  $\uparrow$  und Spin-down  $\downarrow$  besetzt.

Protonen und Neutronen müssen hier nun getrennt betrachtet werden, denn auf Protonen wirkt zusätzlich noch die abstoßende COULOMB-Kraft. Dadurch liegen die Energieniveaus der Protonen um den Betrag  $E_C$  höher als die der Neutronen. Weiterhin muss bei dem Einbringen eines Protons in den Kern die  $1/r$ -Barriere des COULOMB-Potentials überwunden werden, bis es in den Potentialtopf fällt [4].

Jedoch muss die FERMI-Energie im p- und n-System etwa gleich groß sein. Dies folgt aus der notwendigen Gleichheit des chemischen Potentials im Kern (Die FERMI-Energie entspricht dem chemischen Potential am absoluten Nullpunkt). Dadurch stehen den Protonen weniger Zustände zur Verfügung, die sie besetzen können, wodurch sich der Neutronen-Überschuss bei schweren Kernen erklären lässt.

Sind die beiden FERMI-Niveaus nicht ausgeglichen, erfolgt  $\beta$ -Zerfall:



Beim  $\beta^+$  Zerfall entsteht also zum Neutron noch ein Positron und ein Elektronen-Neutrino, während beim  $\beta^-$  Zerfall ein Elektron und ein Elektronen-Anti-Neutrino entsteht.

### Wood-Saxon-Potential

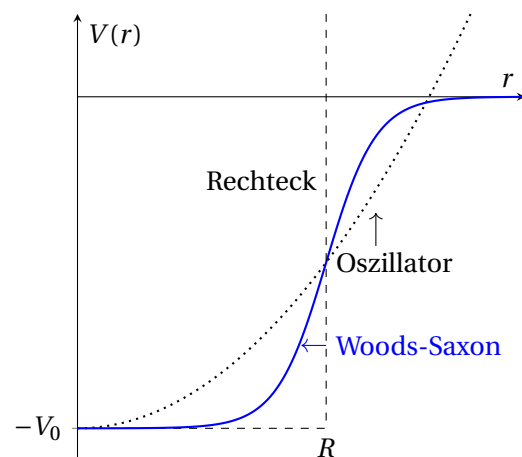
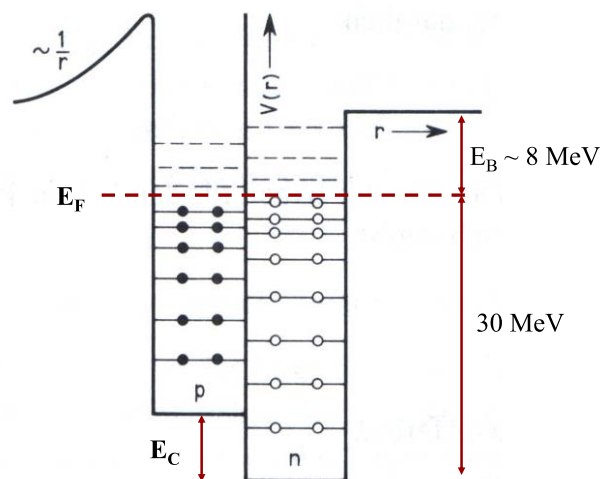
Einen realistischen Potentialverlauf innerhalb des Atomkerns liefert das Wood-Saxon-Potential, welches eine Mischung aus einem Oszillator- und Kastenpotential darstellt

$$V(r) = -V_0 \frac{1}{1 - \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)}.\quad (2.26)$$

Der Fitparameter  $a$  stellt dabei ein Maß für die Randunschärfe dar, d. h. für einen Bereich von  $r$ , bei dem das Potential sich stark ändert.

Aus der Festkörperphysik ist die Zustandsdichte eines 3D FERMI-Gases bereits bekannt als

$$D(E) = \frac{dN}{dE} = 2 \cdot \frac{V m^{2/3}}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}} \sqrt{E}.\quad (2.27)$$



Die FERMI-Energie des Neutron-Systems ergibt sich dabei zu

$$E_F^N = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{2m_N} \hbar^2 \left( \frac{N}{V} \right)^{2/3}. \quad (2.28)$$

Analog lässt sich die FERMI-Energie für ein Proton durch die Substitution  $N \leftrightarrow Z$  gewinnen.

Aus Kapitel 2.1 ist bereits bekannt, dass die Dichte  $\frac{N}{V} \propto \rho = \text{konstant}$  ist. Damit folgt für die FERMI-Energie der Nukleonen:

$$\boxed{E_F = \text{konstant}} \approx 30 \text{ MeV}. \quad (2.29)$$

Mit der Bindungsenergie von etwa 8 MeV ergibt sich eine Gesamttiefe des Potentialtopfes von ungefähr 40 MeV. Dabei ändert sich die Höhe des Potentialtopfes kaum, nur die Zustände rücken näher zusammen, wenn die Nukleonenzahl zunimmt.

Die FERMI-Energie  $E_F$  des Elektronengas im Festkörper ist proportional zu  $\rho_{\text{el}}^{2/3}$  und ist nicht konstant, sondern hängt maßgeblich von der Struktur der Valenzschale ab. Die FERMI-Energie der Elektronen liegt im Festkörper in einer Größenordnung von

$$E_F \approx 5 - 15 \text{ eV}. \quad (2.30)$$

## 2.7 Tröpfchenmodell

Die homogene Dichte im Kern legt es nahe, den Kern mit einem inkompressiblen Flüssigkeitströpfchen zu vergleichen, bei dem der Hauptteil der Wechselwirkung zwischen den nächsten Nachbarn auftritt.

Dabei lassen sich nach WEIZSÄCKER fünf verschiedene Beiträge zur Bindungsenergie unterscheiden

$$E_B = E_{B,\text{Vol}} + E_{B,\text{Surf}} + E_{B,\text{Coul}} + E_{B,\text{AS}} + E_{B,\text{Paar}}, \quad (2.31)$$

die im nachfolgenden diskutiert werden sollen.

### 1. Volumenenergie

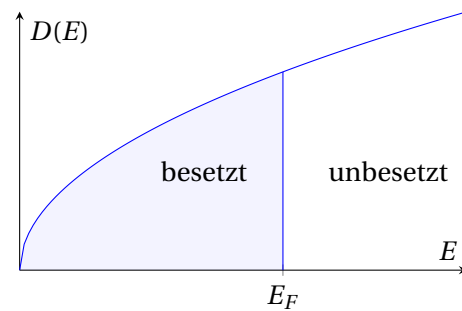
Die Volumenenergie beschreibt die 2-Körper-Wechselwirkung, bzw. Kondensationsenergie, die frei wird, wenn sich Nukleonen vereinigen. Die Bindungsenergie  $E_B$  pro Nukleon sollte unabhängig von der Gesamtzahl  $A$  sein, aber die gesamte Bindungsenergie proportional zu  $A$

$$E_{B,\text{Vol}} = a_V \cdot A. \quad (2.32)$$

### 2. Oberflächenenergie

Die Bindungsenergie von Oberflächennukleonen ist geringer, da dort ein Teil der nächsten Nachbarn fehlt. Da die Oberfläche einer Kugel durch  $4\pi R^2 \stackrel{(2.6)}{=} 4\pi r_0^2 A^{2/3}$  gegeben ist, ergibt sich der Oberflächenanteil zu

$$E_{B,\text{Surf}} = -a_S \cdot A^{2/3}. \quad (2.33)$$





## 3. COULOMB-Abstoßung

Die COULOMB-Abstoßung zwischen den Protonen verringert ebenfalls die Bindungsenergie. Die COULOMB-Energie ist nach (2.8) proportional zu  $\frac{Z^2}{R} \propto \frac{Z^2}{A^{1/3}}$  womit sich der COULOMB-Anteil ergibt zu

$$E_{B,\text{Coul}} = -a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}}, \quad (2.34)$$

## 4. Asymmetrieterm

Bei einer gegebenen Gesamtzahl  $A$  wird die FERMI-Energie minimal für gleiche Protonen- und Neutronenzahlen  $Z = A/2$ . Zusätzliche Neutronen erhöhen die FERMI-Energie und damit die mittlere kinetische Energie aller Nukleonen. Das führt zu einer Verringerung der Bindungsenergie. Der Asymmetrie-Anteil nimmt die Form

$$E_{B,\text{AS}} = -a_{\text{AS}} \frac{\left(Z - \frac{A}{2}\right)^2}{A} \quad (2.35)$$

an und verschwindet für  $Z = N$ .

## 5. Paarungsenergie

Aus der Periodizität der Separationsenergie ergibt sich die Paarungsenergie mit der empirisch eingeführten Proportionalität  $A^{-1/2}$

$$E_{B,\text{Paar}} = a_p \cdot \frac{1}{\sqrt{A}} \delta, \quad \delta = \begin{cases} +1 & \text{gg-Kerne} \\ 0 & \text{gu- und ug-Kerne} \\ -1 & \text{uu-Kerne} \end{cases} \quad (2.36)$$

Somit ergibt sich die Masse eines Kerns  $m(Z, N)$  zu

$$m(Z, N) = Z \cdot m_{\text{H}} + N \cdot m_n - \frac{B}{c^2}, \quad B = \sum_{i=1}^5 E_{B,i}. \quad (2.37)$$

Es ergibt sich damit die WEIZSÄCKER'sche Massenformel:

$$m(Z, N) = Z \cdot m_{\text{H}} + N \cdot m_n - a_V \frac{A}{c^2} + a_S \frac{A^{2/3}}{c^2} + a_C \frac{Z^2}{A^{1/3} c^2} + a_{\text{AS}} \frac{\left(Z - \frac{A}{2}\right)^2}{A c^2} - a_P \frac{\delta}{c^2} \frac{1}{\sqrt{A}} \quad (2.38)$$

Die Vorfaktoren in der WEIZSÄCKER Formel wurden durch Anpassung an experimentell ermittelte Werte bestimmt. Für Massenzahlen von  $A \geq 40$  liegt die Genauigkeit bei etwa 99 %.

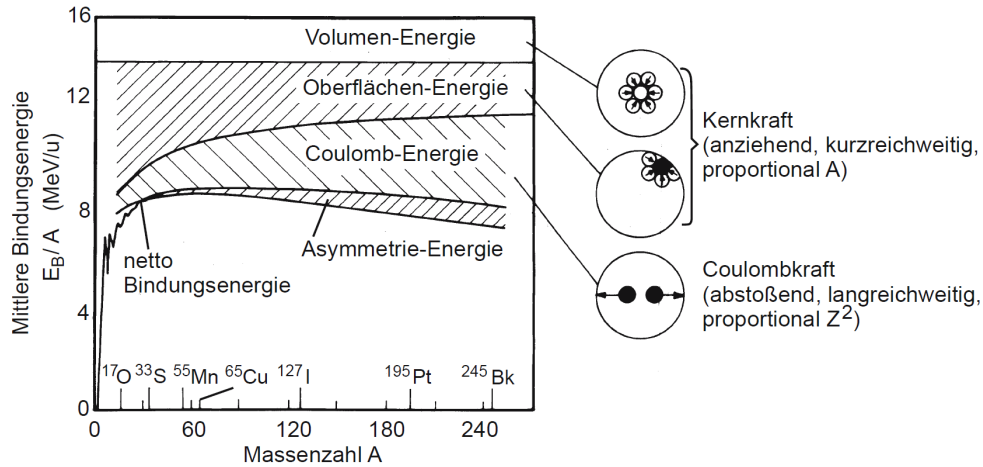


Fig. 9: Bindungsenergie pro Nukleon als Funktion der Massenzahl. Abbildung aus [3].

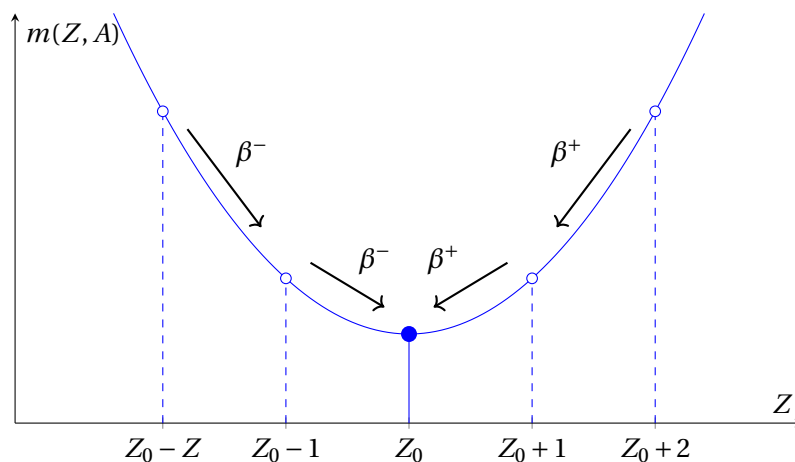
Aus der Massenformel ergeben sich verschiedene Folgerungen:

### Verhalten der Bindungsenergie von Isobaren

Isobaren stellen Nuklide gleicher Massenzahl ( $A = \text{konstant}$ ) dar und verlaufen diagonal entlang der Nuklidkarte. Für ein konstantes  $A$  ist nach Formel (2.38) die Bindungsenergie näherungsweise nur noch von  $Z^2$  und  $\delta$  abhängig

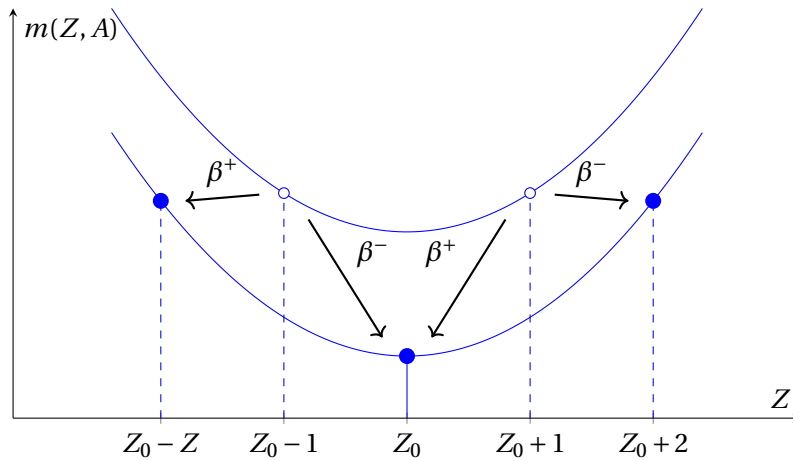
$$B \propto Z^2 + \delta. \tag{2.39}$$

Im ersten Fall sei  $\delta = 0$ , was für ug- und gu-Kerne gilt, also für Nuklide mit ungerader Massenzahl  $A$ .

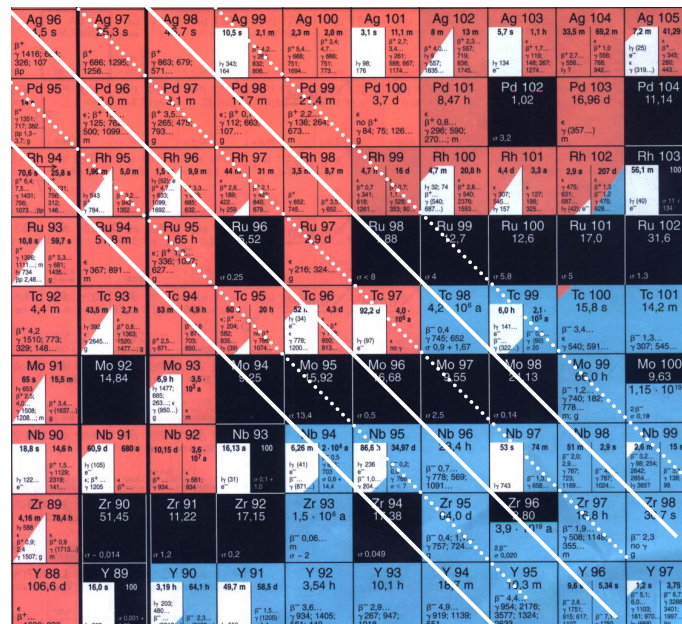


Benachbarte Isobare können durch Betazerfall zerfallen. ug- und gu-Kerne entlang einer Isobarenreihe besitzen daher nur *ein* stabiles Isobar.

Im zweiten Fall sei nun  $\delta \neq 0$ , was für uu- und gg-Kerne gilt. Es ergeben sich zwei Parabeln, die um  $2\delta$  verschoben sind.



Es zeigt sich daher, dass entlang einer “geraden” Isobarenreihe mehrere stabile Isobaren möglich sind. Dabei handelt es sich fast immer um gg-Kerne mit gerader Protonen- und Neutronenzahl.



**Fig. 10:** Das Bild zeigt einen Ausschnitt der Karlsruher Nuklidkarte. Entlang der durchgezogenen Linien verlaufen Isobaren mit gerader Massenzahl. Nur entlang dieser tauchen mehrere stabile Isotope (schwarz) auf.

### Abschätzung, ab welcher Masse $\alpha$ -Zerfall möglich ist

Wie bereits diskutiert fällt die Bindungsenergie für Nuklide der Massenzahl  $A \geq 60$  für steigende Massenzahl ab. Diese Tatsache ermöglicht radioaktive Zerfallsprozesse. Bei dem  $\alpha$ -Zerfall findet ein Kernzerfall unter Entstehung eines  $\alpha$ -Teilchens statt

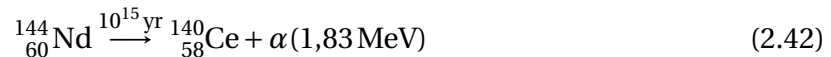
$${}^A_Z X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} Y + {}^4_2 \text{He} + \Delta E. \quad (2.40)$$

Dieser Prozess ist dann energetisch möglich ( $\Delta E > 0$ ), wenn

$$[m(Z, A) - m(Z - 2, A - 4) - m_\alpha]c^2 > 0 \quad (2.41)$$

gilt. Wird diese Voraussetzung in die WEIZSÄCKER-Formel eingesetzt, ergibt sich, dass  $Z \geq 50$  und/oder  $A \geq 150$  gelten muss.

Diese Abschätzung passt gut, denn der leichteste  $\alpha$ -Strahler ist das Nuklid  $^{144}_{60}\text{Nd}$  mit dem Zerfallsprozess



### Abschätzung, ab welcher Masse Kernspaltung möglich ist

Analog zum  $\alpha$ -Zerfall ist Kernspaltung nur dann möglich wenn die Masse des Ausgangsnuklids größer ist, als die Masse der Zerfallsprodukte

$$\left[ m(Z, A) - 2 \cdot m\left(\frac{Z}{2}, \frac{A}{2}\right) \right] c^2 > 0. \quad (2.43)$$

Diese Ungleichung ist nur erfüllt für Nuklide mit einer Massenzahl von  $A \geq 90$ .

## 2.8 Kernspin $I$

Aus der beobachteten Hyperfeinstruktur von Energieniveaus der Elektronenhülle vieler Atome lässt sich schließen, dass ihre Atomkerne ein magnetisches Moment besitzen. Analog zum Gesamtdrehimpuls  $J$  der Elektronenhülle, setzt sich der Kernspin  $I$  zusammen aus der Vektorsumme der Protonen- und Neutronenspins  $S = \frac{1}{2}\hbar$  und den Bahndrehimpulsen  $L = l\hbar$  der Nukleonen.

Wie in der Atom- und Molekülphysik lässt sich zwischen LS- oder jj-Kopplung unterscheiden:

$$\sum_i s_i = S, \quad \sum_i l_i = L, \quad I = S + L \quad (2.44)$$

$$\text{oder } j = l + s, \quad I = \sum_i j_i \quad (2.45)$$

Dabei tritt LS-Kopplung typischerweise für Nuklide mit  $A \leq 16$  und jj-Kopplung für schwerere Nuklide auf.

Der Drehimpuls des Kerns lässt sich schreiben als

$$|I| = \sqrt{I(I+1)}\hbar \quad (2.46)$$

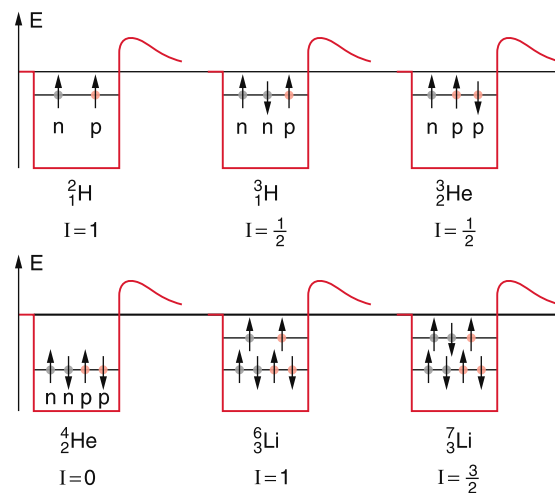
und wird *Kernspinquantenzahl* genannt. Für die meisten stabilen Kerne gilt im Grundzustand  $\sum_i L_i = 0$ , d. h. der Bahndrehimpuls verschwindet. Ausnahmen treten bei leichteren Kernen auf. Bei  $^7_3\text{Li}$  berechnet sich der Kernspin zu  $|\sum I_p + I_n| = \frac{1}{2}\hbar$ , im Experiment wird jedoch  $I = \frac{3}{2}\hbar$  beobachtet. Hier muss also auch im Grundzustand der Bahndrehimpuls  $|L| = \hbar$  von Null verschieden sein.

Für *gerade* Werte der Massenzahl  $A$  wird

$$\begin{aligned} \text{gg-Kerne: } I &= 0 \\ \text{uu-Kerne: } I &= (0), 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.47)$$

ein ganzzahliger Kernspin erwartet. Bei gg-Kernen tritt immer eine Paarung von Protonen und Neutronen auf. Bei uu-Kernen ist der Kernspin nur in seltensten Fällen Null, weil ungepaarte Neutronen und Protonen nicht miteinander koppeln.

Für *ungerade* Werte der Massenzahl ist der Kernspin halbzahlig. Eine Übersicht über den Kernspin von einigen leichten Kernen ist in der folgenden Abbildung dargestellt.



**Fig. 11:** Nukleonenaufbau der leichten Atomkerne nach dem PAULI-Prinzip. Abbildung aus [2].

## 2.9 Magnetisches Dipolmoment

Ähnlich wie das magnetische Moment der Elektronenhülle

$$\boldsymbol{\mu}_J = g_J \mu_B \frac{\mathbf{J}}{\hbar}, \quad \mu_B = \frac{e}{2m_e} \hbar \quad (2.48)$$

mit dem Landé-Faktor  $g_J$ , dem BOHR'schen Magneton  $\mu_B$  und Gesamtdrehimpuls  $\mathbf{J}/\hbar$  ist auch das magnetische Moment eines Kerns

$$\boldsymbol{\mu}_I = g_I \cdot \mu_K \cdot \frac{\mathbf{I}}{\hbar} \quad (2.49)$$

als Produkt aus *Kern-Landé-Faktor*  $g_I$ , dem *Kernmagneton*  $\mu_K$  mit dem Betrag

$$\mu_K = \frac{e}{2m_p} \hbar = 5,050783 \cdot 10^{-27} \frac{\text{J}}{\text{T}} \quad (2.50)$$

und dem Kernspin  $\mathbf{I}/\hbar$  darstellbar.

Das Kernmagneton  $\mu_K$  ist wegen der größeren Protonenmasse  $m_p$  um den Faktor  $\frac{m_e}{m_p} \approx \frac{1}{1836}$  kleiner als das BOHR'sche Magneton  $\mu_B$ .

Wird das magnetische Moment des Kerns in Einheiten von  $\mu_K$  und der Drehimpuls in Einheiten von  $\hbar$  gemessen, so gibt der Landé-Faktor

$$g_I = \frac{|\boldsymbol{\mu}_I|/\mu_K}{|\mathbf{I}|/\hbar} \quad (2.51)$$

das dimensionslose Verhältnis zwischen magnetischem Moment und mechanischem Drehimpuls an. Der Quotient

$$\gamma = \frac{|\boldsymbol{\mu}_I|}{|\mathbf{I}|} = \frac{\mu_K g_I}{\hbar} \quad (2.52)$$

heißt *gyromagnetisches Verhältnis*.

