

FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA
PHYSIKALISCH-ASTRONOMISCHE-FAKULTÄT



**FRIEDRICH-SCHILLER-
UNIVERSITÄT
JENA**

SOMMERSEMESTER 2023

Optik und Wellen

SEMINARNOTIZEN

Inhaltsverzeichnis

1	Mathematische Grundlagen und Wellengleichung	2
1.1	Mathematische Grundlagen	2
1.2	Die Wellengleichung	4
1.3	Der Poynting Vektor	6
1.4	Laser-Grundlagen	7
2	Wechselwirkung von Licht und Materie	8
2.1	Monochromatische Felder und Suszeptibilität	8
2.2	Feldausbreitung im Material - Brechzahl	9
2.3	Felder an Grenzflächen - Fresnel Formeln	9
2.4	Lorentz-Modell	12
2.5	Kramers-Kronig Transformation	15
2.6	Doppelbrechende Materialien	16
2.7	Polarisation elektromagnetischer Felder	18
2.7.1	Polarisationszustände	18
2.7.2	Polarisierende Elemente	20
3	Geometrische Optik	22
3.1	Matrizenoptik	22
3.2	Abbildung durch eine dünne Linse	24
3.3	Hauptebenen	24
4	Beugungsphänomene	25
4.1	Berechnung des Beugungsintegrals	25
4.2	Gaußförmige Strahlen in paraxialer Näherung	26
4.3	Gauß Optik mit q -Paramtern	28
4.4	Gauß-Moden im Resonator	30
4.5	Höhere Lasermoden	32
4.6	Fraunhofer Beugung	34
4.7	Fourier Optik	37

1 Mathematische Grundlagen und Wellengleichung

Allgemeine organisatorische Informationen:

- Email: m.beyer@uni-jena.de
- Website: martin-beyer.uni-jena.de

Für die Zulassung zur Klausur gibt es folgende Voraussetzungen:

- > 50% der Maximalpunktzahl der Übungsreihen
- Mindestens eine *ganze* Aufgabe vorgerechnet

1.1 Mathematische Grundlagen

Partialbruchzerlegung

Ziel: Bei der Berechnung von Integralen möchte man in einem Nenner auftretende Polynome in ihre Linearfaktoren zerlegen, um diese leichter integrieren zu können:

- a) Spezialfall: Sei das Nennerpolynom $N(x)$ von der Form $(x - x_0)^n$, dann ist die Integration mittels geschickter Substitution einfach möglich.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{x+a} dx &= \int \frac{(z-a)^2}{z} dz = \int \left(z - 2a + \frac{a^2}{z} \right) dz \\ &= \frac{1}{2}(x+a)^2 - 2a(x+a) + a^2 \ln(x+a) + C. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Damit ergibt sich für das Osterblatt, Aufgabe 1.1:

$$\begin{aligned} \int \frac{ix-2}{x^2+2ix-1} dx &= \int \frac{ix-2}{(x+i)^2} dx = \int \frac{i(z-i)-2}{z^2} dz = \int \left(\frac{i}{z} - \frac{1}{z^2} \right) dz \\ &= i \ln(x+i) + \frac{1}{x+i} + C. \end{aligned} \quad (1.2)$$

- b) allgemeiner Fall: Für den allgemeinen Ansatz werden zunächst alle Nullstellen x_i des Nennepolynoms berechnet. Seien die Nullstellen jeweils r_i -fach, dann gilt:

$$P(x) = \sum_i \frac{a_{1i}}{(x-x_i)} + \dots + \frac{a_{r_i}}{(x-x_i)^{r_i}}. \quad (1.3)$$

Dies wird für Aufgabe 1.2 des Osterblatts beispielhaft gezeigt. Die Nullstellen sind $x_i \in \{x, x \pm 2i\}$, damit folgt der Ansatz:

$$\begin{aligned} \frac{3x^2+2x+16}{4x+x^3} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2i} + \frac{C}{x-2i} \\ \Rightarrow 3x^2+2x+16 &= A(4+x^2) + B(x^2-2ix) + C(x^2+2ix) \\ \Rightarrow 3x^2+2x+16 &= (A+B+C)x^2 + 2i(C-B)x + 4A. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert $A = 4$, $B = \frac{1}{2}(i - 1)$, $C = -\frac{1}{2}(i + 1)$. Damit folgt das Integral zu

$$\int \frac{3x^2 + 2x + 16}{4x + x^3} dx = A \ln(x) + B \ln(x + 2i) + C \ln(x - 2i) + D. \quad (1.5)$$

Für Aufgabe 1.3 lautet das Ergebnis:

$$\int \frac{2x + 2}{x^2 - 2x} dx = -\ln(x) + 3 \ln(x - 2) + C. \quad (1.6)$$

Fouriertransformation

Ziel: Berechnung der Frequenzanteile eines beliebigen Zeitsignals. Dabei definieren wir (in der Optik) die Fouriertransformation folgendermaßen:

$$\mathcal{F}[f(t)](\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{+i\omega t} dt = \tilde{f}(\omega) \quad (1.7)$$

$$\mathcal{F}[\tilde{f}(\omega)](t) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = f(t). \quad (1.8)$$

Hinweis: Für die Integration bietet es sich meist an, sin- und cos-Funktionen in ihre $\exp(\dots)$ Anteile zu zerlegen und anschließend zu integrieren.