Was wird nun für ein einzelnes, freies Nukleon (Proton oder Neutron) mit  $\mathbf{l}$  und  $\mathbf{s}$  erwartet? Es ergibt sich zunächst

$$\mathbf{I} = \mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\mu} = g_l \mathbf{l} + g_s \mathbf{s}. \quad (2.53)$$

Die magnetisches Wechselwirkungsenergie des Bahndrehimpulses lässt sich mit der SCHRÖDINGER-Gleichung berechnen, woraus für die Landé-Faktoren folgt:

$$\left. \begin{array}{l} g_l = 1 \quad \text{Proton} \\ g_l = 0 \quad \text{Neutron} \end{array} \right\} \text{Übereinstimmung mit Experiment.} \quad (2.54)$$

Für das Elektron betrug der Landé-Faktor ebenfalls  $g_l = 1$ . Die Landé-Faktoren des Spins ergeben sich aus der Dirac-Gleichung zu

$$\left. \begin{array}{l} g_s = 2 \quad \text{Proton} \\ g_s = 0 \quad \text{Neutron} \end{array} \right\} \text{Widerspruch mit Experiment.} \quad (2.55)$$

Experimentell aus der Messung des magnetischen Moments des Protons als Ursache der Hyperfeinstruktur-Aufspaltung ergibt sich jedoch

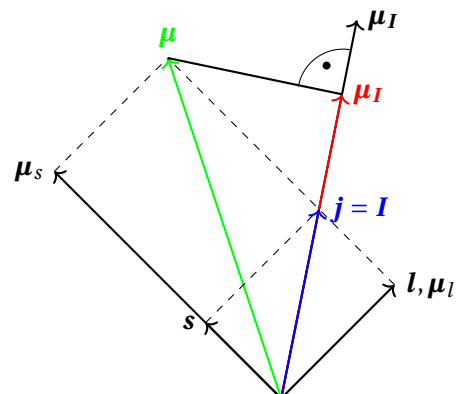
$$\begin{array}{l} g_s = 5.5858 \quad \text{Proton} \\ g_s = -3.8261 \quad \text{Neutron} \end{array} \quad (2.56)$$

Das negative Vorzeichen bedeutet hier, dass Spin und magnetisches Moment entgegengerichtet sind.

Der Fehler, der in der theoretischen Vorhersage gemacht wird, ist die Annahme, dass Proton und Neutron punktförmige Teilchen sind. Die experimentellen Daten deuten allerdings auf eine geladene Substruktur der Nukleonen, den Quarks, hin.

Verschwindet der Drehimpuls nicht  $l \neq 0$  und ist  $g_s \neq g_l$ , so ist das magnetische Moment  $\boldsymbol{\mu}$  nicht mehr parallel zu  $\mathbf{I} = \mathbf{j}$ . Allerdings ist für  $\boldsymbol{\mu}_I$  nur die Projektion von  $\boldsymbol{\mu}$  auf  $\mathbf{I}$  relevant, die sich berechnet durch

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_I &= \boldsymbol{\mu} \cdot \frac{\mathbf{I}}{|\mathbf{I}|} \frac{\mathbf{I}}{|\mathbf{I}|} = \frac{\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{I}}{|\mathbf{I}|^2} \mathbf{I} \\ g_I &= \frac{\hbar}{\mu_K} \frac{\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{I}}{|\mathbf{I}|^2}. \end{aligned} \quad (2.57)$$



Weiterhin wird noch angemerkt, dass nur die  $z$ -Komponente experimentell bestimmbar ist. Für ein Nukleon ergibt sich dann mit  $\mathbf{I} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu} &= \mu_K g_l \frac{\mathbf{l}}{\hbar} + \mu_K g_s \frac{\mathbf{s}}{\hbar} \\ \Rightarrow g_I &= \frac{\hbar/\mu_K g_l \mathbf{l} \cdot \mathbf{I} + g_s \mathbf{s} \cdot \mathbf{I}}{|\mathbf{I}|^2}.\end{aligned}\quad (2.58)$$

Für die Skalarprodukte  $\mathbf{l} \cdot \mathbf{I}$  und  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{I}$  folgt

$$\begin{aligned}\mathbf{l} \cdot \mathbf{I} &= \mathbf{l} \cdot (\mathbf{l} + \mathbf{s}) = l^2 + \frac{1}{2}(I^2 - l^2 - s^2) = \frac{1}{2}(I^2 + l^2 - s^2) \\ \mathbf{s} \cdot \mathbf{I} &= \mathbf{s} \cdot (\mathbf{l} + \mathbf{s}) = s^2 + \frac{1}{2}(I^2 - l^2 - s^2) = \frac{1}{2}(I^2 + s^2 - l^2).\end{aligned}\quad (2.59)$$

Damit folgt aus (2.58) die *Kern-Landé-Formel*

$$g_I = g_l \frac{j(j+1) + l(l+1) - s(s+1)}{2j(j+1)} + g_s \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)}.\quad (2.60)$$

### Schmidt-Modell

Das SCHMIDT-Modell dient zur Abschätzung der magnetischen Momente für Kerne. Für gg-Kerne ist bereits bekannt, dass der Kernspin aufgrund der Paarung der Protonen und Neutronen verschwindet  $\mathbf{I} = 0$ , genau wie das magnetische Moment  $\boldsymbol{\mu} = 0$ . Für viele uu-Kerne gilt dies ebenfalls.

Zur Beschreibung von ug- und gu-Kernen wird nun die Annahme getroffen, dass der Kern aus einem kernspinlosen Teil und einem ungepaarten Nukleon besteht, welches als "Leuchtnukleon" bezeichnet wird. Dieses Leuchtnukleon bestimmt allein das magnetische Moment.

Als Beispiel wird hier das magnetische Moment eines gu-Kerns für ein Leuchtnutron mit  $I = l + \frac{1}{2} = j$  berechnet. Da nach (2.54)  $g_l = 0$  gilt folgt nach Kern-Landé-Formel

$$g_I = g_s(n) \frac{(l + \frac{1}{2})(l + \frac{3}{2}) - l(l+1) + \frac{3}{4}}{2(l + \frac{1}{2})(l + \frac{3}{2})} = \frac{(l + \frac{3}{2})}{2(l + \frac{1}{2})(l + \frac{3}{2})} g_s(n) = g_s(n) \frac{1}{2j}.$$

Damit folgt für das magnetische Moment des Leuchtneutrons

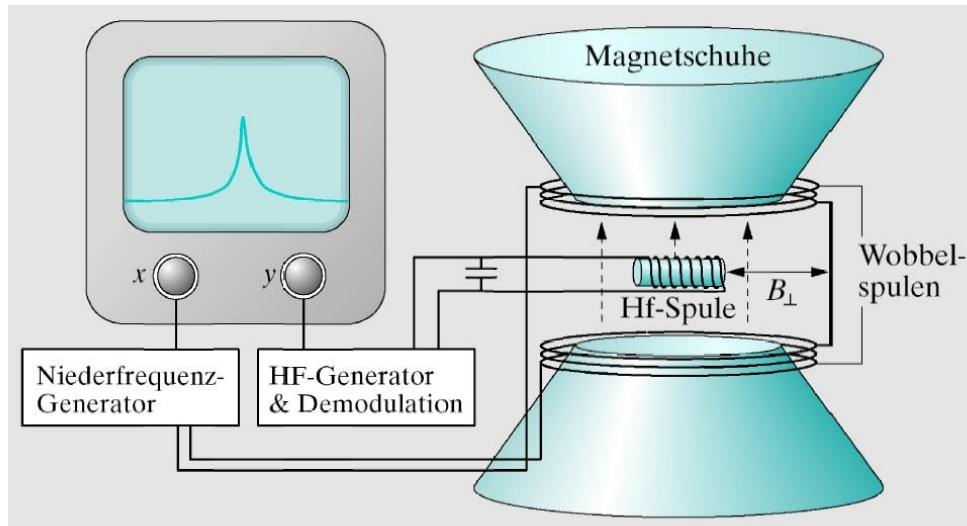
$$\boldsymbol{\mu} = g_I(n) \cdot j \cdot \mu_K = \frac{g_s(n)}{2} \mu_K = -1.91 \mu_K = \text{konst.}\quad (2.61)$$

Abbildung 12 (links) zeigt verschiedene experimentelle Werte der magnetischen Momente von gu-Kernen mit einem ungepaarten Neutron. Den durch das SCHMIDT-Modell erwarteten Wert nehmen aber nur das freie Neutron  ${}^1_0\text{n}$  und  ${}^{17}_8\text{O}$  an. Die experimentellen Werte liegen (bis auf wenige Ausnahmen wie z. B.  ${}^3_2\text{He}$ ) zwischen den Extremwerten  $\boldsymbol{\mu} = 0$  (Dirac-Gleichung) und  $\boldsymbol{\mu} = -1.91 \mu_K$ , welche als SCHMIDT-Linie bezeichnet wird.

Die experimentellen Daten zeigen, dass die Tendenz des SCHMIDT'schen Modells richtig, aber zu einfach gehalten ist.







## 2.10 Elektrisches Quadrupolmoment

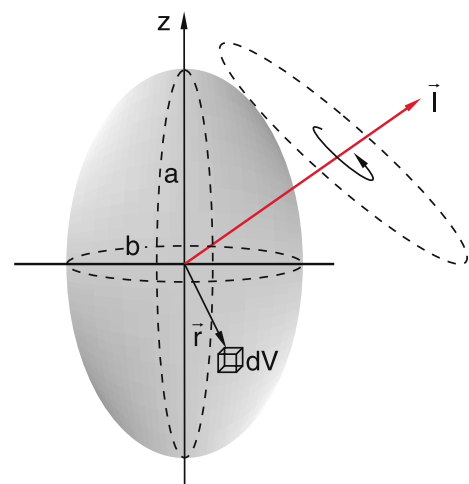
Wenn die elektrische Ladungsverteilung der Protonen im Kern nicht kugelsymmetrisch ist (Deformation des Kerns), dann hat der Kern ein elektrisches Quadrupolmoment. Das Quadrupolmoment ergibt sich als das dritte Glied der Taylorreihenentwicklung für das Potential

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (2.64)$$

und lautet in der  $zz$ -Komponente

$$Q = \int \rho(\mathbf{r})(3z^2 - r^2) d^3\mathbf{r}. \quad (2.65)$$

Die Einheit ist dabei [Fläche mal Ladung]. Das Quadrupolmoment charakterisiert nun die Abweichung von einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung. Der Vektor  $\mathbf{r}$  geht vom Ladungsschwerpunkt zum Ladungselement  $dq = \rho(\mathbf{r}) dV$  (siehe Abbildung rechts [2]). Die Ladungsverteilung im Schwerpunkt lässt sich gut durch ein Rotationsellipsoid beschreiben mit der vertikalen Halbachse  $a$  und den horizontalen Halbachsen mit jeweils der Länge  $b$ .



Kerne mit  $I = 0$  haben keine Vorzugsrichtung, daher liegt im zeitlichen Mittel eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung vor, weshalb sich kein beobachtbares elektrisches Quadrupolmoment ergibt ( $Q = 0$ ), selbst wenn die momentane Ladungsverteilung von der Kugelsymmetrie abweicht.

Bei Kernen mit  $I = \frac{1}{2}$  liegen zwei Einstellmöglichkeiten bezüglich  $z$  vor mit  $I_z = \pm \frac{1}{2} \hbar$ . Der Kosinus des Einstellwinkels  $\vartheta$  zwischen Spinrichtung und  $z$ -Achse wird dann nach nebenstehender Abbildung [2]

$$\cos \vartheta = \frac{\hbar}{2} / \sqrt{\frac{3}{4} \hbar} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Mit der Relation  $z = r \cdot \cos \vartheta$  folgt  $z^2 = r^2/3$ . Wird dies in (2.65) eingesetzt

$$Q = \int \varrho(\mathbf{r}) \left( 3 \frac{r^2}{3} - r^2 \right) d^3 \mathbf{r} = 0, \quad (2.66)$$

d. h. auch hier verschwindet das Quadrupolmoment.

Deshalb haben nur Kerne mit einer Kernspin-Quantenzahl von  $I \geq 1$  ein von null verschiedenes Quadrupolmoment.

Für das oben beschriebene Rotationsellipsoid mit den Halbachsen  $a$  ( $z$ -Richtung) und  $b$  ( $x$ - und  $y$ -Richtung) und Ladung  $Z \cdot e$  ergibt sich für das Quadrupolmoment

$$Q = \frac{2}{5} Z \cdot e [a^2 - b^2] \quad (2.67)$$

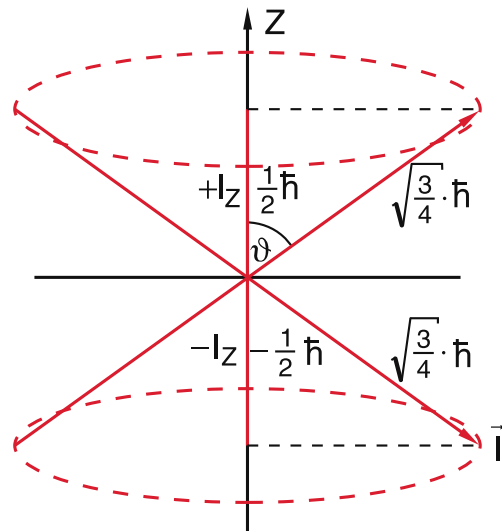
$$\text{oder} = \frac{4}{5} Z \cdot e \bar{R}^2 \cdot \delta \quad (2.68)$$

mit dem mittleren Kernradius  $\bar{R}$  und dem Deformationsparameter  $\delta$

$$\bar{R} = \frac{a+b}{2} \quad \text{und} \quad \delta = \frac{\Delta R}{R}.$$

Dabei lassen sich zwei Fälle unterscheiden:

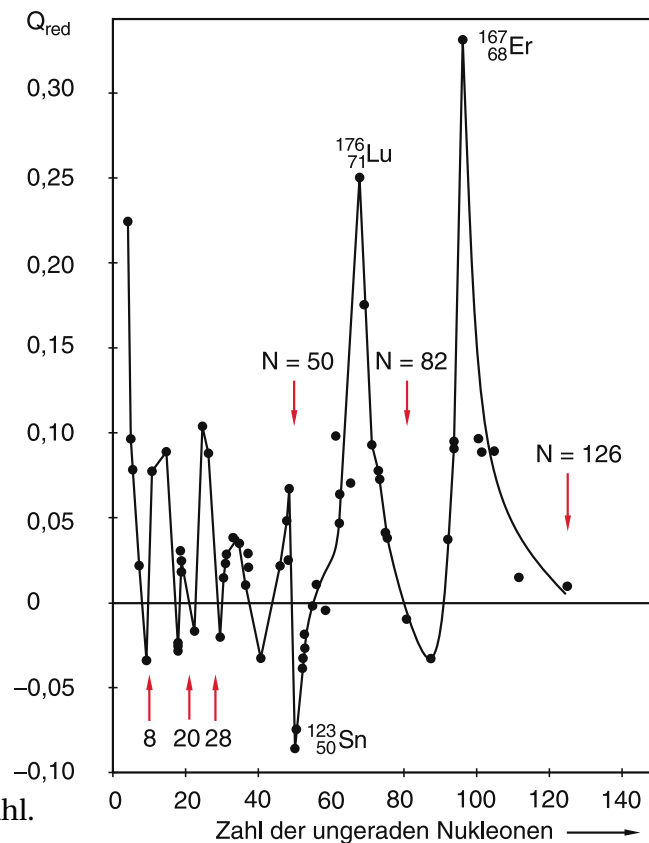
- Fall 1:  $a > b$ , prolat (zigarrenförmig)  $\Rightarrow Q > 0$
- Fall 2:  $a < b$ , oblat (tellerförmig)  $\Rightarrow Q < 0$ .



Im Allgemeinen liegen die Werte von  $\delta$  bei 0.01 bis 0.02. In den Bereichen  $150 < A < 192$  der Massenzahl  $A$  gibt es jedoch stark deformierte Kerne mit  $\delta \lesssim 0,1$ . Aus der nebenstehenden Abbildung wird ersichtlich, dass es mehr prolata Kerne als oblate Kerne gibt. Da der Absolutwert des Quadrupolmoments von der Gesamtladung des Kerns und seiner Größe abhängt, wird zum Vergleich der Deformation der verschiedenen Kerne das reduzierte Quadrupolmoment

$$Q_{\text{red}} = \frac{Q}{Z \cdot e \bar{R}^2} \quad (2.69)$$

als dimensionslose Größe eingeführt. Die nebenstehende Abbildung [2] zeigt das reduzierte Quadrupolmoment von g-u- bzw. u-g-Kernen als Funktion der ungeraden Neutronen- bzw. Protonenzahl.



## 2.11 Parität

Die Parität ist eine wichtige Größe zur Charakterisierung des Kernzustandes, jedoch besitzt sie kein Analogon in der klassischen Physik.

*Die Parität ist eine Quantenzahl, die die Spiegelsymmetrie der Wellenfunktion des Kerns beschreibt.*

Bei einer Raumspiegelung wird der Paritätsoperator  $\hat{P}$  auf die Wellenfunktion angewandt, wobei sich die Parität  $\Pi$  als Eigenwert ergibt

$$\hat{P}\Psi(\mathbf{r}) = \Psi(-\mathbf{r}) \stackrel{!}{=} \Pi\Psi(\mathbf{r}). \quad (2.70)$$

Die Spiegelung soll die Eigenschaften der Wellenfunktion bis auf eine willkürliche Konstante  $\Pi$  nicht ändern. Bei einer doppelten Spiegelung soll sich von daher wieder der ursprüngliche Zustand ergeben

$$\hat{P}^2\Psi(\mathbf{r}) = \Pi^2\Psi(\mathbf{r}) \stackrel{!}{=} \Psi(\mathbf{r}). \quad (2.71)$$

Damit ergibt sich  $\Pi = \pm 1$  als die möglichen Eigenwerte des Paritätsoperators  $\hat{P}$ . Es wird nun zwischen gerader und ungerader Parität unterschieden:

- gerade Parität:  $\Pi = +1$
- ungerade Parität:  $\Pi = -1$ .

Die Spiegelung führt ein rechtshändiges System in ein linkshändiges System über. Physikalische Prozesse sollten allerdings *nicht* von der Links- oder Rechtssymmetrie des Raumes abhängen. Von daher gilt:

*Die Parität ist eine Erhaltungsgröße.*

Es gibt jedoch Ausnahmen dieser Regel. Beim  $\beta$ -Zerfall wird die Parität verletzt. Darauf wird in Kapitel 3.8 näher eingegangen.

Als Schreibweise zur Kennzeichnung der Parität hat sich das hochgestellte Vorzeichen hinter dem Kernspin etabliert:

- $0^+ \Rightarrow I = 0, \Pi = +1$
- $\frac{3}{2}^- \Rightarrow I = \frac{3}{2}, \Pi = -1.$

Wird der Paritätsoperator für ein Teilchen im Zentralpotential

$$\Psi(\mathbf{r}) = R(\mathbf{r}) Y_l^m(\vartheta, \varphi) \quad (2.72)$$

angewendet, ergibt sich

$$\begin{aligned} \hat{P}\Psi(\mathbf{r}) &= \hat{P}Y_l^m(\vartheta, \varphi) = Y_l^m(\Pi - \vartheta, \varphi + \Pi) = (-1)^l Y_l^m(\vartheta, \varphi) \\ \Rightarrow \Pi &= (-1)^l = \begin{cases} \text{gerade für } l = 0, 2, 4, \dots \\ \text{ungerade für } l = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \end{aligned} \quad (2.73)$$

Die Gesamtparität mehrerer Teilchen ist außerdem multiplikativ:

$$\Pi = \Pi_1 \cdot \Pi_2 \cdot \dots \quad (2.74)$$

## 2.12 Schalenmodell

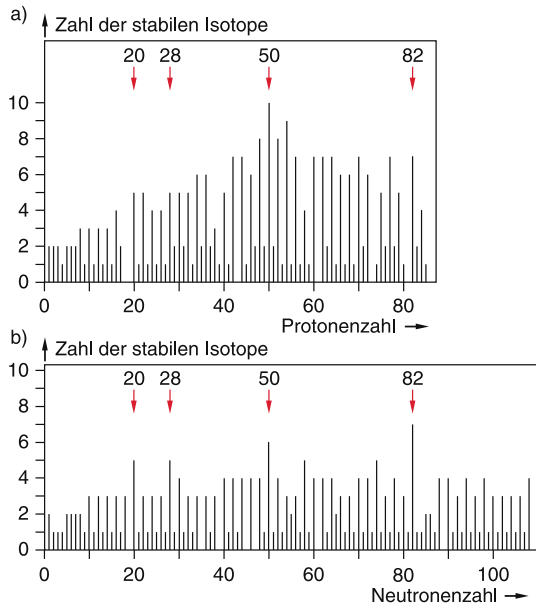
Es gibt verschiedenste experimentelle Hinweise, die auf eine Schalenstruktur des Kerns hinweisen:

- Kernquadrupolmoment
- Stabilitätslinien in der Nuklidkarte
- Maxima bei den Paarungsenergien/Separationsenergien
- Energie angeregter Zustände

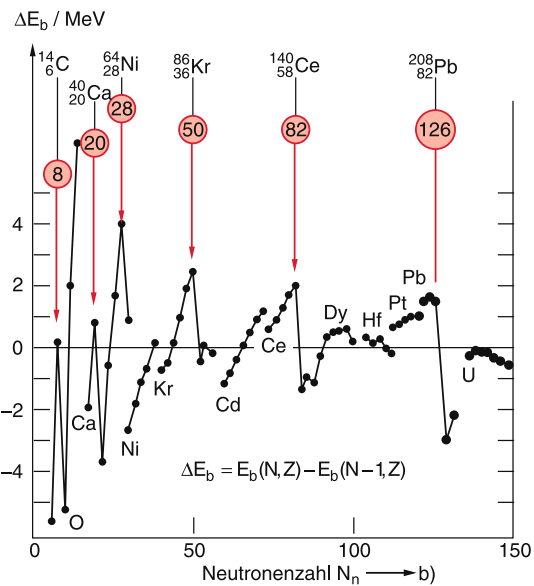
Dabei zeigen sich Schalenabschlüsse bei bestimmten Protonen- bzw. Neutronenzahlen

$$2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 \quad \text{magische Zahlen.} \quad (2.75)$$

Diese Zahlen wurden als *magisch* bezeichnet, da lange keine Erklärung für die Schalenabschlüsse bei diesen Zahlen gefunden wurde.

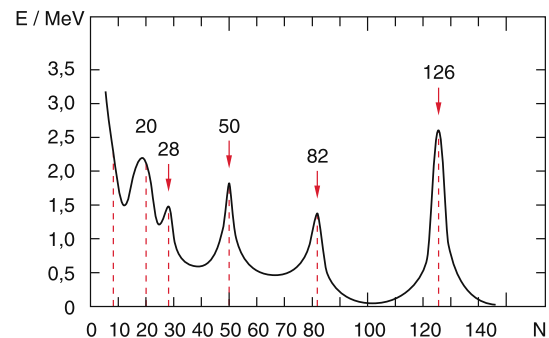


(a) Zahl stabiler Isotope aufgetragen für Protonen- und Neutronenzahlen [2].



(b) Paarungsenergie für verschiedene Isotope einiger Elemente [2].