Wir wollen im Folgenden ein paar nützliche Eigenschaften der Fouriertransformation zeigen:

- a) Fouriertransformierte der Delta-Distribution:

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \delta(t) e^{+i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} e^{i\omega 0} = \frac{1}{2\pi}. \quad (1.9)$$

Dies bedeutet, dass für ein unendlich kurzes Zeitsignal (idealer Knall) das Frequenzspektrum kontinuierlich, konstant und unendlich breit ist. Mathematisch bedeutet dies, dass unendlich viele Sinusschwingungen aller Frequenzen superponiert werden, die nur bei $t = 0$ sich konstruktiv addieren.

- b) Die Äquivalenz von der Verschiebung des Funktionswertes und einer Phasenverschiebung:

$$\mathcal{F}(f(t - \tau)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t - \tau) e^{+i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(\tilde{t}) e^{+i\omega \tilde{t} + \tau} d\tilde{t} = e^{i\omega \tau} \tilde{f}(\omega). \quad (1.10)$$

- c) Die Ableitung einer Funktion lässt sich mithilfe einer Fouriertransformation leicht auswerten. Dafür gilt nämlich:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\frac{d}{dt} f(t)\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{d}{dt} f(t)\right) e^{i\omega t} dt \\ &\stackrel{\text{P.I.}}{=} \underbrace{\frac{1}{2\pi} f(t) e^{i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - i\omega \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\omega t} dt = -i\omega \mathcal{F}[f(t)]. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Somit lässt es sich häufig im Frequenzraum leichter rechnen, da Zeitableitungen durch "i ω " ersetzt werden. Das vereinfacht bestimmte Differentialgleichungen (siehe Lorentz-Modell).

d) Für eine reelle Funktion $f(t) \in \mathbb{R}$ gilt

$$\tilde{f}(\omega)^* = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (f(t)e^{i\omega t})^* dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{i(-\omega)t} dt = \tilde{f}(-\omega). \quad (1.12)$$

Somit enthält der negative Teil des Frequenzspektrums für reelle Funktionen keine zusätzlichen Informationen und wird in der Regel weggelassen.

e) Fouriertransformation einer Faltung:

$$\mathcal{F}[f * g](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega) \cdot \mathcal{F}[g](\omega) \quad (1.13)$$

$$\text{mit } f * g(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t - \tau)g(\tau) d\tau. \quad (1.14)$$

Dies lässt sich ebenfalls durch eine einfache Substitution $\tilde{t} = t - \tau$ beweisen. Damit wird die Faltung überführt in eine Multiplikation. Dies spielt insbesondere eine Rolle bei der Einführung von Responsefunktionen zur Beschreibung der Polarisation eines Materials (siehe später).

1.2 Die Wellengleichung

Die Wellengleichung spielt in der Optik eine zentrale Rolle. Eine einfache Herleitung erfolgt über Kreuzproduktbildung im Faraday'schen Induktionsgesetz. Es folgt dann

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \vec{\nabla} \frac{\rho}{\epsilon_0} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}. \quad (1.15)$$

Der zweite Term der Inhomogenität ist für die Optik besonders interessant. Ein zeitlich veränderlicher Strom entspricht bei zeitlich konstanter Ladungsdichte einer Beschleunigung

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho \dot{\mathbf{r}}) \approx \rho \ddot{\mathbf{r}}. \quad (1.16)$$

Beschleunigte Ladungsträger strahlen elektromagnetische Wellen ab. Dieser Zusammenhang bildet bspw. die Grundlage einer Röntgenröhre. Die dabei abgestrahlte Leistung lässt sich mit der Lamor-Formel beschreiben

$$P = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3} \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^2 \quad (\text{nicht-relativistisch}) \quad . \quad (1.17)$$

Lösungen der Wellengleichung

- a) Ebene Wellen: $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \text{c.c.}$ Im Vakuum muss die Lösung die Dispersionsrelation $|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c}$ erfüllen. Weiterhin gilt $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 0$ woraus $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ folgt. Das elektrische Feld steht also senkrecht zur Ausbreitungsrichtung.
- b) Kugelwellen: $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \frac{\exp(ikr)}{r} e^{i\omega t}$.

Helmholtz-Gleichung

Die Helmholtz-Gleichung stellt einen Spezialfall für monochromatische Wellen im Vakuum dar. Dabei reduziert sich die Wellengleichung auf folgende Form:

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (1.18)$$

Für uns in der Optik ist die Wellengleichung äußerst wichtig, da sie die Ausbreitung einer monochromatischen Welle mit Ausbreitungsrichtung $\mathbf{k} = \omega/c \hat{\mathbf{e}}_k$ beschreibt. Beliebige komplizierte Felder können hierbei aufgrund des Superpositionsprinzips mittels einer Fouriertransformation in monochromatische Felder zerlegt werden und dabei für jede einzelne Feldkomponente die Helmholtz-Gleichung separat gelöst werden. Diese Idee stellt die Grundlage zur Beschreibung von Beugungsphänomenen (siehe Fresnel-Beugung oder Fraunhofer-Beugung) dar.