Im nebenstehenden Bild [2] ist die Energie des ersten angeregten Zustandes von gg-Kernen als Funktion der Neutronenzahl dargestellt. Dabei ist der Energieunterschied zwischen Grund- und angeregten Zustand aufgetragen. Hier treten ebenfalls bei den gleichen Zahlen besonders stabile Zustände auf. Daher ist es sinnvoll, ähnlich der Atomhülle, dem Kern eine Schalenstruktur zuzuordnen.



Im Gegensatz zur Atomhülle, lässt sich hier zur Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung nicht das COULOMB-Potential zwischen Kern und Elektronen als wirkendes Potential zur Berechnung der Energiezustände benutzen. Daher wird versucht, den Kern durch andere Potentiale zu beschreiben, die in Kapitel 2.6 bereits eingeführt wurden:

### Kastenpotential

$$V(r) = \begin{cases} \infty & r > R \\ 0 & r \leq R \end{cases} \quad (2.76)$$

Wird dieses Potential in die zeitunabhängige SCHRÖDINGER-Gleichung

$$E \Psi(\mathbf{r}) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r) \right] \Psi(\mathbf{r}) \quad (2.77)$$

eingesetzt, ergibt sich für die Energieeigenwerte

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{R^2} n^2 \quad (2.78)$$

eine Abhängigkeit mit  $n^2$ . Weiterhin ergibt sich eine Aufspaltung durch die Drehimpulsquantenzahl  $l = 0, \dots, n - 1$ . Werden die Energieniveaus mithilfe des PAULI-Prinzips aufgefüllt, dann ergeben sich Schalenabschlüsse bei

$$2, 8, 18, 20, 34, 40, 58, \dots \quad \text{Widerspruch.} \quad (2.79)$$

Die berechneten Schalenabschlüsse stimmen nicht mit den magischen Zahlen überein.

### Harmonischer Oszillator

$$V(r) = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \quad (2.80)$$

Bei gleicher Vorgehensweise ergeben sich die Energieeigenwerte des Hamilton-Operators für den harmonischen Oszillator zu

$$E_{n,l} = \hbar \omega \left( 2n + l - \frac{1}{2} \right). \quad (2.81)$$

Werden hier die Energieniveaus unter Beachtung des PAULI-Prinzips eingefüllt, ergeben sich Schalenabschlüsse für

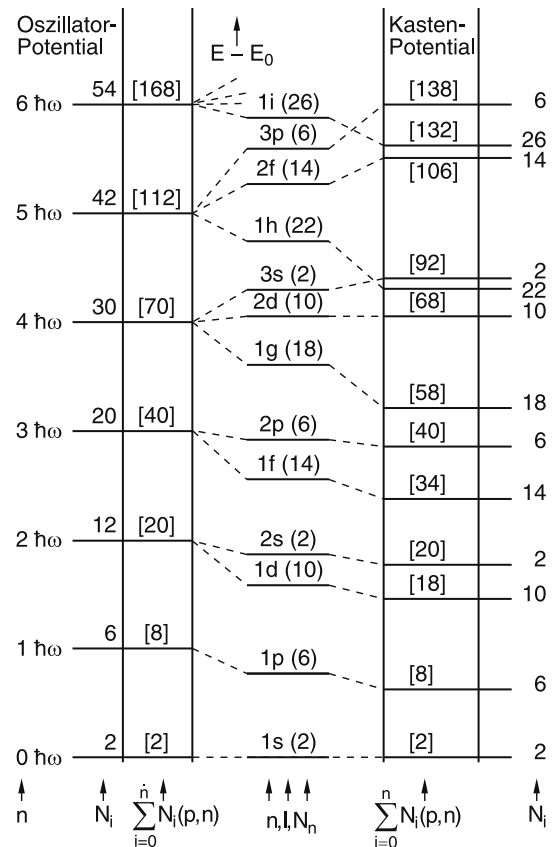
$$2, 8, 20, 40, \dots \quad \text{ebenfalls ein Widerspruch.} \quad (2.82)$$

### Wood-Saxon-Potential

Das Wood-Saxon-Potential (2.26) stellt eine Mischung aus Oszillator und Kastenpotential dar. Die SCHRÖDINGER-Gleichung ist hierfür allerdings nicht analytisch lösbar.

Werden die Energieniveaus numerisch berechnet, zeigt sich, dass sie sich nur kaum von den Niveaus des Oszillator- bzw. Rechteckpotentials unterscheiden. Das liegt daran, dass die Aufspaltung der entarteten Niveaus mit unterschiedlichem  $l$  klein ist.

In der nebenstehenden Abbildung [4] sind auf der linken Seite die Energieniveaus des Oszillatorpotentials und auf der rechten Seite die des Rechteckpotentials aufgetragen. In der Mitte sind die Energieniveaus des Wood-Saxon-Potentials aufgetragen. Die  $l$ -Aufspaltung führt nicht zu einer anderen Abfolge der Besetzungszahlen einer Schale.



Lösung (1949 Maria Goeppert-Mayer)

Die Abweichung der Besetzungszahlen wird bei schweren Kernen durch die Spin-Bahn-Kopplung bewirkt.

Durch die Spin-Bahn-Kopplung tritt eine weitere Energieniveau-Aufspaltung auf, welche im Gegensatz zur schwachen Feinstruktur-Aufspaltung in der Atomhülle sehr groß ist. Das effektive Potential  $V_i$  für das  $i$ -te Nukleon lässt sich nun angeben als

$$V_i = \underbrace{V(r)}_{\text{Zentralpot.}} + \underbrace{V_{ls}(r)}_{\text{Radialanteil}} \mathbf{l} \cdot \mathbf{s}. \tag{2.83}$$

Sowohl in der Atomhülle als auch im Kern ergibt sich die Aufspaltung der Energieniveaus zu

$$\Delta E = (2l + 1) \frac{1}{2} V_{ls} \cdot \hbar. \tag{2.84}$$

Im Kern ist die Spin-Bahn-Wechselwirkung aufgrund der starken Kernkraft besonders ausgeprägt. Zudem sind die Potentiale  $V_{ls}(r)$  und  $V(r)$  immer kleiner als Null, was dazu führt, dass die Zustände

$$j = l - \frac{1}{2} \text{ energetisch höher als } j = l + \frac{1}{2} \tag{2.85}$$

liegen. Dies ist in Abbildung 14 dargestellt. Das  $p_{3/2}$ -Niveau befindet sich energetisch niedriger als das  $p_{1/2}$ -Niveau. Es zeigt sich ebenfalls, dass die Aufspaltung durch die Spin-Bahn-Wechselwirkung in der gleichen Größenordnung wie die Abstände der Hauptquantenzahl liegt.

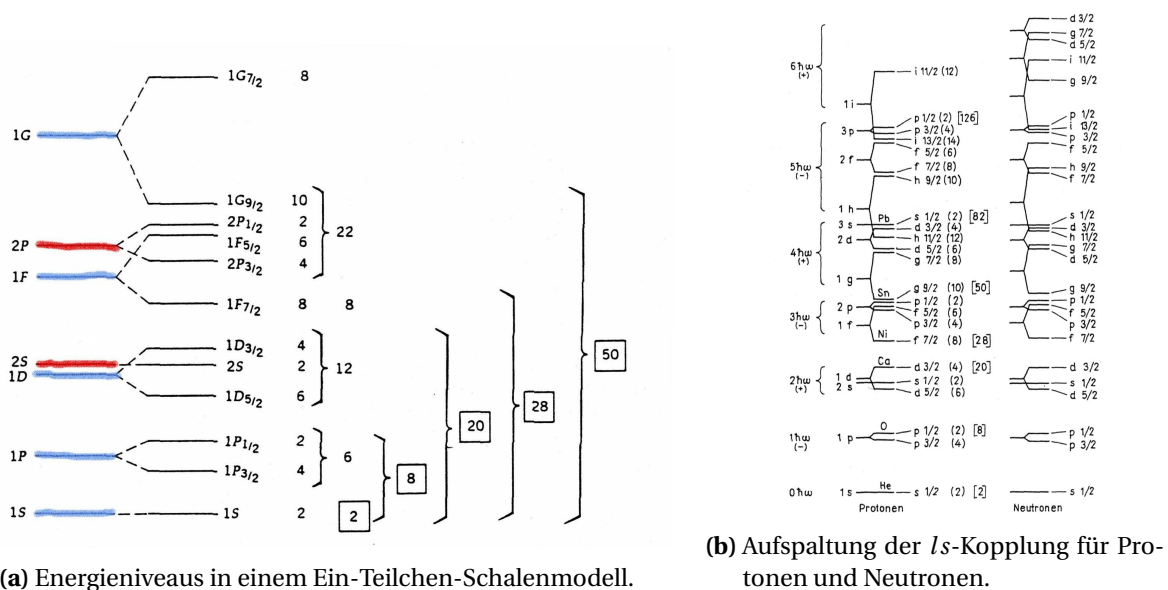


Fig. 14: Spin-Bahn Kopplung des Kerns. Abbildungen aus [4].

In der Elektronenhülle beträgt die Feinstrukturaufspaltung  $\Delta E \approx \mu\text{eV} \dots \text{meV}$ , während die Energieniveaus selbst in der Größenordnung von eV liegen. Die Feinstrukturaufspaltung lässt die Reihenfolge der Niveaus unverändert.

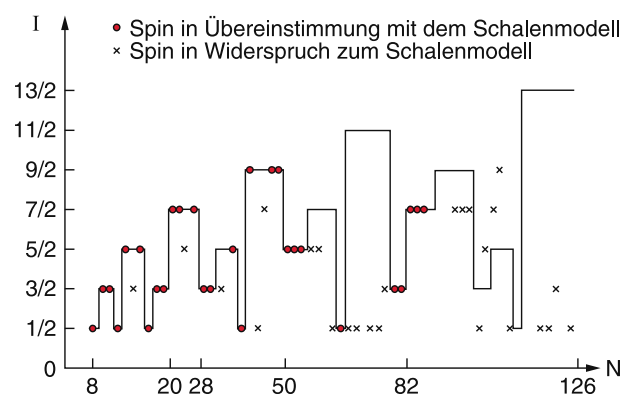
Im Kern hingegen beträgt die Energieaufspaltung der Spin-Bahn-Kopplung  $\Delta E \approx \text{MeV}$ , die Energieniveaus selbst liegen aber in der selben Größenordnung. Damit ändert sich die Niveaufolge grundlegend. Damit ergeben sich Schalenabschlüsse für 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 was mit den experimentellen Ergebnissen übereinstimmt und MARIA GOEPPERT MAYER 1963 den Nobelpreis einbrachte.

### Vorhersagen des Schalenmodells

1. Für abgeschlossene  $n$ - und  $p$ -Schalen ist  $I = 0$ . Diese Kerne sind kugelsymmetrisch und weisen kein elektrisches Quadrupolmoment und kein magnetisches Dipolmoment auf. Dies ist experimentell bestätigt.
2. Bei Kernen mit *einem* Nukleon außerhalb geschlossener Schalen wird die Parität und der Gesamtdrehimpuls durch das einzelne Nukleon bestimmt.
3. Ebenso verhält es sich bei einem Kern mit *einem* Nukleon *weniger* als für den Schalenabschluss notwendig ist. Das Loch bestimmt die Eigenschaften.
4. Mithilfe des Schemas aus Abbildung 14 auf der rechten Seite lässt sich für ein paar Beispiele der Kernspin vorhersagen:

$$\begin{aligned}
 {}^{13}_7\text{N}_6 : \pi[p_{1/2}]^{-1} &\Rightarrow I = \frac{1}{2}^{-} \\
 {}^{13}_6\text{N}_7 : \nu[p_{1/2}]^{-1} &\Rightarrow I = \frac{1}{2}^{-} \\
 {}^{41}_{20}\text{Ca}_{21} : \nu[f_{7/2}]^{+1} &\Rightarrow I = \frac{7}{2}^{-} \\
 {}^{87}_{38}\text{Ca}_{49} : \nu[g_{9/2}]^{-1} &\Rightarrow I = \frac{9}{2}^{+} \\
 {}^{15}_8\text{O}_7 : \nu[p_{1/2}]^{-1} &\Rightarrow I = \frac{1}{2}^{-} \\
 {}^{25}_{16}\text{S}_{19} : \nu[d_{3/2}]^{-1} &\Rightarrow I = \frac{3}{2}^{+}
 \end{aligned}$$

Das  $\pi$  steht für ein ungerades Proton und  $\nu$  für ein ungerades Neutron, in der Klammer steht das höchste besetzte Energieniveau und der Exponent kennzeichnet, ob ein Kernbaustein zur vollen Schale fehlt (-) oder überschüssig ist (+). Der gesamte Kernspin ergibt sich dann direkt aus dem Kernspin dieses Kernbausteins. Der Exponent von  $I$  kennzeichnet die Parität. Positive Parität ergibt sich für gerade  $l = s, d, g, \dots$  und negative Parität analog für  $l = p, f, \dots$





In der nebenstehenden Abbildung [2] sind experimentelle Werte des Kernspins als Funktion der Neutronenzahl dargestellt. Es zeigt sich, dass das Schalenmodell für leichte Kerne die experimentellen Daten gut beschreibt.

- Die magnetischen Momente des Kerns lassen sich mithilfe des SCHMIDT-Modells (siehe Kapitel 2.9) abschätzen. Hier zeigt sich eine gute Übereinstimmung besonders für Kerne, deren Neutronen- oder Protonenzahl einer magischen Zahl  $\pm 1$  entspricht.
- Besonders stabil sind die *doppelt magischen* Kerne, deren Protonen- und Neutronenzahl jeweils magisch sind:

$${}^4_2\text{He}_2, {}^{16}_8\text{O}_8, {}^{40}_{20}\text{Ca}_{20}, {}^{48}_{20}\text{Ca}_{28}, {}^{208}_{82}\text{Pb}_{126}. \quad (2.86)$$

- Für einige angeregte Niveaus können Spin und Parität durch Einzelteilchenanregung eines ungepaarten Nukleons erklärt werden. Ein Beispiel dafür ist  ${}^{17}_8\text{O}_9$ . Mithilfe von Abbildung 14 zeigt sich, dass der Kernspin im Grundzustand  $I = 5/2^+$  beträgt, da das einzelne Neutron das  $d_{5/2}$  Niveau besetzt. Wird es nun angeregt, springt es auf das  $s_{1/2}$  Niveau und der Kernspin nimmt den Wert  $I = 1/2^+$  an. Meist ist die Bestimmung jedoch schwierig, da Kopplungen mehrerer Nukleonen in Betracht gezogen werden müssen.

## 2.13 Rotation und Vibration von Kernen

In Anregungszuständen eines Kerns mit vielen Nukleonen außerhalb einer Schale treten neue Gesetzmäßigkeiten auf, welche als kollektive Bewegungen interpretierbar sind.

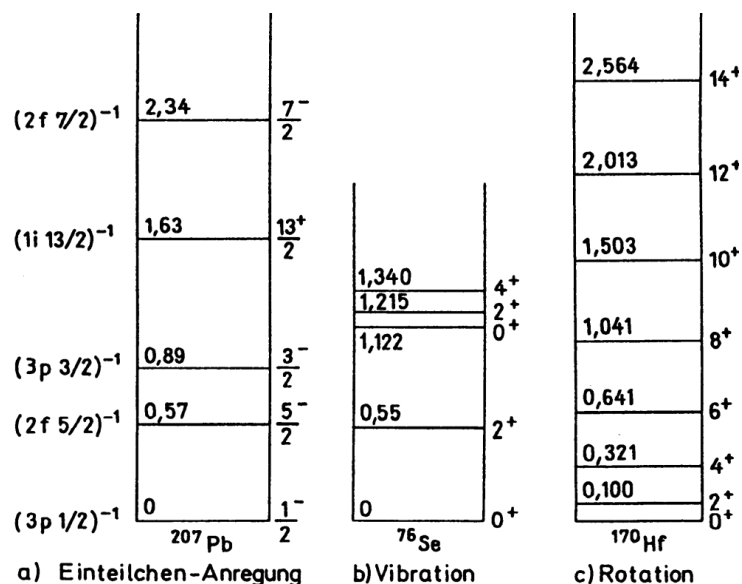


Fig. 15: Verschiedene Typen von Anregungsspektren. Abbildung aus [4].

In Abbildung 15 sind die Anregungsspektren verschiedener Nuklide dargestellt, die sich auf bestimmte Anregungsmechanismen zurückführen lassen. Dabei lässt sich das Spektrum von  ${}^{76}\text{Se}$  als eine Vibration interpretieren und das charakteristische Anregungsspektrum mit nur geradzahigen Kernspins des  ${}^{170}\text{Hf}$  tritt bei Kernrotationen auf.

## a.) Vibrationsmodell

Vibrationen treten hauptsächlich für kugelsymmetrische und leicht deformierte Kerne auf. Hier handelt es sich um elastische Oberflächenschwingungen der Form eines Tropfens um die kugelförmige Gleichgewichtslage.

Allgemein lässt sich die Auslenkung eines beliebigen Punktes  $(R_0, \vartheta, \varphi)$  (vom Ursprung aus) aus einer Kugeloberfläche als

$$R(\vartheta, \varphi, t) = R_0 \left[ 1 + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm}(t) Y_l^m(\vartheta, \varphi) \right], \quad (2.87)$$

beschreiben, wobei  $a_{lm}(t)$  die zeitabhängige Schwingungsamplitude ist und  $Y_l^m$  die Kugelflächenfunktionen sind.

Es lassen sich nun verschiedene Fälle unterscheiden:

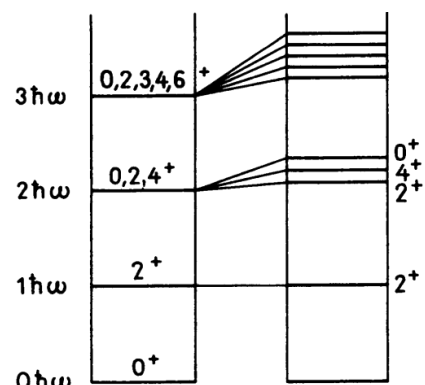
- $l = 0$ : Monopolschwingung  
Bei Monopolschwingungen handelt es sich um radiale Kompressionsschwingungen. Das würde aber bedeuten, dass sich aufgrund der Volumenveränderung die Dichte des Kerns ändern würde. Zu Beginn der Vorlesung wurde bereits behandelt, dass die Dichte des Kerns konstant ist und sich nur durch Einbringung hoher Energien ändert. Monopolschwingungen können als Anregungszustand des Kerns ausgeschlossen werden.
- $l = 1$ : Dipolschwingung  
Bei einer Dipolschwingung wird der gesamte Kern bewegt und es kommt zur Translationsbewegung des Kernschwerpunktes. Das ist ebenfalls nicht zulässig
- $l = 2$ : Quadrupolschwingung  
Hier handelt es sich um Oberflächenschwingungen mit konstantem Volumen. Bei elliptisch deformierten Kernen lässt sich unterscheiden zwischen
  - $\beta$ -Vibration: Der Kern ändert seine *Länge* und *Dicke*. Die Rotationssymmetrie bleibt erhalten.
  - $\gamma$ -Vibration: Länge bleibt erhalten, aber die Rotationssymmetrie ändert sich.

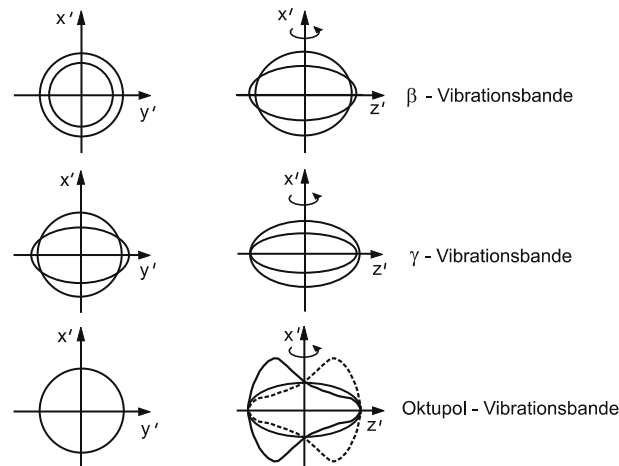
Als Ansatz zur Berechnung der Energiezustände der Vibrationen wird ein harmonischer Oszillator gewählt

$$E_{\text{vib}} = \hbar \cdot \omega_{l,m} \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (2.88)$$

mit äquidistanten Energieniveaus. Jedoch treten auch nicht harmonische Schwingungsanteile auf, wodurch sich die Entartung der Energieniveaus nach  $l$  und  $m$  aufhebt.

Diese Aufspaltung ist schematisch im nebenstehenden Vibrationsspektrum [4] dargestellt und ähnelt dem Anregungsspektrum des  $^{76}\text{Se}$  in Abbildung 15.

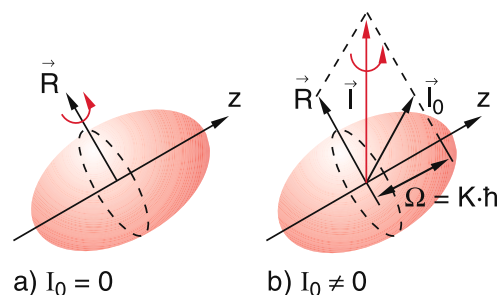




**Fig. 16:** Verschiedene Arten der Quadrupolschwingung [3]. Vibrationen treten hauptsächlich bei Kernen auf, die wenige zusätzliche Nukleonen in der äußeren Schale besitzen.

### Rotationsmodell

Ist der Kern hingegen stark deformiert und weist ein hohes Quadrupolmoment auf, dann führt eine Anregung zur Rotation des gesamten Kerns. Auch hier sind die Energien quantisiert. Es wird angenommen, dass die Rotation senkrecht zur Symmetrieachse verläuft (Rotation um die Symmetrieachse *trägt* keine Energie).



**Fig. 17:** Rotationsdrehimpuls  $\mathbf{R}$ , Eigendrehimpuls  $\mathbf{I}_0$  (Kernspin) und Gesamtdrehimpuls  $\mathbf{I}$  im körperfesten Koordinatensystem des Kerns. Abbildung aus [2].

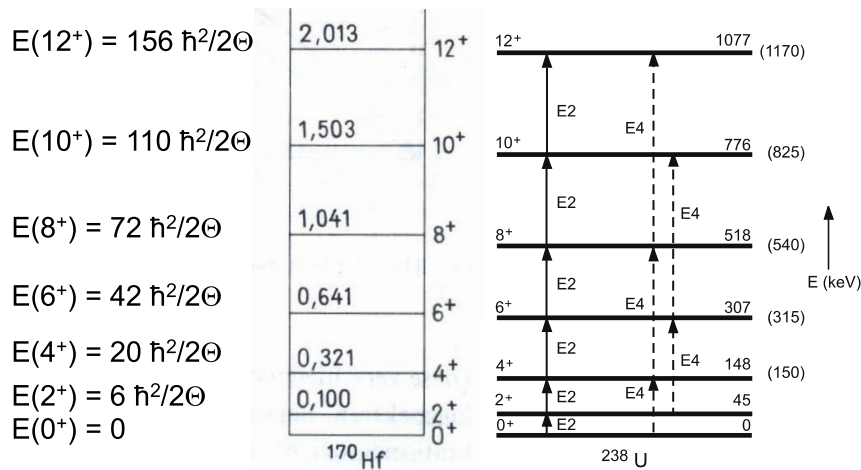
Es können wieder zwei Fälle unterschieden werden:

Beim ersten Fall liegt im Grundzustand kein Eigendrehimpuls vor, d. h.  $I_0 = 0$ . Dies trifft hauptsächlich für gg-Kerne zu. Somit entspricht der Gesamtdrehimpuls  $\mathbf{I}$  entsprechend Abbildung 17 dem Rotationsdrehimpuls  $\mathbf{R}$  und es gilt für die Rotationsenergie

$$E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2\Theta} I(I+1) \quad (2.89)$$

mit  $I = 0, 2, 4, \dots$  aufgrund der Spiegelsymmetrie und dem Trägheitsmoment  $\Theta$ .

Der zweite Fall tritt auf, wenn der Kernspin im Grundzustand ungleich Null ist, d. h.  $I_0 \neq 0$ . Somit ergibt sich der Gesamtspin des Kerns zu  $\mathbf{I} = \mathbf{R} + \mathbf{I}_0$  (siehe Abbildung 17). Für die

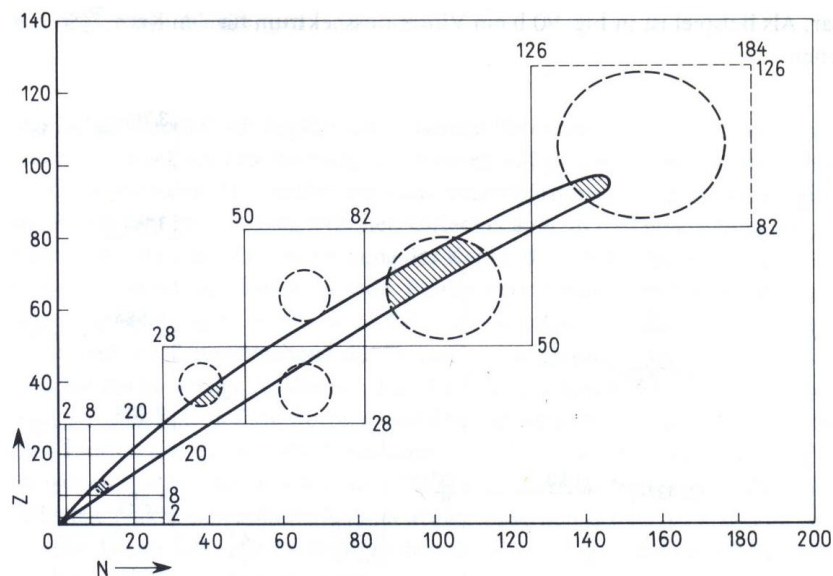


**Fig. 18:** Rotationspektren von gg-Kernen ( $I_0 = 0$ ) [4]. Die Energieniveaus lassen sich in Einheiten des Trägheitsmoments  $\Theta$  darstellen. Auf der rechten Seite [3] sind die experimentellen und berechneten Werte für  $^{238}\text{U}$  dargestellt, welche ziemlich gut übereinstimmen.

Rotationsenergie ergibt sich dann zu

$$E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2\Theta} [I(I + 1) - K^2] \quad \text{mit } I = K, K + 1, \dots \quad (2.90)$$

Dabei ist  $K$  die Projektion von  $I_0$  auf die Symmetrieachse. Nur dieser Teil des Kernspins ist beobachtbar.



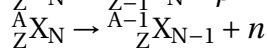
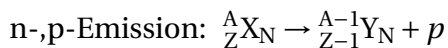
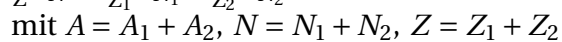
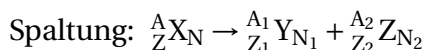
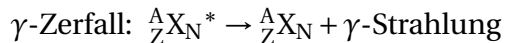
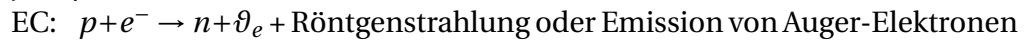
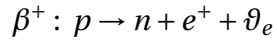
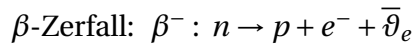
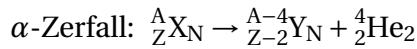
**Fig. 19:** Kerndeformationen treten insbesondere weit entfernt der magischen Zahlen in den schraffierten Bereichen auf. Abbildung aus [4].

In Abbildung 19 ist dargestellt, in welchen Bereichen der Nuklidkarte Einzelanregung, Vibration und Rotation stattfinden können. Bei Nukleonenzahlen in der Nähe der magischen Zahlen lässt sich das Schalenmodell gut anwenden und magnetische Momente oder der Kernspin lassen sich durch Einzelanregungen gut beschreiben. Weit entfernt von den magischen

Zahlen (in den schraffierten Bereichen innerhalb der Kreise) sind die Kerne besonders stark deformiert und lassen sich durch das Rotationsmodell beschreiben. In den Bereichen dazwischen treten häufig Kerne auf, deren Anregungsspektren sich durch das Vibrationsmodell beschreiben lassen.

## 3 Zerfall instabiler Kerne

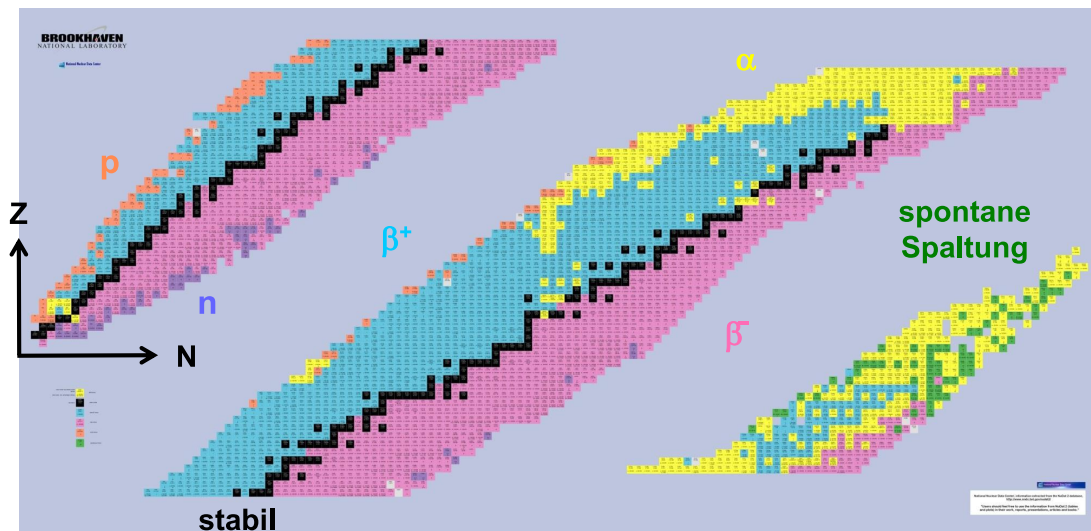
### 3.1 Zerfallsarten



Bei dem Auger-Prozess wird bei dem Übergang eines Elektrons auf ein Energieniveau in ein Loch in einer tieferen Schale die freiwerdende Energie strahlungsfrei von einem weiteren Elektron aufgenommen, was als Auger-Elektron emittiert wird.

Bei allen Übergängen wird noch zusätzlich Energie in der Größenordnung von keV und MeV frei.

Die Tochterisotope können ebenfalls radioaktiv sein, weshalb weitere Zerfallsprodukte existieren können.



**Fig. 20:** Verschiedene Zerfallsarten der Nuklide sind farblich auf der Nuklidkarte gekennzeichnet. Blau entspricht  $\beta^+$ -, rosa  $\beta^-$ -, gelb  $\alpha$ -Zerfall, orange ist p-Emission und grün stellt spontane Spaltung dar. Abbildung aus *National Nuclear Data Center, Brookhaven National Laboratory*.

## 3.2 Das Zerfallsgesetz

Ist die Anzahl der Kerne als Funktion der Zeit  $N(t)$ , dann ist die Zerfallsrate mit der Zerfallswahrscheinlichkeit  $\lambda$  [Zahl/s] gegeben als

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda \cdot N(t) = -A(t). \quad (3.1)$$

Dabei wird mit  $A(t)$  die Aktivität bezeichnet. Sie beschreibt die Kernzerfälle pro Sekunde. Ihre Einheit ist das Becquerel [Bq] (ein Becquerel entspricht einem Kernzerfall pro Sekunde). Die zeitliche Integration von Gleichung (3.1) liefert das Zerfallsgesetz:

$$N(t) = N_0 \exp[-\lambda t] \quad \text{allgemeine Form} \quad (3.2)$$

mit  $N_0 = N(t=0)$ .

Die mittlere Lebensdauer  $\tau$  ist die Zeit, nach der die Aktivität auf  $\frac{1}{e}$  des Anfangswertes abgesunken ist

$$N(\tau) \stackrel{!}{=} \frac{N_0}{e} \Rightarrow \tau = \frac{1}{\lambda}. \quad (3.3)$$

Die Halbwertszeit  $t_{1/2}$  gibt an, nach welcher Zeit die Aktivität auf die Hälfte gesunken ist:

$$N(t_{1/2}) \stackrel{!}{=} \frac{N_0}{2} \Rightarrow t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \cdot \ln 2. \quad (3.4)$$

Aufgrund der endlichen Lebensdauer und der HEISENBERG'schen Unschärferelation  $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$  haben instabile Zustände eine natürliche Linienbreite

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau} = \hbar \cdot \lambda. \quad (3.5)$$

Existieren für einen Kern mehrere Zerfallskanäle (Möglichkeiten der Kernzerfalls für ein Nuklid) dann ergibt sich die Gesamtzerfallswahrscheinlichkeit zu

$$\lambda = \sum_i \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots \quad (3.6)$$

### Zerfallsreihen

Nun wird die Situation betrachtet, dass das Zerfallsprodukt ebenfalls wieder instabil ist. Man spricht dabei von Mutter-Tochter-Aktivität



Der Fall für den ersten Kern folgt dem bekannten Zerfallsprozess

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = -\lambda_1 \cdot N_1(t), \quad N_1(t=0) = N_0. \quad (3.8)$$

Für den zweiten Kern wird angenommen, dass er zum Zeitpunkt  $t = 0$  noch nicht gebildet wurde  $N_2(t = 0) = 0$ . Die Änderungsrate ergibt sich folgendermaßen:

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = \lambda_1 \cdot N_1(t) - \lambda_2 \cdot N_2(t). \quad (3.9)$$

Dabei beschreibt der erste Term in (3.9) den Zuwachs durch den Zerfall von Kern 1 und der zweite die Abnahme durch den Zerfall von Kern 2. Die Gleichung stellt eine inhomogene lineare Differentialgleichung dar, die mithilfe der Variation der Konstanten gelöst werden kann. Der homogene Teil der Lösung ergibt sich zu

$$N_2(t) = \xi(t) \cdot e^{-\lambda_2 t} \Rightarrow \frac{dN_2(t)}{dt} = -\lambda_2 \cdot \xi(t) \cdot e^{-\lambda_2 t} + \frac{d\xi}{dt} e^{-\lambda_2 t}. \quad (3.10)$$

Unter Beachtung von  $N_1(t) = N_0 \exp(-\lambda_1 t)$  und durch Gleichsetzen von (3.9) und (3.10) ergibt sich

$$\frac{d\xi}{dt} = N_0 \lambda_1 e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)t} \Rightarrow \xi(t) = N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)t} + \text{const.} \quad (3.11)$$

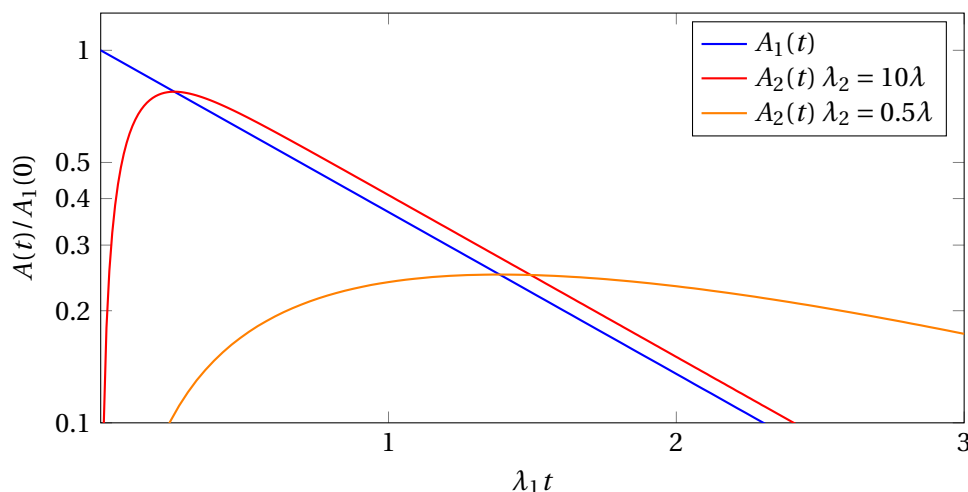
Damit ergibt sich die Lösung von  $N_2(t)$  zu

$$N_2(t) = \left[ N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)t} + \text{const.} \right] e^{-\lambda_2 t}. \quad (3.12)$$

Wird nun die Randbedingung  $N_2(t = 0) = 0$  eingesetzt folgt

$$N_2(t) = N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left( e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t} \right). \quad (3.13)$$

Der zeitliche Verlauf der Aktivität wird durch das Verhältnis der Zerfallswahrscheinlichkeiten bestimmt. In Abbildung 21 ist in halblogarithmischer Darstellung die Aktivität  $A_1(t) =$



**Fig. 21:** Halblogarithmische Darstellung der Mutter-Tochter-Aktivität.

$\lambda_1 N_1(t)$  des Mutterisotops und die Aktivität  $A_2(t) = \lambda_2 N_2(t)$  des Tochterisotops für zwei verschiedene Fälle dargestellt. Für eine hohe Zerfallsrate des Tochterisotops folgt die Aktivität



der des Mutterisotops. Ist das Tochterisotop langlebiger, dann ist der Kurvenverlauf wesentlich flacher. Der Schnittpunkt der Aktivitätskurven liegt jeweils in der Nähe des Maximums der Aktivität des Tochterisotops und befindet sich in etwa bei der Nähe der Lebensdauer des Tochterisotops.

Für den  $i$ -ten Kern mit der Randbedingung  $N_i(t=0) = 0$  ergibt sich ein System von Differentialgleichungen

$$\frac{dN_i(t)}{dt} = \lambda_{i-1}N_{i-1}(t) - \lambda_i N_i(t) \quad (3.14)$$

die nach der Reihe gelöst werden müssen.

### 3.3 Einheiten

- a) *Aktivität*: 1 Becquerel = 1 Zerfall pro Sekunde  
 $1 \text{ Bq} \hat{=} 2,7027 \cdot 10^{-11} \text{ Curie (Ci)}$  bzw.  $1 \text{ Ci} \hat{=} 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$   
 Ein Curie entspricht der Aktivität von 1 g  $^{226}\text{Ra}$  ohne Tochterprodukte.
- b) *Energiedosis*:  $1 \text{ Gray} = 1 \text{ Gy} = 1 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$   
 Ein Gray entspricht der übertragenen Energie auf 1 kg Materie durch ionisierende Strahlung.  
 Früher: rad (radiation absorbed dose)  $1 \text{ rad} \hat{=} 10^{-2} \text{ Gy}$ .
- c) *Ionendosis*: Einheit:  $1 \frac{\text{C}}{\text{kg}}$ . Die Ionendosis ist messtechnisch einfacher zu bestimmen als die Energiedosis. Bei räumlich konstanter Energieflussdichte wird ein Coulomb in 1 kg Luft erzeugt.  
 Früher: 1 Röntgen =  $2,58 \cdot 10^{-4} \frac{\text{C}}{\text{kg}}$   
 $1 \frac{\text{C}}{\text{kg}}$  erzeugt  $6,242 \cdot 10^{18}$  Ionenpaare. Für Luft benötigt man zur Erzeugung eines Ionenpaars etwa 34 eV/Ionenpaar. Somit entspricht

$$1 \frac{\text{C}}{\text{kg}} \approx 34 \text{ Gy}, \quad 1 \text{ R} = 0,8772 \text{ rad}. \quad (3.15)$$

- d) *RBW-Faktor*: gibt die relative biologische Wirksamkeit an. Der RBW-Faktor ist abhängig von der Art des betrachteten biologischen Strahlenschadens und wird meist mit  $q$  abgekürzt.

Art	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	Röntgen	n	$n_{\text{thermisch}}$	p	schw. Kerne
$q$	20	1	1	1	10	3	10	20

- e) *Äquivalenzdosis*:  $1 \text{ Sievert} = 1 \text{ Sv} = q \cdot \text{Energiedosis (Gy)}$   
 Früher:  $1 \text{ rem} = q \cdot \text{Energiedosis (rad)}$  (rem = Röntgen equivalent man)  
 $1 \text{ Sv} = 100 \text{ rem} = 1 \text{ Gy}$  (für 200 keV X-Rays)

### 3.4 Natürliche Radioaktivität

Es gibt Zerfallsketten auf der Erde aus Isotopen mit einer Halbwertszeit, die länger als das Alter der Erde ist. Es existieren insgesamt vier natürliche Zerfallsketten, da sich die Massenzahl beim  $\alpha$ -Zerfall um 4 ändert. Die Neptunium-Reihe kommt aufgrund der kleinen Halbwertszeit

A	Reihe	Mutternuklid	$t_{1/2}$ [a]	Endnuklid
$4n$	Thorium	$^{232}_{90}\text{Th}$	$1.4 \cdot 10^{10}$	$^{208}_{82}\text{Pb}$
$4n + 1$	Neptunium	$^{237}_{93}\text{Np}$	$2.1 \cdot 10^6$	$^{209}_{83}\text{Bi}$
$4n + 2$	Uran-Radium	$^{238}_{92}\text{U}$	$4.5 \cdot 10^9$	$^{206}_{82}\text{Pb}$
$4n + 3$	Uran-Actinium	$^{235}_{92}\text{U}$	$7.1 \cdot 10^8$	$^{207}_{82}\text{Pb}$

zeit nicht mehr natürlich vor. Das in den Zerfallsketten als Tochternuklid auftretende Radon  $^{86}_{86}\text{Rn}$  ist ein Edelgas und das Element, was die größte natürliche radioaktive Belastung verursacht ( $\approx 2$  mSv), da es als Gas aus der Erde austritt.

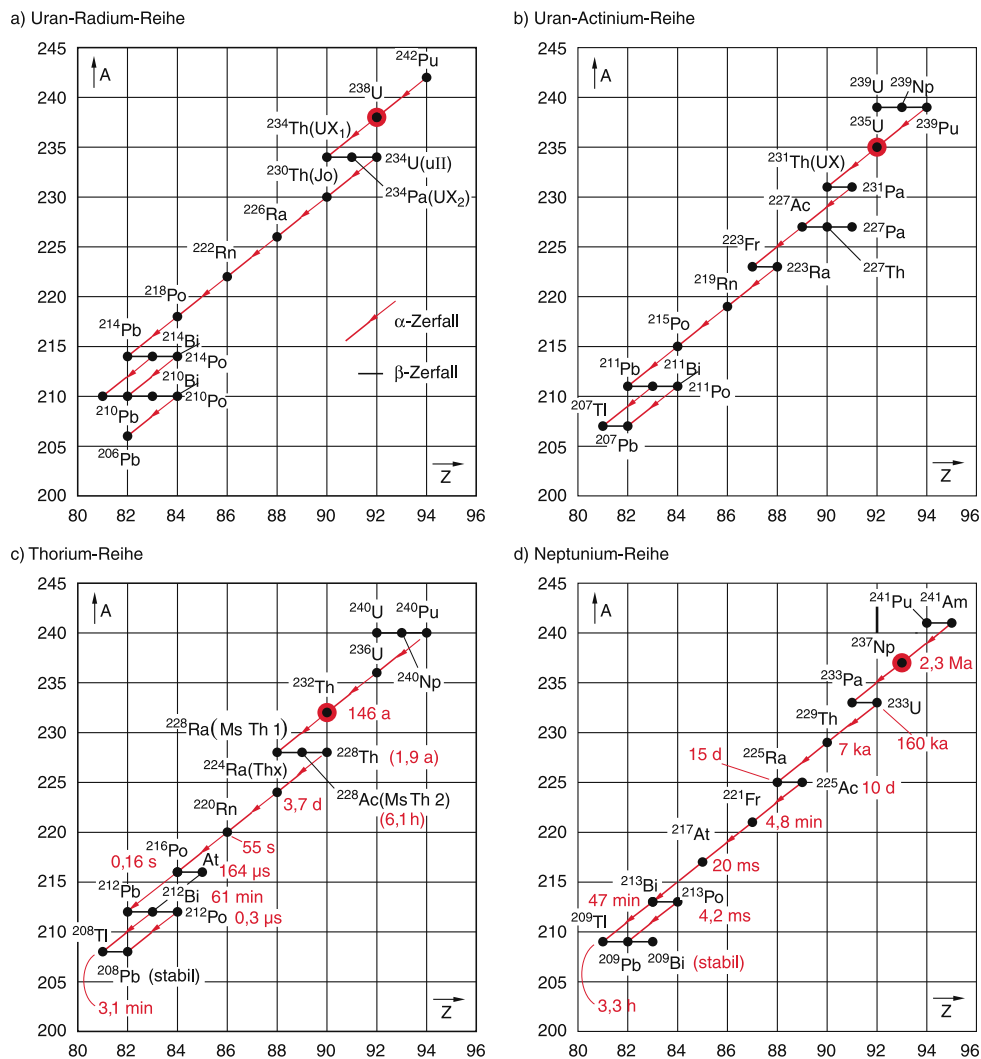


Fig. 22: Die vier natürlichen Zerfallsketten. Abbildung aus [2].



Beim Astat lässt sich beobachten, dass nur 0,5 % der Kernzerfälle auf  $\alpha$ -Zerfall beruhen. Es findet annähernd fast immer ein Übergang in den Grundzustand von  $^{204}_{83}\text{Bi}$  statt. Beim Americium hingegen ist der Übergang in den zweiten angeregten Zustand am wahrscheinlichsten.

Übergänge in angeregte Zustände sind häufig auf Rotationsbanden zurückzuführen, die durch den Rückstoß des Tochterkerns (Impulserhaltung) entstehen.

Tatsächlich zeigt sich, dass beim  $\alpha$ -Zerfall die kinetische Energie der  $\alpha$ -Teilchen  $E_{\text{kin}} = E_1 - E_2$  nur von der Energiedifferenz des Anfangs- und Endzustands abhängt.

Aus der Kinematik der Zerfallsprozesse wurde gefunden, dass beim  $\alpha$ -Zerfall alle Erhaltungssätze (Energie-, Impuls- und Drehimpulserhaltung) gelten, wenn man annimmt, dass es sich um einen *Zweikörperzerfall* handelt, wo nur ein Teilchen emittiert wird.

Die Reaktionsgleichung des  $\alpha$ -Zerfalls lautet daher



Bei der Vermessung der Halbwertszeiten von  $\alpha$ -Strahlern fiel auf, dass diese sehr unterschiedlich sein können:

Kern	$^{212}_{84}\text{Po}$	$^{224}_{88}\text{Ra}$	$^{144}_{66}\text{Nd}$
$t_{1/2}$	$2 \cdot 10^{-7} \text{ s}$	3,6 d	$2 \cdot 10^{15} \text{ a}$
$E_{\text{kin}}(\alpha)$	8,78 MeV	5,7 MeV	1,84 MeV

### Geiger-Nuttal-Regel

GEIGER und NUTTAL fanden 1911 einen Zusammenhang zwischen der Zerfallskonstanten  $\lambda$  und der Reichweite  $R_\alpha$  (und damit auch der Energie)

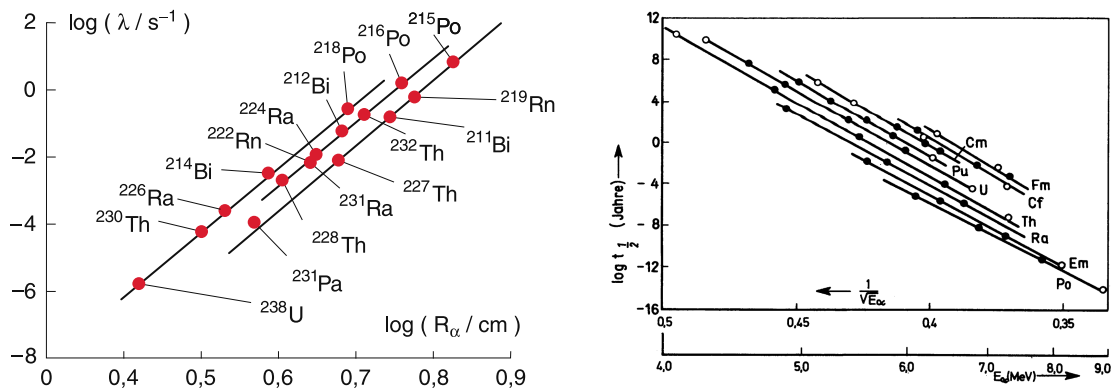
$$\ln \lambda = A + B \ln R_\alpha. \quad (3.17)$$

Dabei sind die Konstanten  $A$  und  $B$  für alle Elemente einer Zerfallsreihe gleich, obwohl deren Halbwertszeiten  $t_{1/2}$  von  $10^{-15} \text{ s}$  bis  $10^{15} \text{ Jahren}$  reichte.