1.3 Der Poynting Vektor

Der Poynting Vektor ist eine Größe zur Beschreibung des Energieflusses einer elektromagnetischen Welle. Er ist definiert als

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (1.19)$$

Für die Optik interessieren uns nur nicht-magnetische Materialien (magnetische Metalle sind für die Optik relevante Frequenzen nicht transparent), weshalb die Vereinfachung $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ gerechtfertigt ist.

Um den Poynting Vektor mithilfe einer Größe (typischerweise die elektrische Feldkomponente) beschreiben zu können, werden \mathbf{E} und \mathbf{B} -Feld mithilfe des Vektorpotentials \mathbf{A} miteinander in Beziehung gesetzt

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left(\mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right) \quad \text{mit} \quad \mathbf{B} = \vec{\nabla} \times \mathbf{A} \quad \text{und} \quad \mathbf{E} = -\vec{\nabla} \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (1.20)$$

Die in der Optik üblicherweise verwendete Coulomb-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0$ ist bedingt durch die zusätzliche Annahme $\Phi = 0$ ¹. Damit lässt sich die elektrische Feldkomponente schreiben als

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}_0 &= i\mathbf{k} \times \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{E}_0 &= i\omega \mathbf{A}_0 = ik \mathbf{A}_0 c \end{aligned} \right\} \Rightarrow |\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|c \quad \text{da} \quad \mathbf{k} \perp \mathbf{A}_0. \quad (1.21)$$

Wir sehen, dass das \mathbf{B} -Feld für die Beschreibung der meisten optischen Phänomene uninteressant ist, da die magnetische Feldamplitude viel kleiner ist. Betrachten wir dazu die Wirkung einer elektromagnetischen Welle auf ein geladenes Teilchen der Ladung q . Dann gilt nämlich nach der Lorentz-Kraft

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = q|\mathbf{E}| \left(\hat{\mathbf{e}}_E + \underbrace{\frac{\mathbf{v}}{c} \times \hat{\mathbf{e}}_B}_{\ll 1 \text{ für } v \ll c} \right). \quad (1.22)$$

Die physikalische Messgröße einer elektromagnetischen Welle ist die *Intensität*. Sie ist definiert als das zeitliche Mittel $\langle \dots \rangle_T$ des Betrags vom Poynting Vektor und lässt sich berechnen zu

$$\begin{aligned} I &:= \langle |\mathbf{S}| \rangle_T = \frac{1}{\mu_0} \langle |\mathbf{E} \times \mathbf{B}| \rangle_T = \frac{1}{\mu_0} \langle |\mathbf{E}_0| \cdot |\mathbf{B}_0| \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \rangle \\ &= \frac{|\mathbf{E}_0|^2}{\mu_0 c} \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) dt}_{=1/2} \\ I &= \frac{\epsilon_0 c}{2} |\mathbf{E}_0|^2 \quad \text{mit} \quad c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Normalerweise zeigen Ausbreitungsrichtung $\mathbf{k} \propto \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ und Poynting Vektor $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ in die gleiche Richtung. Dies ist in anisotropen Medien nicht mehr der Fall, da hier die Maxwell-Gleichungen $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{D} = 0 \Rightarrow \mathbf{k} \propto \mathbf{D} \times \mathbf{H}$ erfüllen und i. A. $\mathbf{D} \nparallel \mathbf{E}$ ist. Damit stimmt die Richtung des Energieflusses und die Ausbreitungsrichtung der Welle nicht mehr überein. Dieses Phänomen wird *spatial walk off* genannt.

¹Siehe hierfür: Elektrodynamik - Tutoriumsnotizen, Seite 56f.

1.4 Laser-Grundlagen

Ein großes Anwendungsgebiet der Optik stellt die Laserphysik dar. Daher wollen wir uns im Folgenden ein Grundverständnis für den Aufbau und die Funktionsweise eines Lasers erarbeiten. Dabei steckt die gesamte Beschreibung schon in der Bedeutung des Akronyms:

LASER: Light Amplification by stimulated Emission of Radiation .

In einem Laser wird somit mithilfe stimulierter Emission Licht verstärkt. Dieser Prozess ist essentiell zum Erreichen der speziellen Eigenschaften von Laserstrahlung:

- hohe Kohärenz (feste Phasenbeziehungen zwischen verschiedenen Orten des Wellenfeldes) \Rightarrow Voraussetzung für Interferenz
- Monochromatisch (geringe Linienbreite)
- hohe Spitzenintensitäten und geringe Divergenz
- Möglichkeit zur Erzeugung ultrakurzer Pulse im Bereich von Femtosekunden.

Schematischer Aufbau eines Lasers

1. **aktives Medium:** Hier findet die Lichtverstärkung statt. Hier wird durch die erzeugte Strahlung des Lasers eine von der Pumpquelle induzierte Besetzungsinversion (mittels stimulierter Emission) abgebaut.
Typische aktive Medien: HeNe Gasmisch, Titan-Saphir TiSa, CO₂, Yb:YAG, Nd:YAG, Yb:FP15, Nd:YLF, Farbstoffe
2. **Pumpquelle:** Hiermit wird die Energie bereitgestellt um eine Besetzungsinversion im aktiven Medium aufzubauen.
Beispiele: Blitzlampen, Laserdiode, Gasentladung durch Anlegen einer Spannung, Verwendung eines anderen Lasers
3. **Resonator:** Rückkopplung der erzeugten Strahlung. Sorgt für das charakteristische Strahlprofil und die hohe Kollimation. Auf diesen Teil eines Lasers werden wir im Verlauf der Vorlesung noch näher eingehen.

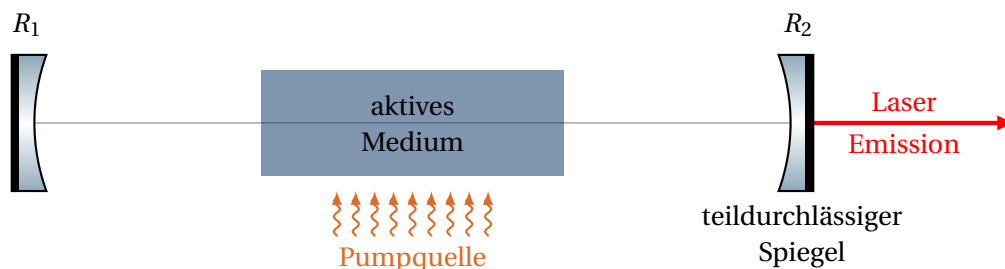


Fig. 1: Schematischer Aufbau eines Lasers mit Resonatorspiegeln mit Krümmungsradius R_1 und R_2 . Die Energie wird über einen teildurchlässigen Resonatorspiegel ausgekoppelt.

2 Wechselwirkung von Licht und Materie

Zur Beschreibung der optischen Eigenschaften von Materie benötigen wir eine Formulierung der Maxwellgleichungen im Material, wobei sich die inhomogenen Gleichungen verändern zu

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{ext.}} \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j}_{\text{ext.}} \quad (2.1)$$

Hierbei beschreiben die Ladungsdichten $\rho_{\text{ext.}}$ und Stromdichten $\mathbf{j}_{\text{ext.}}$ nicht mehr die gesamten Quellterme, sondern nur externe Quellen, die nicht vom Medium stammen. Alle mikroskopischen/induzierten Ströme \mathbf{j}_{ind} und Polarisationsladungen ρ_{ind} wurden dabei mithilfe der Polarisation und Magnetisierung zusammengefasst

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) &:= \sum \frac{\text{elektrische Dipolmomente}}{\text{Volumen}} & \text{mit} \quad \vec{\nabla} \cdot \mathbf{P} &= -\rho_{\text{ind}} \\ \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) &:= \sum \frac{\text{magnetische Dipolmomente}}{\text{Volumen}} & \text{mit} \quad \vec{\nabla} \times \mathbf{M} &= \mathbf{j}_{\text{ind}} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Für den Fall nicht-magnetischer Materialien ergibt sich der bekannte Zusammenhang $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \mathbf{j}$. Die räumlich gemittelten E - und B -Felder lassen sich mit der Material-Response nun verbinden zu den oben genannten Feldern über

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \text{und} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) := \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}. \quad (2.3)$$

2.1 Monochromatische Felder und Suszeptibilität

Die folgende Beschreibung für die Response eines Materials gilt nur für monochromatische Felder mit

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}(\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}). \quad (2.4)$$

In den Maxwellgleichungen werden die Zeitableitungen einfach mit dem Faktor $-i\omega$ ersetzt. Unter der Annahme fehlender externe Quellen ergibt sich

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{D} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \times \mathbf{H} = -i\omega \mathbf{D}. \quad (2.5)$$

Zur Charakterisierung der Polarisation nehmen wir an, dass die Polarisationskomponenten P_i i. A. mithilfe eines Tensors zweiter Stufe $\hat{\chi}$ schreibbar sind als

$$P_i(\omega, \mathbf{r}) = \varepsilon_0 \sum_{j=1}^3 \chi_{ij} E_j + \varepsilon_0 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k. \quad (2.6)$$

Dabei nehmen wir der Einfachheit halber einen linearen Zusammenhang zwischen Polarisation und elektrischer Feldstärke an. Man spricht deshalb auch von *linearer Optik*. Höhere Ordnungen der Feldstärke werden im Bereich der nichtlinearen Optik diskutiert.

Mit der Definition der dielektrischen Verschiebung \mathbf{D} lässt sich dann folgendes schreiben:

$$\mathbf{D}(\omega, \mathbf{r}) = \varepsilon_0 (1 + \hat{\chi})(\omega, \mathbf{r}) \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) = \varepsilon_0 \hat{\varepsilon}(\omega, \mathbf{r}) \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}). \quad (2.7)$$

2.2 Feldausbreitung im Material - Brechzahl

Zur Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen im Material schauen wir und noch einmal die Wellengleichung an:

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \\ \xrightarrow{\partial/\partial t \rightarrow -i\omega} \Delta \mathbf{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} &= -\mu_0 \omega^2 \epsilon_0 \chi \mathbf{E} = -\frac{\omega^2}{c^2} \chi \mathbf{E} \\ \Rightarrow \Delta \mathbf{E} + \frac{\epsilon^2}{c^2} \omega^2 \mathbf{E} &= 0.\end{aligned}\quad (2.8)$$

Die Wellengleichung nimmt die gleiche Form wie im Vakuum an, außer dass die Lichtgeschwindigkeit um den Faktor

$$\sqrt{\epsilon} = \frac{c}{c_{\text{medium}}} =: n \quad (2.9)$$

modifiziert wurde. Die Größe n bezeichnet die dimensionslose Brechzahl und ist i. d. R. positiv.