Heutzutage wird der Zusammenhang mit der kinetischen Energie der  $\alpha$ -Teilchen formuliert und die GEIGER-NUTTAL-Regel ergibt sich zu

$$\boxed{\log_{10} \lambda = -a \frac{Z}{\sqrt{E_{\text{kin}}}} + b.} \quad (3.18)$$

Dieser lange unverstandene Zusammenhang führte erst 1928 zu einer quantitativen Erklärung des  $\alpha$ -Zerfalls durch GAMOW, CONDON und HENRY.



**Fig. 24:** Links: GEIGER-NUTTAL-Geraden für  $\alpha$ -Strahler dreier Zerfallsketten aus [2].  
 Rechts: GEIGER-NUTTAL-Gerade: Halbwertszeit halblogarithmisch über der Energie aufgetragen. Abbildung aus [4].

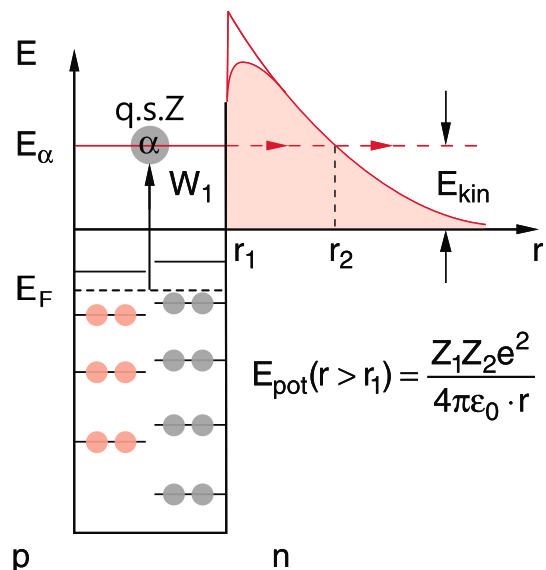
### Quantenmechanische Erklärung des $\alpha$ -Zerfalls

Es wurde erkannt, dass der  $\alpha$ -Zerfall aus zwei Teilprozessen besteht:

- a) Bildung und Anregung eines  $\alpha$ -Teilchens im Kern
- b) Austritt des  $\alpha$ -Teilchens durch den Tunneleffekt

Ausgehend vom FERMI-Gas-Modell lässt sich der  $\alpha$ -Zerfall mithilfe der nebenstehenden Skizze [2] beschreiben. Im Grundzustand sind alle Zustände bis zur FERMI-Energie besetzt, das Niveau der Protonen ist aufgrund der COULOMB-Abstoßung angehoben.

Innerhalb des Kerns bildet sich aus zwei Protonen und Neutronen ein besonders stabiles  $\alpha$ -Teilchen (doppelt magischer gg-Kern) mit hoher Bindungsenergie. Diese Energie wird frei und hebt das  $\alpha$ -Teilchen auf einen quasistationären Zustand an. Von dort kann es mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit aus dem Potentialwall heraustunneln.



Die Halbwertszeit ist im Wesentlichen gegeben  $\rho$  durch die Tunnelwahrscheinlichkeit des  $\alpha$ -Teilchens, welche durch die Höhe und Breite des Potentialwalls bestimmt wird.  $\alpha$ -Teilchen mit hoher kinetischer Energie müssen dabei nur einen kleinen Potentialwall durchtunneln, wodurch sich eine geringe Halbwertszeit ergibt.

Die Zerfallswahrscheinlichkeit ergibt sich nun zu

$$\lambda = \lambda_0 \cdot T_\alpha \quad \text{mit } \lambda_0 = w_B \cdot f \tag{3.19}$$

wobei  $T_\alpha$  die Transmissionswahrscheinlichkeit durch den Potentialwall des Kerns angibt.

Der Faktor  $w_B$  ist die Wahrscheinlichkeit für die Bildung eines  $\alpha$ -Teilchens. Er hängt stark von der Kernstruktur (Nukleonenkonfiguration) ab und ist sehr schwierig durch Modelle zu

beschreiben. Für gg-Kerne ergibt sich beispielsweise  $w_B \approx 1$  für ug- und gu-Kerne ist der Wert kleiner.

Der Faktor  $f$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass das  $\alpha$ -Teilchen gegen den Potentialwall stößt und hat die Einheit einer Frequenz. Er lässt sich einfach mithilfe der Relaxationszeit  $\tau$  bestimmen, welche die Zeit angibt, die das  $\alpha$ -Teilchen braucht, um den Kern einmal zu durchqueren

$$\tau = \frac{2 \cdot R_0}{v} \Rightarrow f = \frac{1}{\tau} = \frac{v}{2R_0} \approx 10^{20} \text{ Hz.} \quad (3.20)$$

Damit ergibt sich für  $\lambda_0 \approx 10^{20} \text{ Hz}$ . Die Transmissionswahrscheinlichkeit  $T_\alpha$  ist hier also der dominierende Faktor.

### Herleitung der Transmissionswahrscheinlichkeit

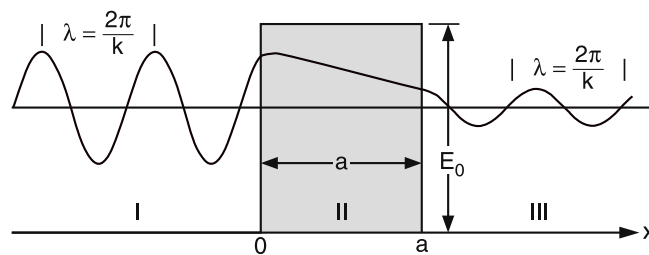
Der Transmissionskoeffizient lässt sich in der Quantenmechanik mithilfe der Schrödinger-Gleichung bestimmen. Durch Stetigkeitsbedingungen der Wellenfunktion und ihrer ersten Ableitungen am Potentialübergang lässt sich mithilfe der stationären SCHRÖDINGER-Gleichung

$$E\Psi(x) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(x) \right] \Psi(x) \quad (3.21)$$

die Transmissionswahrscheinlichkeit bestimmen [Cohen-Tannoudji, Kap.1.12.2]. In der Näherung eines dicken Potentialwalls ergibt sich die Transmissionswahrscheinlichkeit für ein Rechteckpotential zu

$$T \propto \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2 \cdot m E_B a}\right) \quad (3.22)$$

wobei  $E_B = V_0 - E$  die Bindungsenergie beschreibt. Liegt ein nicht kastenförmiges Potential



vor (siehe Abbildung [2]), so berechnet sich  $T$  zu

$$T \propto \exp\left[-\frac{2}{\hbar} \int_0^a \sqrt{2m(V(x) - E)} dx\right]. \quad (3.23)$$

Für den  $\alpha$ -Zerfall wird der GAMOW-Faktor eingeführt

$$T_\alpha = \exp(-G) \quad \text{mit} \quad G = \frac{2}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2m(V(r) - E_{kin}(\alpha))} dr. \quad (3.24)$$

Wird das COULOMB-Potential und der kritische Radius  $r_2$  (siehe Abbildung auf Seite 45) eingesetzt

$$V(r) = \frac{Z_1 \cdot Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad r_2 = \frac{Z_1 \cdot Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 E_{\text{kin}}(\alpha)} \quad (3.25)$$

ergibt sich der GAMOW-Faktor zu

$$G = \frac{2}{\hbar} \sqrt{\frac{2m_\alpha}{E_{\text{kin}}(\alpha)}} \frac{Z_1 \cdot Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0} \left[ \arccos \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} - \sqrt{\frac{r_1}{r_2} \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)} \right]. \quad (3.26)$$

Eine Reihenentwicklung führt zu der Approximation

$$G \approx \frac{Z_1 \cdot Z_2}{\sqrt{E_{\text{kin}}(\alpha)}} \quad (3.27)$$

woraus für die Halbwertszeit folgt:

$$t_{1/2} \sim \frac{1}{\lambda} \sim \frac{1}{T_\alpha} \sim \exp(G) \Rightarrow \ln t_{1/2} \sim G \sim \frac{1}{\sqrt{E_{\text{kin}}(\alpha)}} \quad (3.28)$$

in Übereinstimmung mit der GEIGER-NUTTAL-Regel.

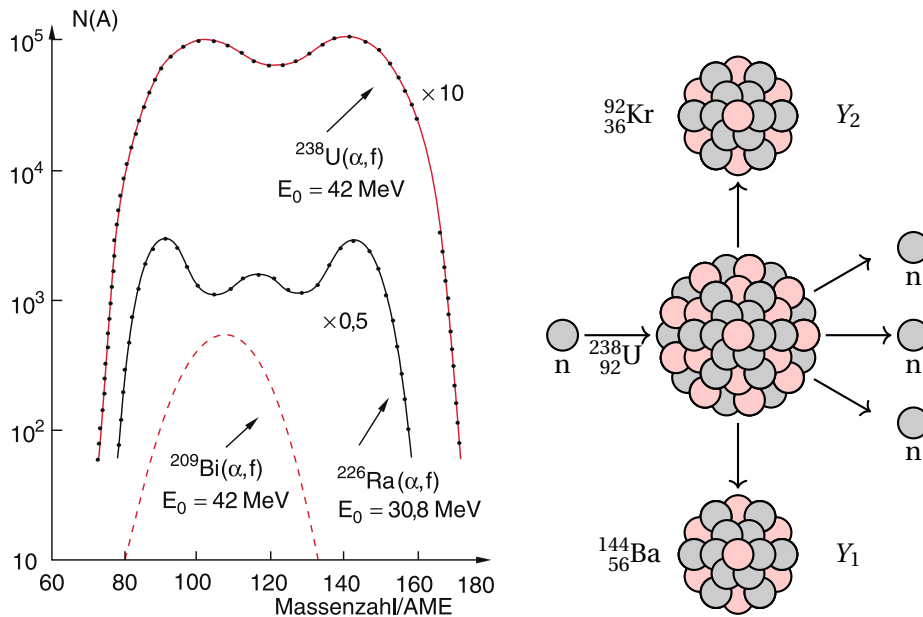
### 3.6 Kernspaltung

Im Folgenden wird zunächst die Kernspaltung diskutiert, da der zugrundeliegende Mechanismus dem des  $\alpha$ -Zerfalls ähnelt. Die Kernspaltung wurde 1938 von HAHN und STRASSMANN entdeckt. Bereits 1939 wurde die Kernspaltung von MEITNER und FRISCH korrekt beschrieben. Die erste kontrollierte Kettenreaktion wurde 1942 von FERMI realisiert. Diese rasche Entwicklung während der Zeit des zweiten Weltkrieges resultierte 1945 in dem Einsatz der ersten Atombombe auf Hiroshima.

Bei der Kernspaltung wird ein Kern  $(Z, A)$  in zwei gleiche Bruchstücke gespalten. Die freiwerdende Energie lässt sich über die Massendifferenz aus der BETHE-WEIZSÄCKER-Formel berechnen:

$$Q \equiv E_S = [m(Z, A) - 2 \cdot m\left(\frac{Z}{2}, \frac{A}{2}\right)] \cdot c^2. \quad (3.29)$$

Für das Uranisotop  $^{238}_{92}\text{U}$  wird eine Energie von  $E_S \sim 200\text{MeV}$  frei. Die Annahme, dass die beiden Bruchstücke gleich groß sind, ist nur ein Spezialfall. In Abbildung 25 ist die Verteilung der Spaltprodukte über der Massenzahl aufgetragen.  $^{238}\text{U}$  welches unter Beschuss von  $\alpha$ -Teilchen spontan spaltet zeigt eine asymmetrische Verteilung, während  $^{209}\text{Bi}$  symmetrisch in zwei gleiche Kerne spaltet.



**Fig. 25:** Links: Massenverteilung der Spaltprodukte bei durch  $\alpha$ -Beschuss induzierter Kernspaltung. Abbildung aus [2]. Rechts: Schematische Darstellung der durch Neutronen induzierten Kernspaltung.

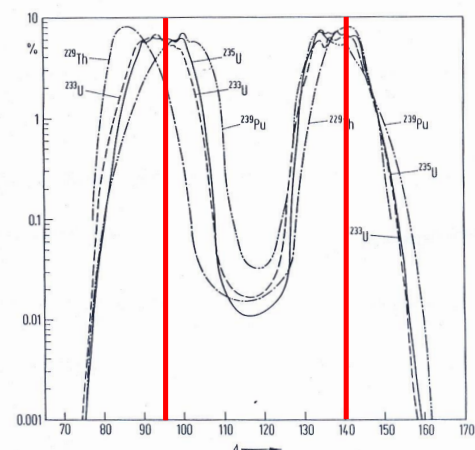
Auf der rechten Seite ist gezeigt [4], dass  $^{238}\text{U}$  in zwei unterschiedlich schwere Kerne aufspaltet und zusätzlich Neutronen frei werden. Um die beiden Kernbruchstücke wieder zusammenzuführen, muss die COULOMB-Energie wieder überwunden werden. Das entsprechende COULOMB-Potential lautet

$$V_C = \frac{Z_1 \cdot Z_2 e^2}{r_0 A_1^{1/3} + r_0 A_2^{1/3}} = \frac{Z_1 \cdot Z_2 e^2}{R}. \quad (3.30)$$

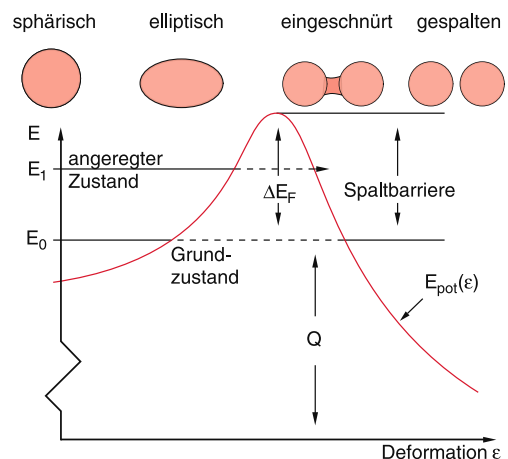
Für  $^{238}\text{U}$  ergibt sich dabei  $V_C \approx 220\text{ MeV}$ , was etwa 20 MeV größer ist, als die freiwerdende Energie.

Der zweite Term aus der WEIZSÄCKER-Formel, der Oberflächenterm, ist zusätzlich entscheidend für die Spaltung.

Der schematische Verlauf der potentiellen Energie ist für sphärische Kerne in der nebenstehenden Abbildung [2] als Funktion des Abstandes der beiden Bruchstücke dargestellt. Es gilt zu beachten, dass der zu überwindende COULOMB-Wall aufgrund der Kernkraft abgeflacht wird. Für große Abstände ist die gesamte freiwerdende Energie in der kinetischen Energie der Spaltprodukte gespeichert.



**A = 95      A = 140**





Beim Prozess der Kernspaltung kommt es zunächst zu einer Deformation des kugelsymmetrischen Kerns. Durch diese *Einschnürung* steigt die Oberflächenenergie an. Dies geschieht bis zu dem Punkt, wo sich die beiden Kernfragmente trennen und anschließend durch die *Coulomb*-Kraft beschleunigt werden. Die Spaltbarriere die durch das Einschnüren des Kerns überwunden wird, befindet sich in der Größenordnung von 6 MeV.

### Spontane Spaltung

Es gibt mehrere Möglichkeiten, wie der Kern die Spaltbarriere überwinden kann. Eine Möglichkeit ist das Tunneln des Kernbruchstückes wie beim  $\alpha$ -Zerfall. Die Tunnelwahrscheinlichkeit nimmt jedoch mit zunehmender Masse stark ab

$$T \stackrel{(3.24)}{\propto} \exp(-G) \propto \exp(-\sqrt{m}). \quad (3.31)$$

Ein  $\alpha$ -Teilchen ist ( $A = 4$ ) wesentlich leichter, als ein Kernbruchstück (bei  $^{235}\text{U}$  haben die Kernbruchstücke Massenzahlen von  $A = 95$  bzw.  $A = 140$ ), weshalb die Tunnelwahrscheinlichkeit um  $10^{-4}$  kleiner ist, als beim  $\alpha$ -Zerfall. Für  $^{235}\text{U}$  ergibt sich dann eine Halbwertszeit von  $7 \cdot 10^8$  Jahren.

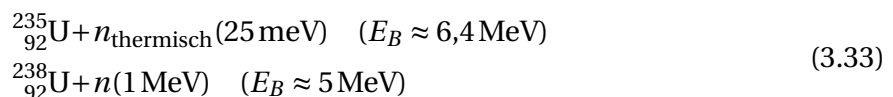
### Induzierte Spaltung

Eine induzierte Spaltung wird ausgelöst durch eine Energiezufuhr (siehe Abbildung 25 rechts), welche größer sein muss, als die Spaltbarriere

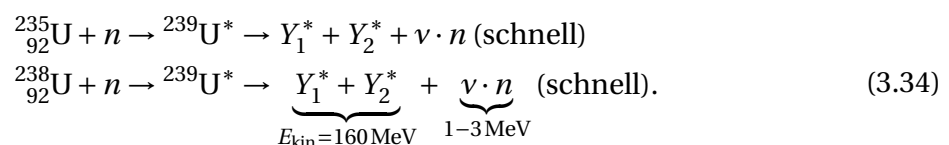
$$E \geq V_C - E_S. \quad (3.32)$$

Dies wird meist durch den Einfang von Neutronen oder Gamma-Quanten realisiert. Protonen sind für den Beschuss eher ungeeignet, da sie ebenfalls den COULOMB-Wall überwinden müssen (es geht aber trotzdem).

Bei dem Einfang von Neutronen wird die Separationsenergie, die zur Abspaltung eines Neutrons aus dem Kern nötig wäre frei, für Kerne mit ungerader Neutronenzahl wird zusätzlich noch Paarungsenergie frei. Deshalb lassen sich diese Kerne besonders gut spalten. Insbesondere lässt sich  $^{235}\text{U}$  bereits mithilfe von thermischen Neutronen spalten:



Die Reaktionsgleichungen sehen dann wie folgt aus:



Die freiwerdenden Neutronen können anschließend weitere Spaltreaktionen ausführen. Für  $\nu > 1$  handelt es sich um eine Kettenreaktion. Beim Uran ist die mittlere Anzahl entstehender Neutronen  $\bar{\nu} \approx 2.5$ . In einem Kernreaktor wird versucht,  $\nu$  bei etwa eins zu halten, um eine kontrollierte Kettenreaktion durchzuführen. Unkontrollierte Kettenreaktionen werden

als Sprengstoff in Atombomben genutzt. Da im natürlich vorkommenden  $^{235}\text{U}$  der Faktor  $\nu > 1$  ist, müsste also theoretisch im Uranerz eine Kettenreaktion ablaufen und das Erz in Folge explodieren. Dies ist allerdings nicht der Fall und den Grund dafür stellen verschiedene Verlustmechanismen dar, die im Folgenden erläutert werden sollen.

### Verlustmechanismen für Neutronen

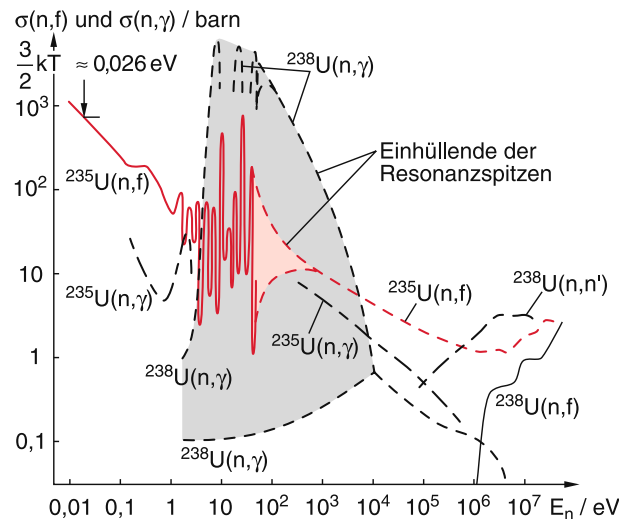
In der nebenstehenden Abbildung [2] sind verschiedene Wirkungsquerschnitte für unterschiedliche Reaktionen von Neutronen mit  $^{238}\text{U}$  und  $^{235}\text{U}$  dargestellt. Dabei werden Spaltreaktionen  $\sigma(n, f)$  und Reaktionen, wo nur Gamma-Quanten entstehen  $\sigma(n, \gamma)$ , betrachtet.

Für einen *reinen Block*  $^{238}\text{U}$  werden Neutronen mit einer Energie von 1 MeV benötigt, um eine Spaltung überhaupt anzuregen. Dementsprechend ist der Wirkungsquerschnitt für  $\sigma(^{238}\text{U}(n, f))$  entsprechend klein. Wesentlich größer ist hingegen der Wirkungsquerschnitt für einen elastischen Stoß des Neutrons mit dem Kern ohne Spaltung  $\sigma(^{238}\text{U}(n, n'))$ . Die Neutronen werden gebremst und haben anschließend keine ausreichende Energie mehr, um eine Spaltung anzuregen. Es tritt also keine Kettenreaktion auf.

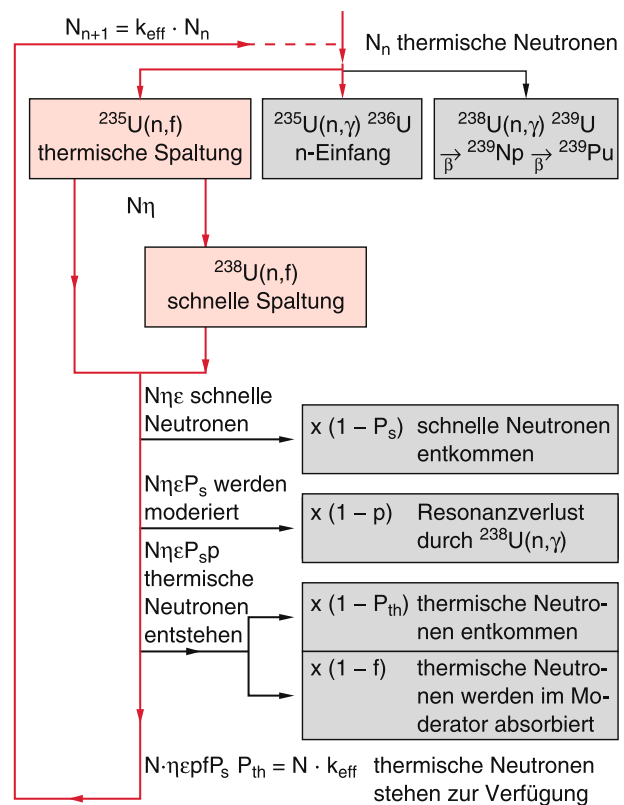
Für ein natürliches *Isotopengemisch* von Uran mit  $^{238}\text{U} : ^{235}\text{U} = 140 : 1$  treten Resonanzen (grauer Bereich) auf. Hierbei ist die Reaktion mit dem größten Wirkungsquerschnitt der Einfang von Neutronen durch  $^{238}\text{U}$  unter Aussendung von Gamma-Quanten. Diese Reaktion ist wesentlich wahrscheinlicher als die spontane Spaltung des Urans.