Seminar 3 Ende (28.04.2023)

2.3 Felder an Grenzflächen - Fresnel Formeln

In der Vorlesung wurden bereits Stetigkeitsbedingungen für das elektrische Feld und das Magnetfeld an einer Grenzfläche hergeleitet. Sie lauten:

$$E_{\parallel,1} = E_{\parallel,2} \quad \text{und} \quad H_{\parallel,1} = H_{\parallel,2}. \quad (2.10)$$

Aus diesen Gleichungen folgten die bekannten Formeln für das Reflexions- und Brechungsgesetz. Allerdings fehlt in der Vorlesung noch eine entscheidene Beschreibung zur Charakterisierung eines Lichtstrahls an einer Grenzfläche: Das Reflexions- und Transmissionsverhalten. Die dafür notwendigen Formeln werden *Fresnel Formeln* genannt und beschreiben jeweils die Reflektivität R und Transmissivität T einer (schräg) einfallenden Welle an einer Grenzfläche. Die Geometrie des Problems ist in Abbildung 2 dargestellt.

Zur Bestimmung des Transmissions- und Reflexionsverhaltens werden Koeffizienten für Reflexion (r) und Transmission (t) eingeführt

$$r = \frac{E_R}{E_{\text{in}}} \quad \text{und} \quad t = \frac{E_T}{E_{\text{in}}}. \quad (2.11)$$

Dabei sind die Koeffizienten für verschiedene Eingangspolarisationen unterschiedlich. Wir wollen die beiden Koeffizienten für den Fall von s -polarisiertem Licht (ebene Wellen $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t))$) im Folgenden herleiten. Die Stetigkeitsbedingungen 2.10 liefern uns

$$\begin{aligned}E_{\text{in}} + E_R &= E_T \quad \text{und} \quad H_{\text{in},x} + H_{R,x} = H_{T,x} \\ 1 + r &= t.\end{aligned}\quad (2.12)$$

s-Polarisation: $\mathbf{E} \perp$ Einfallsebene

$$\mathbf{E}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{H}_s = \begin{pmatrix} H_x \\ 0 \\ H_y \end{pmatrix} \text{ TE-Welle}$$

p-Polarisation: $\mathbf{E} \parallel$ Einfallsebene

$$\mathbf{E}_p = \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix}, \mathbf{H}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ H \\ 0 \end{pmatrix} \text{ TM-Welle}$$

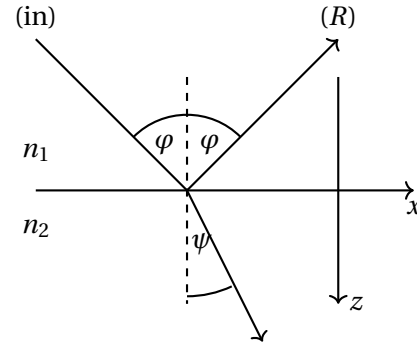


Fig. 2: Geometrie für den schrägen Einfall eines Lichtstrahls auf eine Grenzfläche. Wir unterscheiden hierbei zwischen den Polarisationsarten s und p .

Zur Auswertung der H -Felder nutzen wir das Induktionsgesetz

$$\underbrace{\vec{\nabla} \times \mathbf{E}}_{i\mathbf{k} \times \mathbf{E}} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = i\omega\mu_0 \mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{H} = \frac{n}{c\mu_0} \hat{\mathbf{e}}_k \times \mathbf{E} \quad \text{wobei} \quad \frac{\mathbf{k}}{\omega} = \frac{n}{c} \hat{\mathbf{e}}_k. \quad (2.13)$$

Die Einheitsvektoren der verschiedenen Strahlen können aus Abbildung 2 abgelesen werden zu:

$$\hat{\mathbf{e}}_{\text{in}} = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 0 \\ \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{e}}_R = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 0 \\ -\cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{e}}_T = \begin{pmatrix} \sin \psi \\ 0 \\ \cos \psi \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Nun rechnen wir mithilfe von Gleichung (2.13) die einzelnen H -Feldkomponenten aus

$$\begin{aligned} H_{\text{in},x} &= \frac{n_1}{c\mu_0} \left[\begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 0 \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ E_{\text{in}} \\ 0 \end{pmatrix} \right]_x = -\frac{n_1}{\mu_0 c} \cos \varphi E_{\text{in}} \\ H_{R,x} &= \frac{n_1}{c\mu_0} \left[\begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 0 \\ -\cos \varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ E_R \\ 0 \end{pmatrix} \right]_x = +\frac{n_1}{\mu_0 c} \cos \varphi E_R \\ H_{T,x} &= \frac{n_2}{c\mu_0} \left[\begin{pmatrix} \sin \psi \\ 0 \\ -\cos \psi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ E_T \\ 0 \end{pmatrix} \right]_x = +\frac{n_2}{\mu_0 c} \cos \psi E_T. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Setzen wir diese Ergebnisse in Gleichung (2.12) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} n_1 \cos \varphi E_{\text{in}} - n_1 \cos \varphi E_R &= n_2 \cos \psi E_T \\ \Rightarrow n_1 \cos \varphi - n_1 \cos \varphi r &= n_2 \cos \psi t = n_2 \cos \psi (1 + r) \\ \Rightarrow n_1 \cos \varphi - n_2 \cos \psi &= (n_1 \cos \varphi + n_2 \cos \psi) r \\ \Leftrightarrow 2n_1 \cos \varphi &= (n_1 \cos \varphi + n_2 \cos \psi) t. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Wir können das nun nach t und r auflösen und erhalten damit die *Fresnel-Gleichungen*. Analog können wir die Herleitung für p -Polarisation durchführen, was uns dann auf folgende Formeln führt:

Fresnel Gleichungen für den schrägen Einfall

$$\begin{aligned}
 r_s &= \frac{n_1 \cos \varphi - n_2 \cos \psi}{n_1 \cos \varphi + n_2 \cos \psi} & \text{and} & & t_s &= \frac{2n_1 \cos \varphi}{n_1 \cos \varphi + n_2 \cos \psi} \\
 r_p &= \frac{n_2 \cos \varphi - n_1 \cos \psi}{n_2 \cos \varphi + n_1 \cos \psi} & \text{and} & & t_p &= \frac{2n_1 \cos \varphi}{n_2 \cos \varphi + n_1 \cos \psi}.
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$

Möchte man aus den Koeffizienten nun die Reflektivität R und Transmissivität T ausrechnen, so ergibt sich

$$R = \frac{I_{R,\perp}}{I_{in,\perp}} = \left| \frac{E_R}{E_{in}} \right|^2 = |r|^2 \quad \text{und} \quad T = \frac{I_{T,\perp}}{I_{in,\perp}} = \frac{n_2 \cos \psi}{n_1 \cos \varphi} |t|^2.
 \tag{2.18}$$

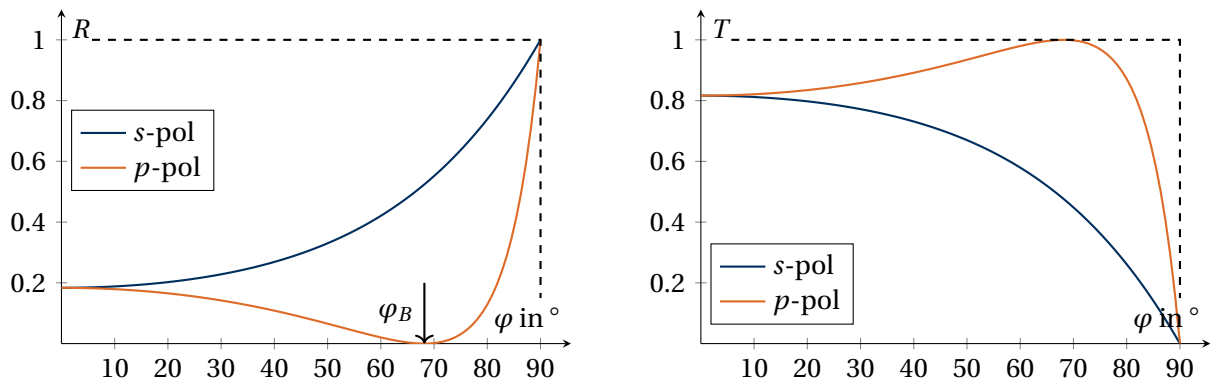


Fig. 3: Transmission $T = 1 - R$ and Reflektion $R = |r|^2$ für zwei Medien mit $n_1 = 1$ und $n_2 = 2.5$ für p - und s -Polarisation. For die Berechnung kann man $\cos \psi = \sqrt{1 - (\frac{n_1}{n_2} \sin \varphi)^2}$ mithilfe des Brechungsgesetzes von Snell benutzen.

2.4 Lorentz-Modell

In der Vorlesung wurde das Lorentz-Modell zur Beschreibung der Polarisation von Dielektrika mithilfe einer gedämpften (Dämpfungsterm γ), erzwungenen Schwingung mit Rückstellkraft des Kerns beschrieben und hergeleitet.

Spezialfall: Metalle

Ergänzend zur Übung schauen wir uns die entsprechende Differentialgleichung für Metalle an. Da die Elektronen im Metall von den Atomrümpfen losgelöst sind und sich frei im Leitungsband bewegen können, vernachlässigen wir den Term der Rückstellkraft in der Beschreibung des Oszillatormodells. Die Auslenkung \mathbf{d} ergibt sich dann als

$$m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{d} + m\gamma \frac{d}{dt} \mathbf{d} = q\mathbf{E}. \quad (2.19)$$

Identifizieren wir nun die Polarisation wieder als $\mathbf{P} = Nq\mathbf{d}$, wobei N die Elektronendichte beschreibt, so erhalten mithilfe der Fouriertransformation

$$\mathcal{F} \left[\frac{d}{dt} \mathbf{P} \right] (\omega) = -i\omega \tilde{\mathbf{P}}(\omega). \quad (2.20)$$

Damit vereinfacht sich die DGL zu

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{P}(t) + \gamma \frac{d}{dt} \mathbf{P}(t) &= \frac{q^2 N}{m} \mathbf{E} \\ -\omega^2 \tilde{\mathbf{P}}(\omega) - i\gamma\omega \tilde{\mathbf{P}}(\omega) &= \frac{q^2 N}{m} \tilde{\mathbf{E}}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Mit $\tilde{\mathbf{P}}(\omega) = \epsilon\epsilon_0 \tilde{\mathbf{E}}$ folgt dann für die Suszeptibilität

$$\tilde{\mathbf{P}} = -\frac{q^2 N}{m} \frac{1}{\omega^2 + i\gamma\omega} \Rightarrow \chi(\omega) = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega} \quad \text{mit} \quad \omega_p^2 = \frac{q^2 N}{\epsilon_0 m}. \quad (2.22)$$