Um eine kontrollierte Kernspaltung durchzuführen, ist mit  $^{235}\text{U}$  *angereichertes* Material notwendig. Da hier trotzdem weiterhin die Wahrscheinlichkeit besteht, dass bei der Spaltung freiwerdende Neutronen zur Emission von Gamma-Quanten führen, wird der Spaltprozess vom Abbremsen der Neutronen räumlich getrennt. Man spricht dabei davon, dass die Neutronen moderiert werden. Der Moderator sollte dabei ein gutes Bremsvermögen aufweisen und keine Absorption zeigen. Hierfür bieten sich vor allem leichte Verbindungen an, da hier der Impulsübertrag beim Stoß eines Neutrons mit dem Molekül besonders hoch ist und die Bremslänge entsprechend kurz ist. Es bieten sich mehrere Materialien an:

Material	$\sigma_{\text{Absorption}}$	Bremslänge
H <sub>2</sub> O	0,664 barn	5,3 cm
D <sub>2</sub> O	0,001 barn	11,2 cm
Graphit	0,0045 barn	19,1 cm



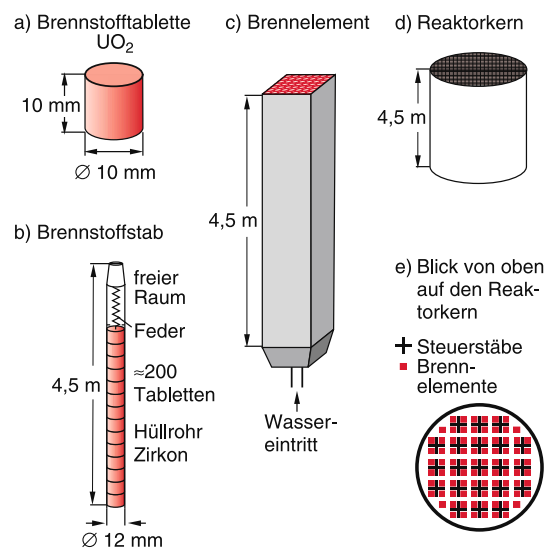
Zur Konstruktion eines Kernreaktors ist es wichtig zu verstehen, zu welchen Teilen die Neutronen jeweils verloren gehen. Das nebenstehende Schema [2] zeigt den typischen Lebenszyklus von Neutronen im Reaktorkern. Zunächst können thermische Neutronen das  $^{235}\text{U}$  thermisch spalten und anschließend die schnelle Spaltung von  $^{238}\text{U}$  auslösen. Allerdings werden Neutronen ebenfalls mit gewisser Wahrscheinlichkeit von den beiden Uranisotopen unter Emission von  $\gamma$ -Strahlung eingefangen. Zudem kann nach der thermischen Spaltung ein gewisser Teil der schnellen Neutronen dem Kernmaterial entkommen oder vom  $^{238}\text{U}$  moderiert werden. Für thermische Neutronen kann dies ebenfalls auftreten.



Funktionsweise eines Kernreaktors

In einem Kernreaktor müssen die Brennelemente und der Moderator räumlich getrennt werden. Als Moderator eignet sich Wasser besonders gut. Neben der guten Bremseigenschaften für Neutronen kann es ebenfalls als Kühlmittel des Reaktors dienen und aufgrund der flüssigen Phase die Wärme gut abführen. Der typische Durchfluss im Kernreaktor beträgt 70 000 t/h.

Die räumliche Geometrie von Brennelementen und Moderator ist besonders wichtig (siehe nebenstehende Abbildung [2]). Weiterhin werden Regelstäbe mit einem hohen  $\sigma_n$ -Querschnitt ( $^{10}\text{B}$ ,  $^{117}\text{Cd}$ ) zur Kontrolle der Kettenreaktion eingesetzt.



Die prinzipielle Wirkungsweise der Kernreaktors ist recht einfach. In den Brennelementen wird durch thermische Neutronen das Material gespalten. Die entstehenden Neutronen gelangen in den Moderator und werden auf thermische Energien moderiert. Anschließend treffen die Neutronen wieder auf die Brennelemente und die Kettenreaktion wird fortgesetzt. Das Ganze wird noch zusätzlich mit einer Abschirmung umhüllt, die gleichzeitig als Reflektor der Neutronen dient. Im Brennstoffstab muss ein gewisser Teil freigelassen werden, damit das bei der Reaktion entstehende Radon den Stab bei der Reaktion nicht mechanisch zerstört.

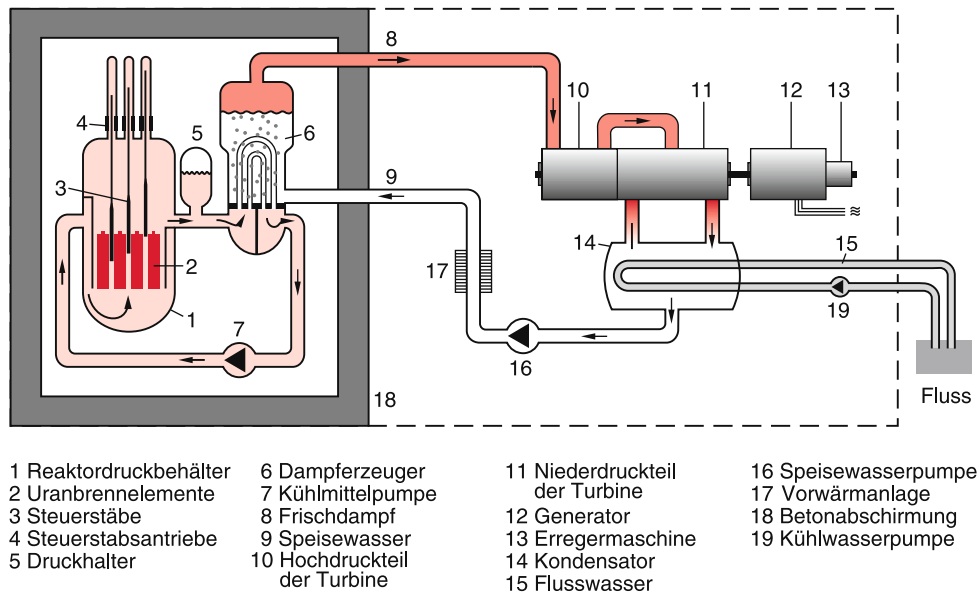


Fig. 26: Schematische Skizze eines Druckwasser-Kernreaktors. Abbildung aus [2].

In Abbildung 26 ist ein Druckwasserreaktor schematisch dargestellt. Die im Reaktor erzeugte Wärme wird über Wärmetauscher in einen zweiten Wasserkreislauf übertragen, der eine Turbine antreibt.

### Kernwaffen

Zur Berechnung, wann eine angereicherte Menge an Uran explodieren kann, ist der Reproduktionsfaktor  $k_\infty$  relevant:

$$k_\infty = \bar{\nu} \frac{\sigma_{\text{Spaltung}}}{\sigma_{\text{Absorption}}}. \quad (3.35)$$

Für die gängigsten in Kernwaffen verwendeten Nuklide ist der Faktor im Folgenden aufgeführt:

$$\begin{aligned} {}^{235}\text{U}: \bar{\nu} &= 2,47, \sigma_S = 1,3 \text{ barn}, \sigma_A = 1,57 \text{ barn} \Rightarrow k_\infty = 2,04 \\ {}^{239}\text{Pu}: \bar{\nu} &= 2,91, \sigma_S = 1,8 \text{ barn}, \sigma_A = 2,02 \text{ barn} \Rightarrow k_\infty = 2,59. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Der Wert für  $k_\infty$  bezieht sich aber auf eine unendlich große Brennstoffmenge, wo keine Verluste durch die Oberfläche auftreten. Für eine Brennstoffkugel mit Radius  $R$  ergibt sich nun ein effektiver Reproduktionsfaktor

$$k_{\text{eff}} = k_\infty P = k_\infty R \sigma_A \cdot N. \quad (3.37)$$

Dabei bezeichnet  $N$  die Atomdichte, welche über  $N = \rho \frac{N_A}{A}$  mit der Dichte  $\rho$ , der Avogadro-Zahl  $N_A = 6 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}$  und dem Atomgewicht  $A$  verknüpft ist. Damit eine Kettenreaktion in Gang gesetzt wird, muss  $k_{\text{eff}} \geq 1$  sein. Durch Umstellen von (3.37) ergibt sich ein kritischer Radius von

$$R_C = \frac{A}{k_\infty \cdot \sigma_A N_A \rho}. \quad (3.38)$$

Für  $^{235}\text{U}$  ergibt sich mit den obigen Werten und  $\rho = 18,9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  ein kritischer Radius von

$$R_C \approx 8,5 \text{ cm} \quad m_C = 49 \text{ kg}. \tag{3.39}$$

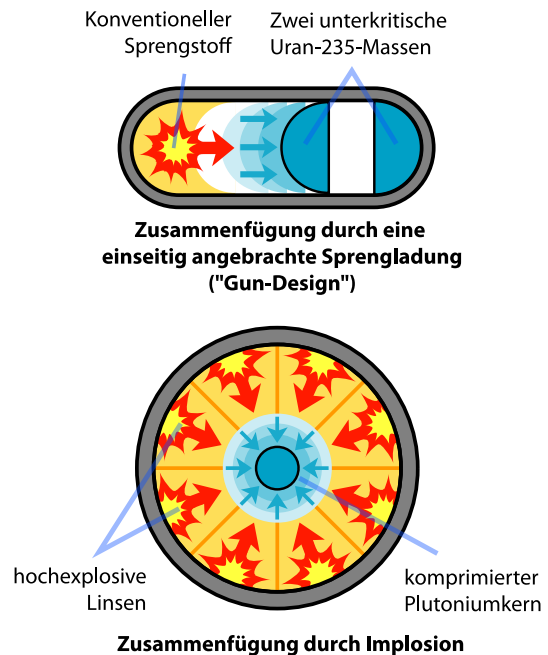
Wenn das Uran zusätzlich noch mit einem Neutronen-Reflektor umhüllt (30 cm Wasser) wird, verringert sich die kritische Masse zu  $m_C = 21,8 \text{ kg}$ .

Das Prinzip von Kernwaffen ist ziemlich einfach. Es lässt sich im Wesentlichen zwischen zwei verschiedenen Wirkungsweisen unterscheiden, welche rechts dargestellt sind [7].

Die erste Möglichkeit ist, dass zwei unterkritische Massen zusammengefügt werden, die zusammen eine überkritische Masse besitzen und eine unkontrollierte Kettenreaktion auslösen. Das Zusammenfügen wird mithilfe einer chemischen Sprengstoffladung realisiert.

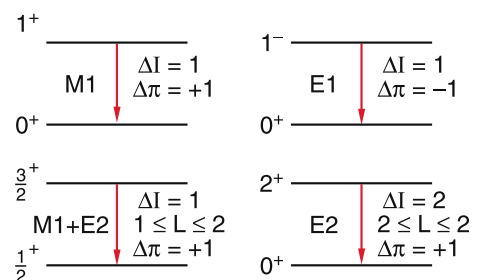
Eine weitere Variante ist, eine unterkritische Masse mithilfe einer Sprengung zu verdichten, was ebenfalls zur unkontrollierten Kettenreaktion führen kann.

Teilweise werden im Inneren der Kernwaffe zusätzlich noch Materialien wie Polonium oder Beryllium verbaut, die als Neutronenquellen weitere Neutronen zur Beschleunigung der Kettenreaktion liefern.



### 3.7 Elektromagnetische Übergänge ( $\gamma$ -Strahlung)

Bei den in der Natur vorkommenden radioaktiven Substanzen findet man außer der  $\alpha$ - und  $\beta$ -Strahlung auch die Emission hochenergetischer Photonen, die  $\gamma$ -Strahlung genannt wird. Diese Strahlung tritt immer nur in Verbindung mit  $\alpha$ -,  $\beta$ -Strahlung oder Kernspaltung auf.  $\gamma$ -Strahlung entsteht, wenn ein Atomkern aus einem energetisch angeregten Zustand  $E_i$  (eng. initial) in einen tieferen Zustand  $E_f$  (eng. final) übergeht und dabei eine Drehimpulsänderung und Paritätsänderung stattfindet (siehe nebenstehende Abbildung [2]). Dieser Prozess ist völlig analog zu den Übergängen der Elektronenhülle, wo Röntgenstrahlung ausgesendet wird.



Die beobachtbaren Größen bei der  $\gamma$ -Strahlung sind:

- Energie:  $\hbar\omega = E_i - E_f$
- Übergangswahrscheinlichkeit:  $\lambda = \frac{1}{\tau}$

- Energiebreite des Zustandes  $i$ :  $\Gamma = \frac{\hbar}{\tau} = \hbar\lambda$
- Winkelverteilung bezüglich einer Vorzugsrichtung  $I_i$ .

In der klassischen Elektrodynamik kommt eine Abstrahlung von Energie zustande durch eine Änderung der Ladungs- oder Stromverteilung des Systems. Die Dipolstrahlung wird klassisch von der harmonischen Schwingung einer Ladung erzeugt. Bei Übergängen in der Atomhülle spielt nur das quantenmechanische Analogon zur Dipolstrahlung eine wesentliche Rolle. Strahlungsarten höherer Ordnung haben eine wesentlich geringere Übergangswahrscheinlichkeit und werden auch dann nicht beobachtet, wenn Dipolstrahlung nach den Auswahlregeln ( $\Delta J = 1$ ) unmöglich ist, da die Energieabgabe auch fast immer auf andere Weise erfolgen kann, beispielsweise durch Stoßprozesse.

Kernzustände hingegen stehen nur in geringer Wechselwirkung mit der Umgebung und der Kern kann seine Anregungsenergie nur durch einen elektromagnetischen Prozess als  $\gamma$ -Quant abgeben oder seine Energie auf ein Hüllenelektron übertragen (innere Konversion). Zudem kann der Kern auch kollektiv angeregt werden (Rotations- und Vibrationszustände). Aufgrund der kollektiven Anregungen sind auch große Drehimpulsänderungen möglich, wodurch der Kern seine Energie durch Multipolstrahlung höherer Ordnung abgeben kann.

Es ergeben sich nun für  $\gamma$ -Übergänge folgende Auswahlregeln:

- $I_i - I_f = l = \Delta I$
- $|I_i - I_f| \leq l \leq I_i + I_f$
- $m = m_i - m_f$ .

Dabei ist  $l, m$  die Multipolordnung der emittierten Strahlung und nicht wie in der Atomhülle die Bahndrehimpulsquantenzahl des Elektrons. Das ausgesandte  $\gamma$ -Quant muss die Drehimpulsänderung  $\Delta I$  kompensieren, indem es einen entsprechenden Drehimpuls  $l$  mitnimmt, welcher den Wert

$$|I| = \sqrt{l(l+1)}\hbar \quad \text{mit } l_z = m\hbar \quad (3.40)$$

besitzt.  $l$  wird ebenfalls als Multipolordnung bezeichnet und  $2^l$  ist die Multipolarität.

$l$	$2^l$	Multipolmoment
0	1	Monopol (verboten)
1	2	Dipol
2	4	Quadrupol
3	8	Oktupol

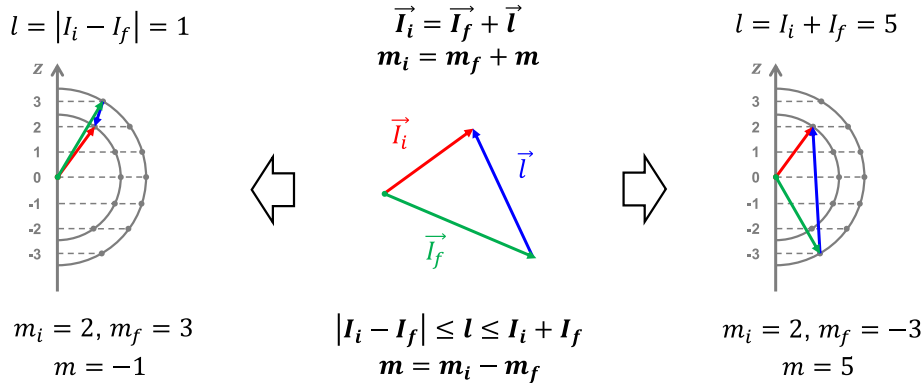
Den Übergang  $l = 0$  gibt es nicht, da das Photon einen Impuls tragen muss. Aufgrund der bosonischen Eigenschaften von Photonen müssen diese mindestens den Drehimpuls  $\hbar$  tragen.

Als Beispiel (siehe Abbildung 27) sei der Kernübergang des Zustandes  $I_i = 2$  zu  $I_f = 3$  gegeben. Nach den Auswahlregeln ergibt sich dann

$$l_{\min} = 1 \quad \text{und} \quad l_{\max} = 5. \quad (3.41)$$

Für  $m$  ergeben sich dann entsprechend die Möglichkeiten  $-l \leq m \leq l$ .

Beispiel:  $I_i = 2$  und  $I_f = 3$



**Fig. 27:** Kernübergang  $I_i = 2$  zu  $I_f = 3$ .

Tatsächlich werden fast nur Übergänge mit dem niedrigsten möglichen  $l$  beobachtet, da dort die Übergangswahrscheinlichkeit am höchsten ist.

Zwischen Ausgangs- und Endzustand kann ebenfalls eine Paritätsänderung stattfinden. Insgesamt gilt jedoch Paritätserhaltung. Je nachdem ob die Quelle der Dipolstrahlung ein schwingender elektrischer oder magnetischer Dipol ist, wird unterschieden zwischen elektrischer Dipolstrahlung  $E1$  und magnetischer Dipolstrahlung  $M1$  für die gilt

$$\begin{aligned} \text{elektrische Multipolstrahlung } \Pi_f &= (-1)^l \Pi_i \\ \text{magnetische Multipolstrahlung } \Pi_f &= (-1)^{l+1} \Pi_i. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Es gilt, dass  $M1, E2, M3, E4$  gerade Parität besitzen, während  $E1, M2, E3, M4$  ungerade Parität besitzen. Ein  $\gamma$ -Quant aus elektrischer Multipolstrahlung bewirkt also bei der Emission die gleiche Paritätsänderung wie ein Teilchen, das mit dem Bahndrehimpuls  $l$  emittiert wird.

Die quantenmechanische Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten ist recht schwierig, weshalb hier nur das Ergebnis präsentiert wird. Meist geht man davon aus, dass nur ein einzelnes Proton seinen Quantenzustand ändert und Strahlung verursacht. Es ergibt sich<sup>1</sup>

$$\lambda_{i \rightarrow f} = \frac{8\pi(l+1)}{l\hbar[(2l+1)!!]^2} \left(\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)^{2l+1} |\langle i|M_{lm}|f\rangle|^2. \quad (3.43)$$

<sup>1</sup>Es bedeutet  $5!! = 1 \cdot 3 \cdot 5$  und  $6!! = 2 \cdot 4 \cdot 6$ .



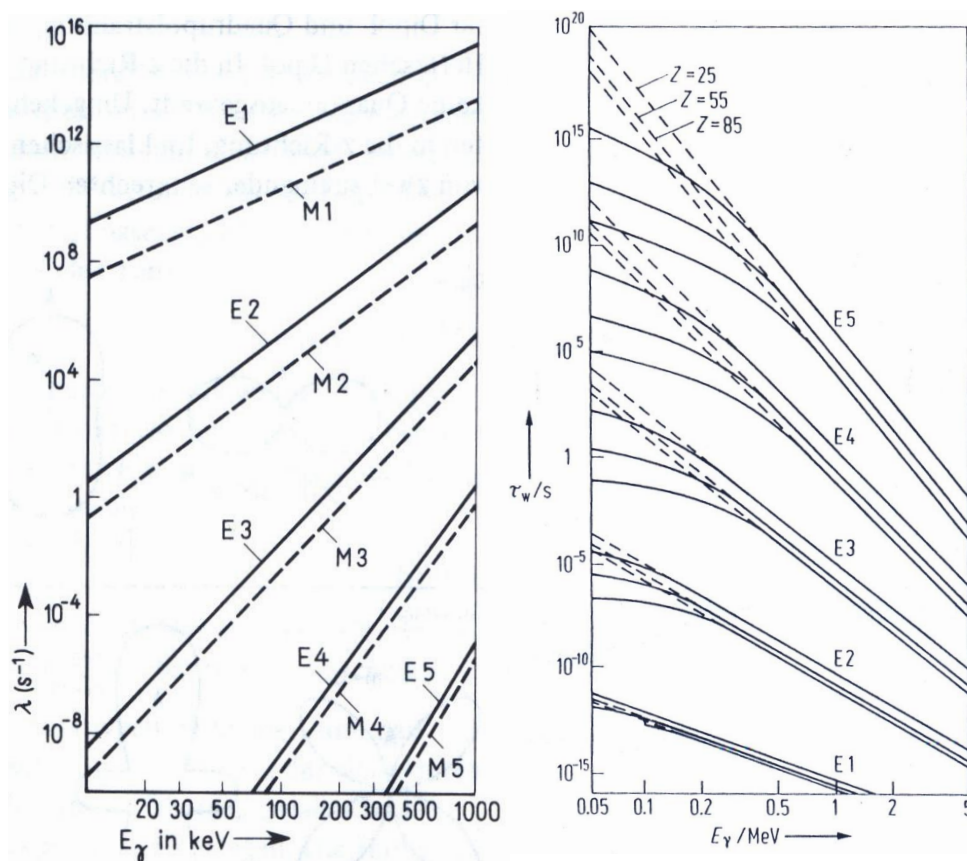
Eine Abschätzung zur einfacheren Berechnung des Übergangsmatrixelementes hat WEISSKOPF durchgeführt. Er nahm an, dass statt der Kollektivanregung nur eine Einteilchenanregung wie im Schalenmodell der Atomhülle stattfindet und es ergab sich

$$\lambda_E = \frac{1}{\tau_E} \sim E_\gamma^{2l+1} A^{2l/3}$$

$$\lambda_M = \frac{1}{\tau_M} \sim E_\gamma^{2l+1} A^{2(l-1)/3}$$
(3.44)

Aus der Gleichung lässt sich zwar direkt die Abhängigkeit von  $E_\gamma$  und  $A$  ablesen, aber nicht die Abhängigkeit von  $l$ . Es ergeben sich nun einige Konsequenzen:

- $\frac{\lambda_E}{\lambda_M} = 4.5 \cdot A^{1/3}$ :  $\tau_M \gg \tau_E$   
Die Übergangswahrscheinlichkeit ist für magnetische Übergänge geringer.
- Die Übergangswahrscheinlichkeit steigt für höhere Energie.
- Die Übergangswahrscheinlichkeit fällt extrem für höhere Ordnungen.



**Fig. 28:** WEISSKOPF-Abschätzung für  $A = 100$ . Links [4] ist die Übergangswahrscheinlichkeit und rechts [8] die Lebensdauer dargestellt.

In Abbildung 28 ist rechts in gestrichelten Linien die theoretische Lebensdauer dargestellt und in durchgezogenen Linien die experimentellen Daten. Bei sehr niedrigen Energien und



hohen Lebensdauern findet ein Abknicken der Lebensdauer statt. Das deutet daraufhin, dass es zum  $\gamma$ -Zerfall noch einen Alternativprozess gibt.

### Innere Konversion

Ist der angeregte Ausgangszustand besonders langlebig, kann die Energie auf ein Hüllenelektron übertragen werden, was daraufhin emittiert wird. Die meisten Übergänge finden mit den Elektronen der K-Schale statt (1s), da hier die Wellenfunktion einen signifikanten Überlapp mit dem Kern aufweist (siehe Bild rechts [2]).

Die Energie des emittierten Elektrons  $E_e$  ergibt sich dann zu

$$E_e = E_\gamma - E_B. \quad (3.45)$$

In der Schale bleibt entsprechend ein Loch übrig, welches durch äußere Elektronen aufgefüllt wird, die dann Röntgenstrahlung emittieren. Die innere Konversion ist ein Konkurrenzprozess zum  $\gamma$ -Übergang. Die Übergangswahrscheinlichkeiten werden dafür einfach addiert

$$\lambda_{\text{ges}} = \lambda_\gamma + \lambda_e. \quad (3.46)$$

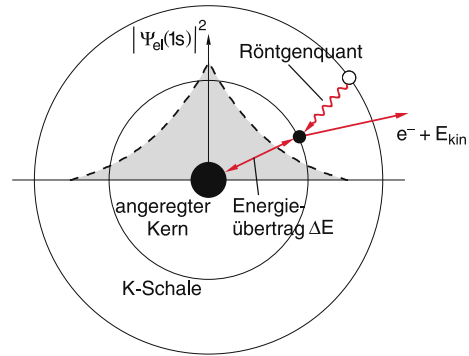
### Ausstrahlungscharakteristik der $\gamma$ -Strahlung

Ausstrahlungscharakteristik der  $\gamma$ -Strahlung bezüglich des Kernspins  $I$  lässt sich klassisch berechnen über den Poynting-Vektor, welcher sich aus den MAXWELL-Gleichungen ergibt:

$$|\mathbf{S}| = c\epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 \propto |\mathbf{L}Y_l^m|^2 \quad \text{für } Ml\text{-Strahlung} \quad (3.47)$$

$$|\mathbf{S}| = \frac{c}{\mu_0} |\mathbf{B}|^2 \propto |\mathbf{L}Y_l^m|^2 \quad \text{für } El\text{-Strahlung.} \quad (3.48)$$

Der Poynting-Vektor ist proportional zum Betragsquadrat des Impulsoperators  $\mathbf{L}$  mit den Kugelflächenfunktionen  $Y_l^m$ . Es zeigt sich, dass für magnetische und elektrische Übergänge die gleiche Proportionalität gilt. Es lässt sich also an der Winkelabhängigkeit nicht unterscheiden, ob es sich um magnetische oder elektrische Multipolstrahlung handelt.



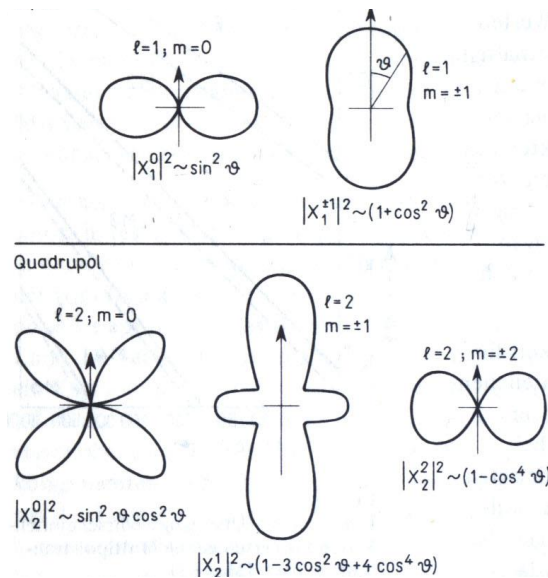


Fig. 29: Ausstrahlungscharakteristik für Dipol- und Quadrupolstrahlung aus [4].

## 3.8 Der Beta-Zerfall

### Experimentelle Beobachtungen

Außer der  $\alpha$ -Strahlung wurden bei vielen radioaktiven Substanzen auch die Emission von Elektronen  $e^-$  und Positronen  $e^+$  beobachtet, welche als  $\beta$ -Zerfall bezeichnet werden. Es tritt beim  $\beta$ -Zerfall keine Änderung der Massenzahl ( $\Delta A = 0$ ) und eine Änderung der Kernladungszahl ( $\Delta Z = \pm 1$ ) auf. Wird die Energieverteilung der Elektronen/Positronen gemessen, dann ergibt sich eine kontinuierliche Energieverteilung bis zu einer maximalen Energie  $E_{\max}$ , wie in Abbildung 30 zu sehen ist.

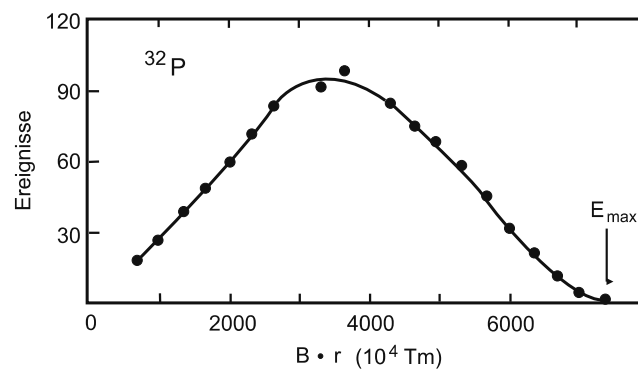
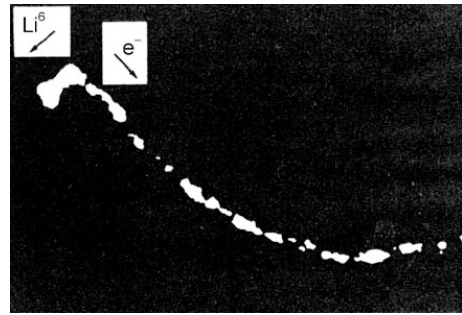


Fig. 30: Elektronenspektrum eines  $\beta$ -Zerfalls, gemessen mit einem Magnetspektrometer. Auf der Abszisse ist die magnetische Steifigkeit  $B \cdot r$  aufgetragen. Abbildung aus [3]

Hier ist der  $\beta$ -Zerfall des Nuklids  ${}_{15}^{32}\text{P}$  ( $1^+$ ) mit einer Halbwertszeit von 14,3 d aufgetragen. Der stabile Grundzustand ist  ${}_{16}^{32}\text{S}$  ( $0^+$ ). Trotz eines scharfen Energieübergangs beobachtet man ein breites Energiespektrum. Ist hier der *Energieerhaltungssatz* verletzt?

Bei einem Zweikörper-Zerfall eines ruhenden Kerns ist der Impuls des emittierten Teilchens gleich dem negativen Rückstoßimpuls des Tochterkerns. Bei Nebelkammeraufnahmen des  $\beta$ -Zerfalls von ruhenden Helium-Kernen  ${}^6_2\text{He}$  zu  ${}^6_3\text{Li}$  werden allerdings sowohl das Elektron, als auch der Lithium-Kern in den gleichen Halbraum nach unten emittiert, was einer Verletzung des *Impulserhaltung* entspricht (siehe nebenstehendes Bild [9]). In dem Experiment lag zusätzlich noch ein Magnetfeld senkrecht zur Zeichenebene an, was das Elektron auf eine Kreisbahn führt, womit man die kinetische Energie des Elektrons bestimmen konnte.



Weiterhin steht die beobachtete Kernspinänderung von  $\Delta I = 0, \pm 1$  im Widerspruch dazu, dass ein einzelnes Elektron oder Positron emittiert wurde, denn Elektronen als Fermionen besitzen einen Spin von  $s = \frac{1}{2}\hbar$ . Bedeutet das also, dass auch die *Drehimpulserhaltung* verletzt wurde?

### Neutrino Hypothese (Pauli, 1930)

Zur Rettung der fundamentalen Erhaltungssätze postulierte PAULI, dass beim  $\beta$ -Zerfall zusätzlich ein weiteres Teilchen, was er zunächst als Neutron bezeichnete. In einem offenen Brief an die *Gruppe der Radioaktiven bei der Gauvereins-Tagung zu Tübingen* schrieb er:

Liebe Radioaktive Damen und Herren,  
 Wie der Überbringer dieser Zeilen, den ich huldvollst anzuhören bitte, Ihnen des näheren auseinandersetzen wird, bin ich angesichts der "falschen" Statistik der N- und Li-6 Kerne, sowie des kontinuierlichen beta-Spektrums auf einen verzweifelten Ausweg verfallen um den "Wechselsatz" der Statistik und den Energiesatz zu retten. Nämlich die Möglichkeit, es könnten elektrisch neutrale Teilchen, die ich Neutronen nennen will, in den Kernen existieren, welche den Spin  $1/2$  haben und das Ausschließungsprinzip befolgen und sich von Lichtquanten außerdem noch dadurch unterscheiden, dass sie nicht mit Lichtgeschwindigkeit laufen. Die Masse der Neutronen müsste von derselben Größenordnung wie die Elektronenmassen sein und jedenfalls nicht größer als  $0,01$  Protonenmassen. Das kontinuierliche beta-Spektrum wäre dann verständlich unter der Annahme, dass beta-Zerfall mit dem Elektron jeweils noch ein Neutron emittiert würde derart, dass die Summe der Energien von Neutronen und Elektronen konstant ist.

Da das Neutron erst 1932 von CHADWICK entdeckt wurde, erhielt das von PAULI postulierte Teilchen später den Namen *Neutrino* für *kleines Neutron*. Er folgerte, dass Neutrinos keine Ladung besitzen, Energie- und Impuls tragen, den Spin  $1/2$  besitzen, sich nicht mit der Lichtgeschwindigkeit bewegen, kein magnetisches Moment aufweisen, eine kleine Ruhemasse besitzen und zum Neutrino  $\nu$  aus Symmetriegründen ein Antiteilchen  $\bar{\nu}$  existiert. Die Suche nach den Neutrinos bleibt lange Zeit erfolglos, da sie elektrisch neutral sind und eine kleine Masse besitzen. Zudem weisen sie einen extrem kleinen Wirkungsquerschnitt mit anderer Materie auf.

### Direkter Neutrino Nachweis

Erst 25 Jahre nach dem Postulat von PAULI gelang 1955 der experimentelle Nachweis durch REINES und COWAN. Zum Nachweis von Antineutrinos wird die Reaktion

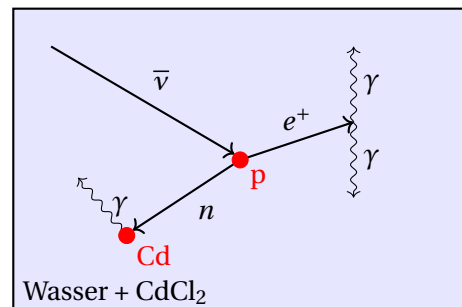


benutzt, bei der ein Antineutrino von einem Proton in einer  $\text{H}_2\text{O} + \text{CdCl}_2$ -Lösung eingefangen wird, dass sich dabei in ein Neutron umwandelt und ein Positron aussendet (inverser Beta-Zerfall).

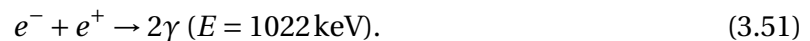
Die Wahrscheinlichkeit für den Einfang des Antineutrinos wird durch einen großen Wassertank erhöht. Das entstehende Neutron wird vom gelösten Cadmium durch die Kernreaktion



eingefangen. Der entstehende  $\gamma$ -Quant lässt sich leicht mit Detektoren detektieren.

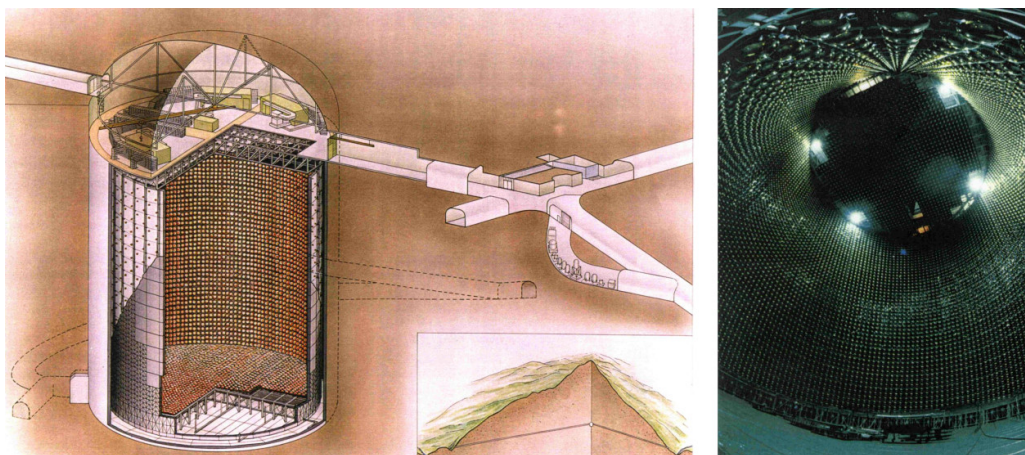


Das entstehende Positron vernichtet mit einem Elektron zu zwei weiteren Gamma-Quanten der Energie 511 keV



Zum Nachweis dieses Prozesses müssen sowohl die  $\gamma$ -Quanten aus der Positronenvernichtung, als auch der  $\gamma$ -Quant aus der Cd-Reaktion nachgewiesen werden.

Im Laufe der Zeit wurden verschiedene Experimente zum Nachweis von Neutrinos aufgebaut. Eines davon ist das Experiment *Super-Kamiokande* in Japan. Dort wurde ein Tank in einen Berg eingebaut um Sternenneutrinos von Supernovae Explosionen nachzuweisen. Eine schematische Darstellung und ein Photo sind in Abbildung 31 dargestellt.



**Fig. 31:** Schematischer Aufbau (links) und Photo des Kamiokande Experiments (rechts). *Kamioka Observatory, ICRR (Institute for Cosmic Ray Research), The University of Tokyo.*

In dem Tank befinden sich über 2000 Tonnen Wasser mit insgesamt 1100 Detektoren. Im Jahr 1986 wurden die ersten Experimente durchgeführt. Hier wurde ein Neutrinoschauer einer Super-Nova Explosion am 10. März 1987 nachgewiesen. Von insgesamt  $10^{16}$  Treffern wurde nur zwölf Stück nachgewiesen. Man konnte dadurch die Neutrinomasse auf  $< 24\text{ eV}$  abschätzen.

### Zerfallstypen

Beim  $\beta$ -Zerfall lassen sich zwei verschiedene Zerfallstypen unterscheiden:

$$\beta^-: n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu} \quad (3.52)$$

$${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + e^- + \bar{\nu}. \quad (3.53)$$

Der  $\beta^-$ -Zerfall des Neutrons ( $t_{1/2} \approx 10\text{ min}$ ) ist ein natürlich vorkommender Zerfallsprozess. Das liegt, daran, dass die Masse des Neutrons größer als die des Protons ist, und dieser Zerfall energetisch günstig ist. Der Grund, warum hier ein Antineutrino entsteht, ist begründet durch die Teilchenzahlerhaltung. Auf der linken Seite steht ein Teilchen, während auf der rechten Seite zwei Teilchen entstehen, zum Ausgleich muss das entstehende Neutrino ein Antiteilchen sein. Zudem gibt es den  $\beta^+$ -Zerfall:

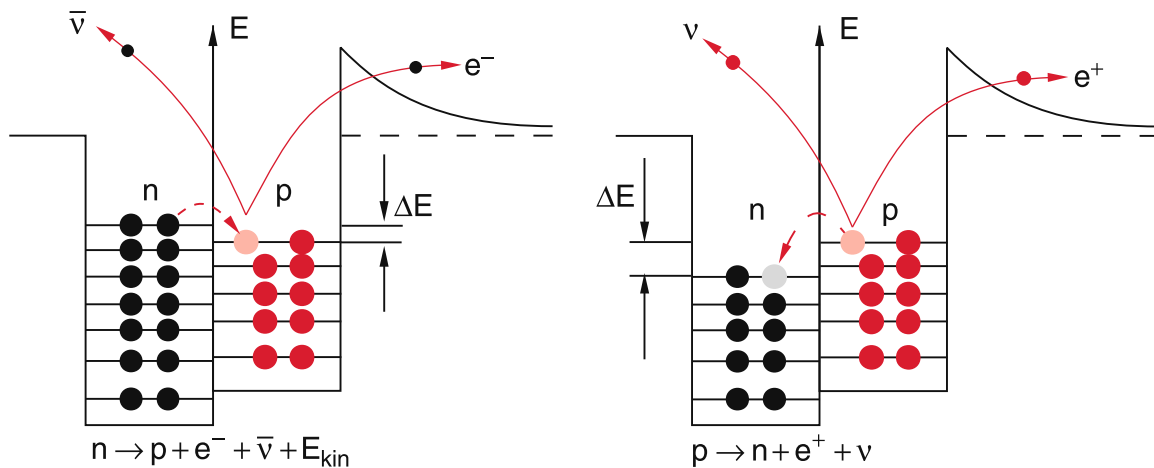


Fig. 32: Links:  $\beta^-$ -Zerfall (Elektronenemission).

Rechts:  $\beta^+$ -Zerfall (Positronenemission). Abbildungen aus [2].

$$\beta^+: p \rightarrow n + e^+ + \nu \quad (3.54)$$

$${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-1} Y + e^+ + \nu. \quad (3.55)$$

Der Zerfall eines Wasserstoff-Kerns ist energetisch nicht möglich, da das Proton die geringere Masse hat. Im Kern können die Energieverhältnisse jedoch einen  $\beta^+$ -Zerfall möglich machen. Da hier ein Neutron und ein Positron entstehen, ist die Massenbilanz (unter Vernachlässigung der Neutrinomasse) gleich

$$\Delta m = +2m_e \Rightarrow \Delta E > 1,022\text{ MeV}. \quad (3.56)$$

Ein Alternativprozess zum  $\beta$ -Zerfall stellt der Elektroneneinfang (electron capture) dar. Hierbei wird ein Hüllenelektron vom Kern eingefangen und es entsteht ein Neutron



Das Elektron stammt dabei meistens aus der 1s-Schale, weil dort die Wellenfunktion am Kernort  $|\Psi(0)|^2$  signifikant von Null verschieden ist. Die Reaktionsprodukte tragen nun die Energie und den Impuls, der zur Erfüllung der Erhaltungssätze notwendig ist.

### Form des Elektronenspektrums (1933, Fermi)

Die Form des Elektronenspektrums lässt sich mithilfe Fermis goldener Regel mithilfe von zeitabhängiger Störungsrechnung 1. Ordnung berechnen:

$$N(p) dp = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \Psi_f | H | \Psi_i \rangle|^2 \frac{dn}{dE_0}. \quad (3.58)$$

Dabei bezeichnet  $N(p) dp$  die Wahrscheinlichkeit, dass ein Elektron in einem Impulsintervall  $[p, p + dp]$  emittiert wird. Das Skalarprodukt mit dem Störoperator  $H$  stellt das entsprechende Matrixelement für den Übergang vom Anfangszustand  $\Psi_i$  zum Endzustand  $\Psi_f$  dar und  $\frac{dn}{dE_0}$  beschreibt die Dichte der Endzustände.

Die Übergangsrates ist direkt mit der Halbwertszeit verknüpft:

$$\int_0^E N(p) dp dE = \frac{1}{\tau} = \lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}. \quad (3.59)$$

Das Matrixelement nimmt nun folgende Form an:

$$|\langle \Psi_f | H | \Psi_i \rangle|^2 = g^2 |\Psi_{el}(0)|^2 |\Psi_\nu(0)|^2 |M|^2. \quad (3.60)$$

Dabei bezeichnet  $g$  die Kopplungskonstante durch die im folgenden Abschnitt beschriebene *schwache Wechselwirkung*. Die Quadrate der Wellenfunktionen geben die Wahrscheinlichkeiten an, das Elektron und Neutrino am Kernort zu finden sind und  $|M|^2$  ist das Matrixelement des Kerns. Eine längere Rechnung führt schließlich zu dem Ausdruck

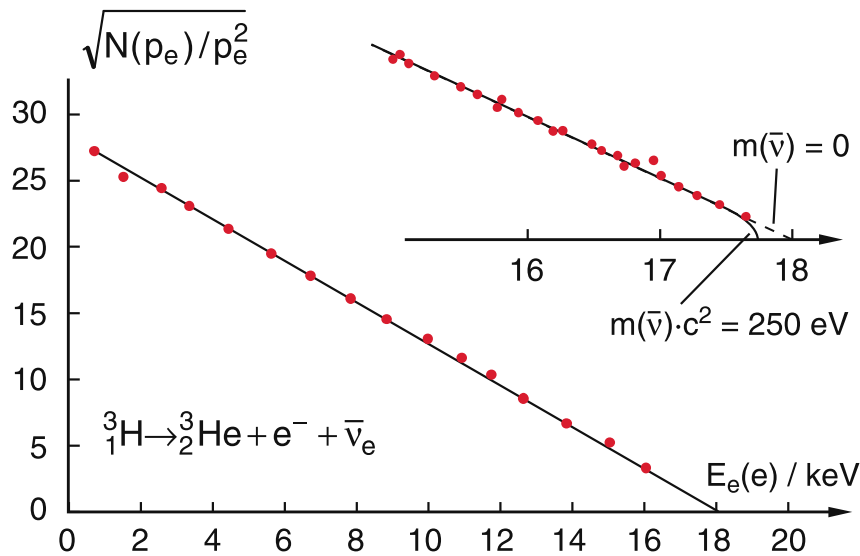
$$N(p) dp = \frac{1}{2\pi^3 \hbar^7 \cdot c^3} g^2 |M|^2 p_{el}^2 (E_0 - E_{el})^2 \cdot dp_{el}. \quad (3.61)$$

Es zeigt sich, dass die Zählrate am Anfang  $\sim p_{el}^2$  und am Ende  $\sim (E_0 - E_{el})^2$  des Impulsspektrums des Elektrons quadratisch verläuft. Deshalb wird das Impulsspektrum (ebenfalls das Energiespektrum) nicht linear, sondern quadratisch aufgetragen und es ergibt sich die in Abbildung 33 Darstellung für das Energiespektrum, welches sich über den relativistischen Ansatz

$$E = \sqrt{p_e^2 + c^2 + (m_e c^2)^2} \quad (3.62)$$

aus dem Impulsspektrum ermitteln lässt. Da das Neutrino ebenfalls eine Masse besitzt, wird





**Fig. 33:** FERMI-CURIE-Diagramm für den  $\beta^-$ -Zerfall des Tritiums  ${}^3_1\text{H}$  aus dem Jahr 1993. Hier wurde die Masse des Neutrinos auf unter 250 eV abgeschätzt. Abbildung aus [2].

der maximale Impuls niemals erreicht und man beobachtet ein Abknicken des Graphen. Aus dem Abknickpunkt lässt somit die Energie und die Masse des Neutrinos abschätzen. Aktuelle Messungen zeigen, dass die Masse des Neutrinos

$$m_\nu < 0,1 \text{ eV} \tag{3.63}$$

beträgt.