Damit folgt für die Dielektrizitätskonstante

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega} = 1 - \underbrace{\frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2}}_{\epsilon'} + i \underbrace{\frac{\gamma\omega_p^2}{\omega^3 + \gamma^2\omega}}_{\epsilon''}. \quad (2.23)$$

Wir bemerken, dass für $\omega < \omega_p$ die Dielektrizitätskonstante kleiner Null ist $\epsilon < 0$. Das bedeutet, die Wellen werden exponentiell gedämpft und an der Metalloberfläche tritt Totalreflexion auf. Der physikalische Hintergrund ist, dass für Frequenzen unterhalb der Plasmafrequenz ω_p die Elektronen dem optischen Feld folgen und das elektrische Feld im Metall abschirmen. Für Frequenzen oberhalb der Resonanzfrequenz des Metalls können die Elektronen dem optischen Feld nicht mehr folgen und die Abschirmung bricht zusammen.

Warum beschreibt ε'' Absorption im Material?

In der Vorlesung wurde bereits gezeigt, dass der Imaginärteil der Suszeptibilität für eine nichtverschwindende Divergenz des Poynting-Vektors sorgt, was mit Absorption im Material korrespondiert. Im Folgenden wollen wir uns nochmal eine einfache mathematische Variante anschauen, um den Zusammenhang von Imaginärteil der Suszeptibilität mit Absorption zu verstehen.

Sowohl Brechzahl $\hat{n} = n + i\kappa$, als auch Dielektrizitätskonstante $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$ sind komplexe Größen. Mithilfe von $\hat{n}^2 = \varepsilon$ lassen sich Real- und Imaginärteil der Dielektrizitätszahl ausdrücken als

$$\varepsilon' = n^2 - \kappa^2 \quad \text{und} \quad \varepsilon'' = 2n\kappa \sim \kappa. \quad (2.24)$$

Nehmen wir nun wieder die Lösung der inhomogenen Helmholtzgleichung im Material (2.8) als ebene Welle (mit Ausbreitungsrichtung z) an, dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{i\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}z} = \mathbf{E}_0 e^{i\frac{\omega}{c}(n+i\kappa)z} \\ &= \mathbf{E}_0 \underbrace{e^{i\frac{\omega}{c}nz}}_{\text{Schwingung}} \underbrace{e^{-\frac{\omega}{c}\kappa z}}_{\text{Dämpfung}}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Wir sehen daran ganz leicht, dass der Imaginärteil der Brechzahl für eine exponentielle Dämpfung der Welle sorgt. Die Intensität ergibt sich dann zu

$$I \propto |\mathbf{E}|^2 \Rightarrow I = I_0 e^{-2\frac{\omega}{c}\kappa z} = I_0 e^{-\alpha z} \quad \text{mit} \quad \alpha = 2\frac{\omega}{c}\kappa = \frac{\omega}{nc}\varepsilon'' \quad (2.26)$$

Der letzte Term entspricht dabei dem Lambert-Beer'schen Absorptionsgesetz zur Beschreibung von Absorption im Material mit Absorptionskoeffizient α , welcher direkt vom Imaginärteil der Dielektrizitätszahl/Suszeptibilität abhängt.

Sellmeier Gleichung:

Die Sellmeier-Gleichung haben wir in den Übungsserien aus dem Lorentz-Modell unter der Annahme einer verschwindenden Dämpfung $\gamma \approx 0$ hergeleitet. Wir wollen uns im Folgenden anschauen, wie diese Gleichung für reale Materialien verwendet wird und ein paar explizite Beispiele angeben. Für reale Materialien liegt meist nicht nur eine Resonanzfrequenz vor, weshalb die Sellmeier-Gleichung verallgemeinert wird zu

$$n^2 = 1 + \sum_i \frac{B_i \lambda^2}{\lambda^2 - C_i}. \quad (2.27)$$

Für Quarzglas (engl. fused silica) sieht die Sellmeier-Gleichung² folgendermaßen aus:

$$n^2(\lambda) = 1 + \frac{0.6961663\lambda^2}{\lambda^2 - (0,0684043\mu\text{m})^2} + \frac{0.4079426\lambda^2}{\lambda^2 - (0,1162414\mu\text{m})^2} + \frac{0.8974794\lambda^2}{\lambda^2 - (9,896161\mu\text{m})^2},$$

²siehe: I. H. Malitson, "Interspecimen comparison of the refractive index of fused silica," Josa, vol. 55, no. 10, pp. 1205–1209, 1965.

wobei hier die Wellenlängen in μm eingesetzt werden müssen. Die Koeffizienten werden bestimmt, indem die Brechzahl für eine Reihe von Wellenlängen sehr genau experimentell bestimmt wird und anschließend ein Fit der Form (2.27) an die Daten angelegt wird. Im allgemeinen wird für die Sellmeier-Koeffizienten ein gewisser Gültigkeitsbereich angegeben, der hier zwischen $0,21\ \mu\text{m}$ und $6,7\ \mu\text{m}$ liegt. Ein entsprechender Plot ist in Abbildung 4 dargestellt.