### Helizitätsexperimente

Die Helizität (Erwartungswert des Spins in Impulsrichtung) beschreibt die Ausrichtung des Impulses  $\mathbf{p} = m_e \mathbf{v}$  des emittierten Elektrons gegenüber seines intrinsischen Spins

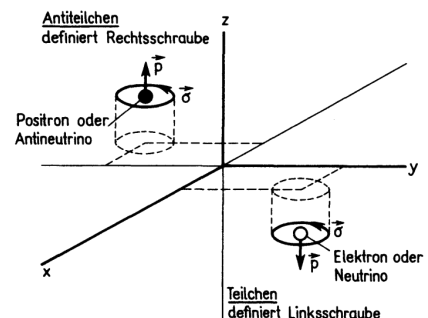
$$\mathcal{H} = \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{s}| \cdot |\mathbf{v}|}. \tag{3.64}$$

Sind Impuls und Spin in die gleiche Richtung gerichtet, so ergibt sich eine “Rechtsschraube”

$$\begin{aligned} \uparrow \mathbf{p}, \quad \uparrow \mathbf{s} & \text{ Rechtsschraube } \mathcal{H} = +1 \\ \uparrow \mathbf{p}, \quad \downarrow \mathbf{s} & \text{ Linksschraube } \mathcal{H} = -1. \end{aligned} \tag{3.65}$$

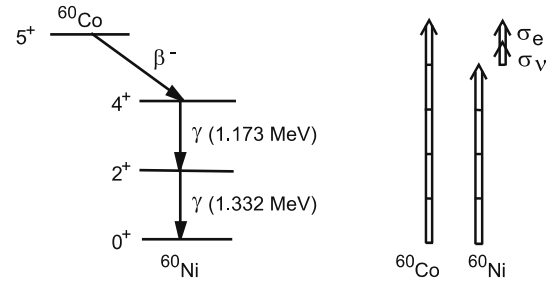
Gilt nun Paritätserhaltung, so muss der Erwartungswert der pseudoskalaren Größe der Helizität verschwinden.

Ein Verschwinden des Erwartungswert bedeutet, dass beim  $\beta$ -Zerfall die gleiche Anzahl an rechtsdrehenden und linksdrehende Elektronen emittiert werden. Dann führt eine Punktspiegelung des Raumes zum gleichen Ergebnis und die Parität ist erhalten (Bild rechts [4]).

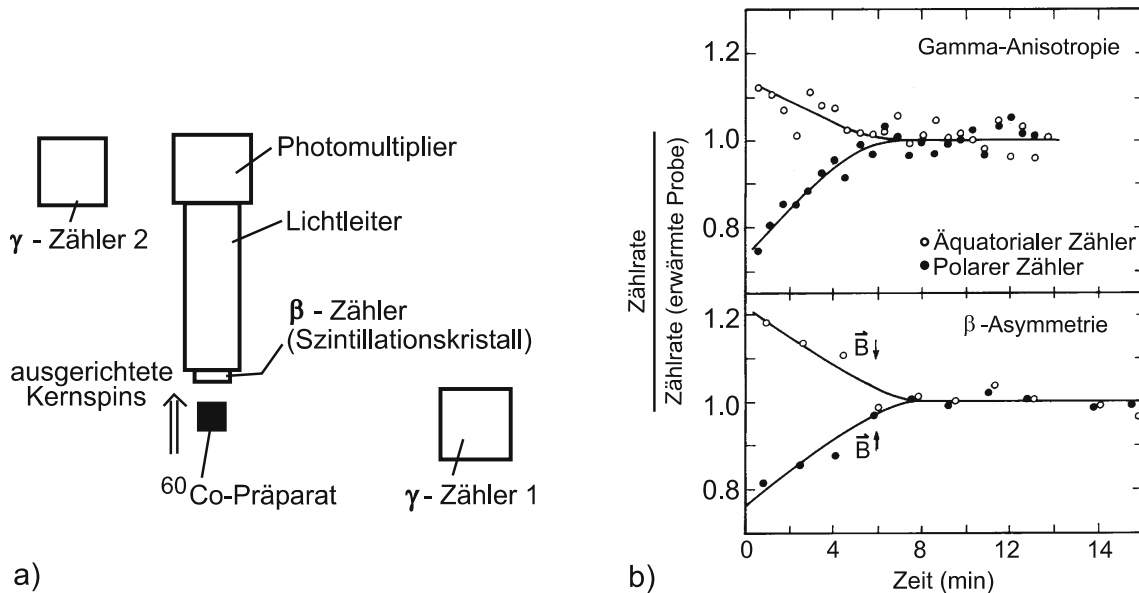


Jedoch wird beim  $\beta$ -Zerfall das Gegenteil beobachtet und die Spiegelsymmetrie verletzt. Es werden überraschender Weise nur Elektronen mit negativer Helizität  $\mathcal{H} = -1$  beobachtet. Der Spin der Elektrons zeigt immer in eine Richtung entgegengesetzt zu seiner Geschwindigkeit.

Experimentell wurde diese Beobachtung im Jahr 1956 von WU durchgeführt. Dort wurde der  $\beta^-$ -Zerfall des  $^{60}_{27}\text{Co}$  zu  $^{60}_{28}\text{Ni}$  beobachtet (Abbildung rechts [4]). Dabei findet eine Änderung des Spins von +5 zu +4 statt.



Durch Anlegen eines Magnetfeldes wurden die Spins von  $^{60}_{27}\text{Co}$  ausgerichtet. Dafür sind extrem tiefe Temperaturen im Bereich von mK nötig. Weiterhin wurden zur Prüfung der Spinausrichtung noch zwei  $\gamma$ -Zähler verwendet, um die Ausstrahlungscharakteristik der  $\gamma$ -Übergänge beim Übergang in den Grundzustand von  $^{60}_{28}\text{Ni}$  messen.



**Fig. 34:** a.) Experimentelle Anordnung des WU-Experiments.  
 b.) Messergebnisse als Funktion der Zeit (Erwärmung der Probe). Abbildung aus [3].

Beim Ausmessen der Emissionsrichtung ergab sich, dass tatsächlich alle im Magnetfeld ausgerichteten Co-Atome nur Elektronen in eine Richtung emittieren und nicht gleichverteilt in zwei entgegengesetzte Richtungen.



### Schwache Wechselwirkung

Tritt eine Verletzung der Symmetrie auf, muss eine neue fundamentale Kraft eingeführt werden. Für die Beschreibung der Verletzung der Spiegelsymmetrie beim  $\beta$ -Zerfall wurde die schwache Wechselwirkung eingeführt.

Die *schwache Wechselwirkung* ist schwierig zu verstehen, denn sie ist weder eine anziehende oder abstoßende Kraft, sondern wandelt Teilchen ineinander um. Im Fall des  $\beta$ -Zerfalls werden Neutronen in Protonen umgewandelt

$$n \rightarrow p \quad (\text{udd}) \rightarrow (\text{uud}), \quad (3.66)$$

indem ein Down-Quark in ein Up-Quark umgewandelt wird.

Weiterhin kann die schwache Wechselwirkung Quark-Antiquark Paare oder Lepton-Antileptonen Paare (z. B. Positron-Elektron Paar) erzeugen.

Die Austauschteilchen der schwachen Wechselwirkung sind die  $W^\pm$  oder  $Z^0$ -Bosonen, je nachdem ob Ladung getragen wird ( $W^\pm$ ) oder nicht ( $Z^0$ ). Diese Austauschteilchen haben eine Masse von etwa 80 GeV und haben aufgrund ihrer bosonischen Natur einen Spin von  $\hbar$ .

Weiterhin ist die schwache Wechselwirkung sehr kurzreichweitig, mit einer Reichweite von  $\approx 10^{-18}$  m.

### Zusammenfassung der fundamentalen Kräfte:

Wechselwirkung	Kraft	Stärke	Reichweite	Austauschteilchen
Stark	Kern-	1	$10^{-15}$ m	Gluon
EM-WW	COULOMB-	$\alpha = \frac{1}{137}$	$\infty$	Photon
Schwach	$\beta$ -Zerfall	$10^{-6}$	$10^{-18}$ m	$W^\pm, Z^0$
Gravitativ	Gravitations-	$6 \cdot 10^{-39}$	$\infty$	Gravitationswellen

## 4 Elementarteilchen

Das heutige Standardmodell umfasst insgesamt 12 verschiedene Materieteilchen, sowie fünf Austauschteilchen.

### Materieteilchen

Die zwölf Materieteilchen des Standardmodells fassen die Quarks und Leptonen zusammen. Dabei handelt es sich jeweils um Fermionen mit dem Spin  $1/2\hbar$ . Zudem lassen sie sich nach drei verschiedenen Generationen klassifizieren, wobei mit den Generationen die Ruhemasse der Elementarteilchen zunimmt.

Aus heutiger Sicht werden die Materieteilchen als nahezu punktförmig betrachtet, da ihr Radius jeweils kleiner als  $10^{-18}$  m ist. Weiterhin existiert zu jedem Teilchen ein entgegengesetzt geladenes Antiteilchen mit sonst den identischen Eigenschaften.

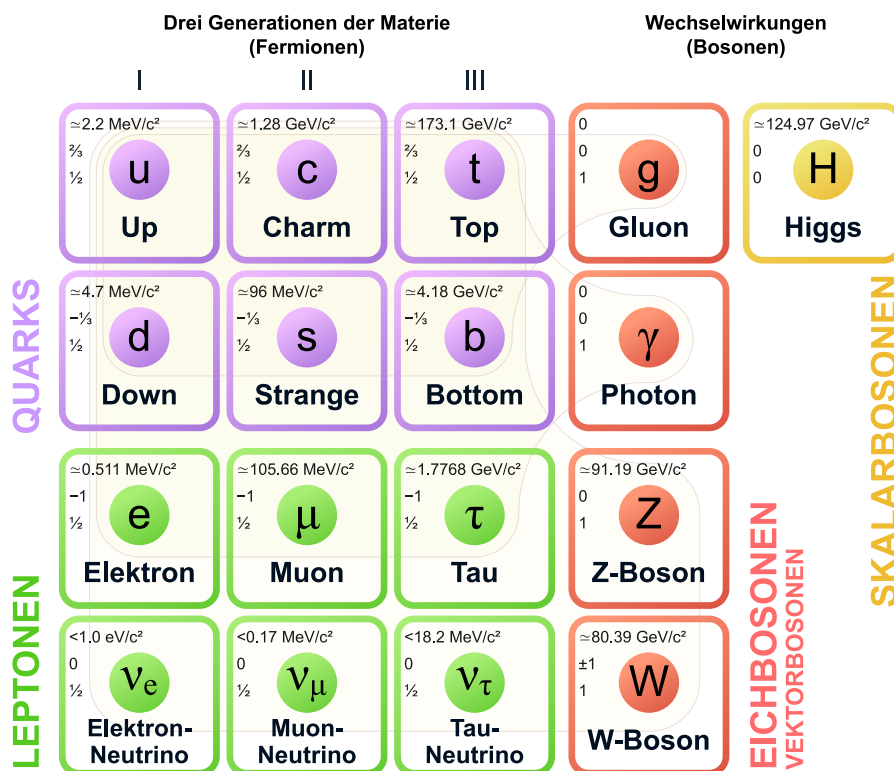


Fig. 35: Das Standardmodell der Teilchenphysik aus [10].

### Austauschteilchen

Bei den Austauschteilchen handelt es sich immer um Bosonen mit dem Spin  $\hbar$ . Sie vermitteln (ausgenommen das HIGGS-Boson mit Spin 0) die Wechselwirkungen zwischen den Materieteilchen. Das HIGGS-Boson wird benötigt, um den  $Z^0$ - und  $W$ -Bosonen eine Masse zu verleihen.

### Quarks

Quarks sind dadurch ausgezeichnet, dass sie alle Wechselwirkungen spüren. Daraus folgt direkt, dass sie ebenfalls alle eine Ladung  $q \neq 0$  besitzen. Die drei Generationen von Quarks lassen sich zu Dubletten zusammenfassen. Diese lauten:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} q = +2/3 \cdot e \\ q = -1/3 \cdot e \end{array} \quad (4.1)$$

Weiterhin besitzen alle Quarks eine Masse  $m$ , den Spin  $s = 1/2\hbar$ , ein magnetisches Moment  $\mu$ , sowie eine Farbe (rot, grün, blau). Die abstrakte Eigenschaft der Farbe beschreibt die *Ladung* der *starken Wechselwirkung*.

Quark	Symbol	Q (e)	m (GeV/c <sup>2</sup> )	s	B	Flavour				Farbe
						C'	S'	T'	B'	
Up	<b>u</b>	+2/3	0.002	1/2	+1/3	0	0	0	0	$r, g, b$
Down	<b>d</b>	-1/3	0.005	1/2	+1/3	0	0	0	0	$r, g, b$
Charme	<b>c</b>	+2/3	1.3	1/2	+1/3	1	0	0	0	$r, g, b$
Strange	<b>s</b>	-1/3	0.1	1/2	+1/3	0	-1	0	0	$r, g, b$
Top	<b>t</b>	+2/3	173	1/2	+1/3	0	0	1	0	$r, g, b$
Bottom	<b>b</b>	-1/3	4.2	1/2	+1/3	0	0	0	-1	$r, g, b$
Anti-Up	<b><math>\bar{u}</math></b>	-2/3	0.002	1/2	-1/3	0	0	0	0	$\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$
Anti-Down	<b><math>\bar{d}</math></b>	+1/3	0.005	1/2	-1/3	0	0	0	0	$\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$
Anti-Charme	<b><math>\bar{c}</math></b>	-2/3	1.3	1/2	-1/3	-1	0	0	0	$\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$
Anti-Strange	<b><math>\bar{s}</math></b>	+1/3	0.1	1/2	-1/3	0	+1	0	0	$\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$
Anti-Top	<b><math>\bar{t}</math></b>	-2/3	173	1/2	-1/3	0	0	-1	0	$\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$
Anti-Bottom	<b><math>\bar{b}</math></b>	+1/3	4.2	1/2	-1/3	0	0	0	+1	$\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$

**Fig. 36:** Eigenschaften der Quarks und Antiquarks. Aus *Wikimedia Commons, Juli 2014*.

Freie Quarks wurden bisher noch nicht beobachtet. Einige Theorien besagen, dass Quarks nur in Bindungszuständen vorkommen können. Quarks können auf zwei verschiedene Arten (stabile) Bindungen eingehen:

- *Baryonen:*  $|q_1, q_2, q_3\rangle$  z. B. Proton: (uud), Neutron: (udd)
- *Mesonen:*  $|q_1, \bar{q}_1\rangle$  z. B. Pion  $\pi^+$ : (u $\bar{d}$ ), Pion  $\pi^-$ : (d $\bar{u}$ ).

Die Struktur der Protonen und Neutronen lässt sich mithilfe der Ladung von Up- und Down-Quark erklären. Die Kombination (uud) ergibt dann eine Gesamtladung  $q = \frac{4}{3}e - \frac{1}{3}e = e$ , was der Protonenladung entspricht, während die Kombination (udd) eine Gesamtladung von Null aufweist. Die Substruktur des Neutrons besteht also aus geladenen Elementarteilchen, die zu den beobachteten, abnormalen magnetischen Momenten führt.

Baryonen und Mesonen werden unter dem Begriff der *Hadronen* (griech. stark, fest) zusammengefasst, da sie alle Teilchen bilden, die der starken Wechselwirkung unterliegen.

Die Baryonenzahl  $B$  ist eine Erhaltungsgröße und hat, wie in Tabelle 36 dargestellt, für alle Quarks den Wert 1/3. Erstaunlicherweise existieren keine der folgenden Zustände:

- $|q_1, q_2\rangle$

- $|q_1, q_2, \bar{q}_3\rangle$
- $|q_1, q_2, q_3, q_4\rangle$

Um dies zu erklären, wurde die zusätzliche Eigenschaft der Farbe eingeführt. Den Quarks können die Farben (r,g,b) zugeordnet werden. Für Hadronen wird nun folgende Bedingung aufgestellt:

$$\boxed{\text{Hadronen sind farbneutral.}} \tag{4.2}$$

Es muss also bei einem Hadron immer eine farbneutrale Situation oder *weiß* herauskommen.

- Baryonen: rot, grün, blau  $\Rightarrow$  *weiß*
- Mesonen: rot, antirot  $\Rightarrow$  *weiß*

**Leptonen** (griech. schwach)

Der wesentliche Unterschied zu den Quarks ist, dass Leptonen nicht der starken Wechselwirkung unterworfen sind. Zudem besitzen die Neutrinos keine Ladung und unterliegen deshalb auch nicht der elektromagnetischen Wechselwirkung. Leptonen lassen sich ebenfalls wieder in drei Dublette einteilen:

$$\begin{pmatrix} e^- \\ \nu_e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu^- \\ \nu_\mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tau^- \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} q = -e \\ q = 0 \end{matrix} \tag{4.3}$$

Lepton	Symbol	Q (e)	m (MeV/c <sup>2</sup> )	s	Leptonenzahl			
					L <sub>e</sub>	L <sub>μ</sub>	L <sub>τ</sub>	L
Elektron-Neutrino	$\nu_e$	0	$< 2 \times 10^{-6}$	1/2	1	0	0	1
Elektron	$e^-$	-1	0.51	1/2	1	0	0	1
Myon-Neutrino	$\nu_\mu$	0	$< 0.19$	1/2	0	1	0	1
Myon	$\mu^-$	-1	106	1/2	0	1	0	1
Tauon-Neutrino	$\nu_\tau$	0	$< 18.2$	1/2	0	0	1	1
Tauon	$\tau^-$	-1	1777	1/2	0	0	1	1
Elektron-Anti-Neutrino	$\bar{\nu}_e$	0	$< 2 \times 10^{-6}$	1/2	-1	0	0	-1
Positron	$e^+$	+1	0.51	1/2	-1	0	0	-1
Myon-Anti-Neutrino	$\bar{\nu}_\mu$	0	$< 0.19$	1/2	0	-1	0	-1
Anti-Myon	$\mu^+$	+1	106	1/2	0	-1	0	-1
Tauon-Anti-Neutrino	$\bar{\nu}_\tau$	0	$< 18.2$	1/2	0	0	-1	-1
Anti-Tauon	$\tau^+$	+1	1777	1/2	0	0	-1	-1

**Fig. 37:** Eigenschaften der Leptonen und Antileptonen. Aus *Wikimedia Commons, Juli 2014*.

Leptonen besitzen ebenso wie Quarks eine Masse  $m$ , einen Spin  $s = 1/2\hbar$ , ein magnetisches Moment  $\mu$ , allerdings besitzen sie keine Farbe. Weiterhin ist die Leptonenzahl  $L$  eine Erhaltungsgröße.

## Wechselwirkungen

Alle vier verschiedenen Arten von Wechselwirkungen erfolgen durch den Austausch eines Teilchens. Fünf von diesen Teilchen wurden in das Standardmodell aufgenommen.

- *Elektromagnetische Wechselwirkung*: Das Austauscheteilchen ist das Photon  $\gamma$ . Bei dem Abstoß zweier Elektronen wird beispielsweise ein virtuelles Photon ausgetauscht. Die EM-WW wird mithilfe der Quantenelektrodynamik (QED) beschrieben.
- *Starke Wechselwirkung*: Hier fungiert das Gluon  $g$  als Austauscheteilchen. Das Gluon trägt ein Farb-Antifarb-Paar und kann die Farbe der Quarks ändern. Beschrieben wird die starke WW durch die Quantenchromodynamik (QCD).
- *Schwache Wechselwirkung*: Die Austauscheteilchen der schwachen Wechselwirkung sind die  $Z^0$ - und  $W$ -Bosonen. Im Gegensatz zu den masselosen Photonen und Gluonen, besitzen die Austauscheteilchen der schwachen Wechselwirkung aufgrund ihrer Wechselwirkung mit dem HIGGS-Feld eine Masse.
- *Gravitation*: Das Austauscheteilchen der Gravitation, das Graviton (Gravitationswelle), ist nicht im Standardmodell enthalten, da es selbst einen Spin von  $2\hbar$  besitzt.

Wechselwirkung	Starke WW	Schwache WW			Elektromagnetische WW	Gravitation
Wechselwirkende Teilchen	Quarks	Quarks und Leptonen			elektrisch geladene Teilchen	alle
Wechselwirkende Eigenschaft ("Ladung")	"Farbe" (Farbladung)	Schwache Ladung			elektrische Ladung	Masse
Austauschteilchen	8 Gluonen	$Z^0$	$W^+$	$W^-$	Photon	Graviton
<b>Q (e)</b>	0	0	+1	-1	0	0
<b>m (GeV/c<sup>2</sup>)</b>	0	91	80	80	0	0
<b>Spin</b>	1	1	1	1	1	2

Fig. 38: Übersicht der vier verschiedenen Wechselwirkungen

## Feynman-Diagramme

Zuletzt sollen noch die berühmten Feynman-Diagramme eingeführt werden. Hier werden in einem Ort-Zeit-Diagramm die Bewegung und die Übertragung des Austauschteilchens dargestellt.

Im ersten Fall wird bei der Abstoßung zweier Elektronen ein virtuelles Photon ausgetauscht. Bei der schwachen Wechselwirkung ist der Zerfall des Myons  $\mu^-$  in ein Elektron  $e^-$  unter Austausch eines  $W^-$ -Bosons dargestellt. Bei der starken Wechselwirkung wird die Farbe eines Up- und Down-Quarks geändert, indem ein Gluon  $g_{r\bar{g}}$  ausgetauscht wird.

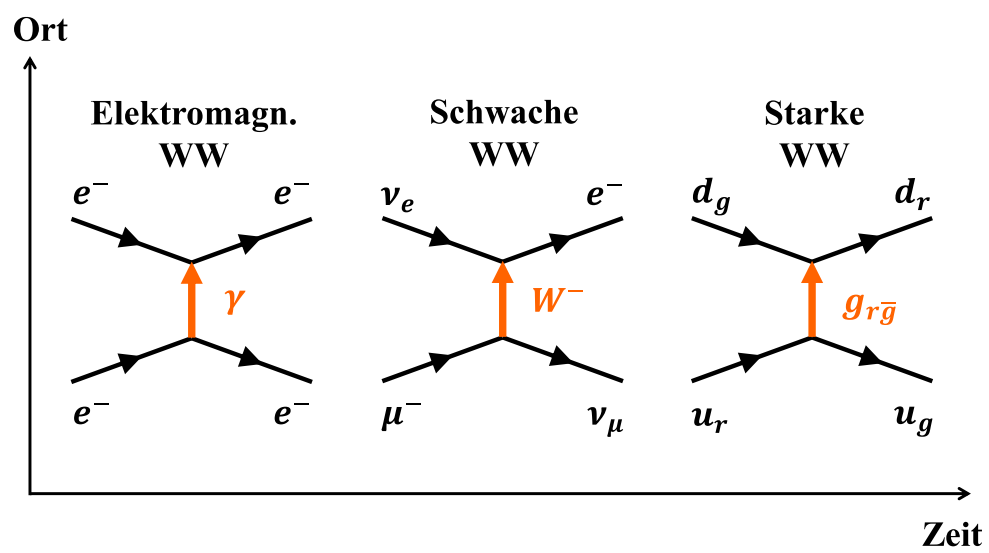


Fig. 39: Feynman-Diagramme für verschiedene Wechselwirkungen.

## Literatur

- [1] “Nuklidkarte in sgrè-darstellung.” <https://de.wikipedia.org/wiki/Nuklidkarte>. Zugegriffen: 01.08.2022.
- [2] W. Demtröder, *Experimentalphysik 4*. Springer, 2017.
- [3] K. Bethge, G. Walter, and B. Wiedemann, *Kernphysik: Eine Einführung*. Springer-Verlag, 2007.
- [4] T. Mayer-Kuckuk, *Kernphysik: Eine Einführung*. Springer-Verlag, 2013.
- [5] G. Musiol, *Kern-und Elementarteilchenphysik*. Harri Deutsch Verlag, 1995.
- [6] W. Finkelburg, *Einführung in die Atomphysik*. Springer-Verlag, 2013.
- [7] “Zusammenfügen unterkritischer massen in einer kernwaffe.” <https://de.wikipedia.org/wiki/Kernwaffe>. Zugegriffen: 01.08.2022.
- [8] L. Bergmann, C. Schäfer, and S. Blügel, *Festkörper*. Walter de Gruyter, 2005.
- [9] K. Simonyi, *Kulturgeschichte er Physik*. Budapest: Akadémiai Kiado, 1990.
- [10] “Standardmodell der teilchenphysik.” [https://de.wikipedia.org/wiki/Standardmodell\\_der\\_Teilchenphysik](https://de.wikipedia.org/wiki/Standardmodell_der_Teilchenphysik). Zugegriffen: 01.08.2022.