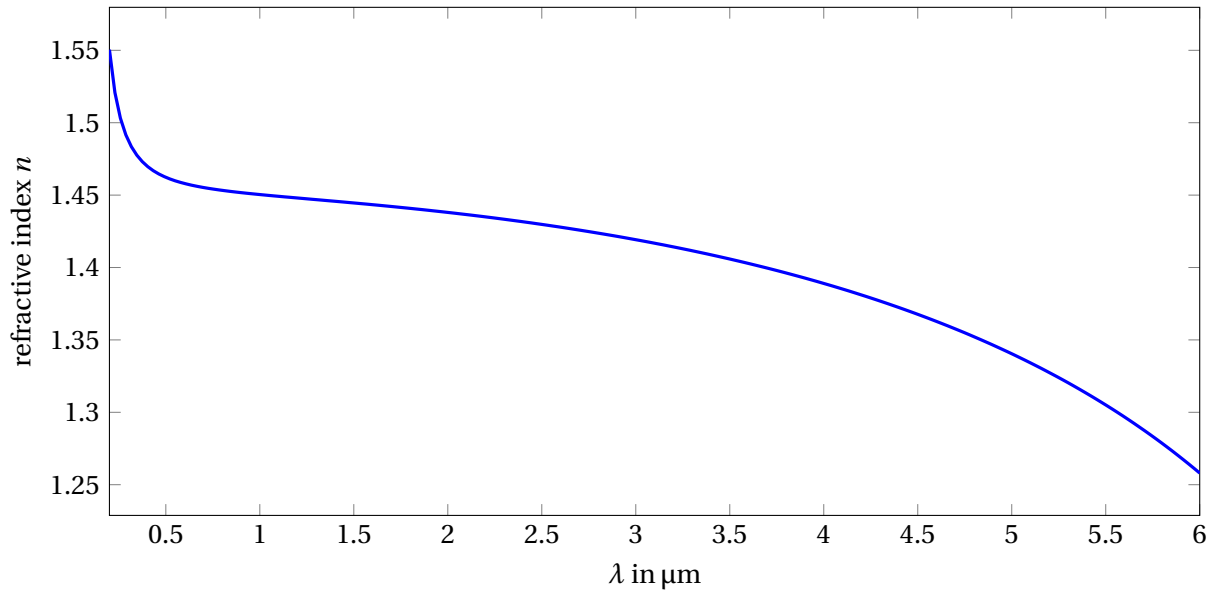


Fig. 4: Brechzahl von Fused Silica. Eine hilfreiche Website zur Darstellung von Brechzahlen verschiedener Materialien ist <https://refractiveindex.info/>.

2.5 Kramers-Kronig Transformation

Bisher haben wir die Polarisation immer nur für monochromatische Wellen im Frequenzraum betrachtet. Die zeitliche Struktur der Polarisation $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ für beliebige Felder ist etwas komplizierter. Prinzipiell kann die Polarisation von elektrischen und magnetischen Feldern an anderen Orten \mathbf{r}' und anderen Zeiten abhängen

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{E}(\mathbf{r}', t'), \mathbf{B}(\mathbf{r}', t')). \quad (2.28)$$

Zur einfachen Beschreibung nehmen wir einen vereinfachten Fall an mit folgenden Annahmen:

- keine magnetischen Effekte: $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{E}(\mathbf{r}', t'))$
- nur lokale Interaktionen: $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$
Wir schließen explizit die Ausbreitung der Polarisation im Material aus. Die Polarisation eines kleinen Bereichs im Material wird nur durch das Licht, welches auf diese Einheit wirkt, beeinflusst. Dies lässt sich dadurch begründen, dass nichtlokale Effekte auf atomarer Skala auftreten können (10^{-10} m), während jedoch die Variationen des optischen Feldes auf Skalen von (10^{-6} m) auftreten.
- Kausalität: Die Polarisation hängt nicht von Feldern aus der Zukunft ab $t' \leq t$.

Für die Polarisation finden wir dann folgenden Ausdruck:

$$\mathbf{P}(t) = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau R(\tau) \mathbf{E}(t - \tau). \quad (2.29)$$

Dabei haben wir die sogenannte Responsefunktion $R(\tau)$ eingeführt welche die Bedingung $R(t < 0) = 0$ erfüllt. Sie beschreibt das Gedächtnis des Materials und ist eine reelle Funktion.

Wir können nun versuchen einen Zusammenhang mit der Suszeptibilität herzustellen. Dazu wechseln wir mittels Fouriertransformation in den Frequenzraum und benutzen das Faltungstheorem (1.13)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}(\omega) &= \varepsilon_0 \chi(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\omega) = \varepsilon_0 \mathcal{F}[\mathbf{E}(t) * \mathbf{R}(t)] = \varepsilon_0 \mathcal{F}[\mathbf{R}(t)](\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\omega) \\ \Rightarrow \chi(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(t) e^{i\omega t} dt. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Da $R(t)$ eine reelle Funktion ist, muss nach Gleichung (1.12) die Suszeptibilitätsfunktion symmetrisch sein

$$\chi(-\omega) = \chi^*(\omega). \quad (2.31)$$

Die Kramers Kronig-Relation setzt nun $\chi(\omega)$ mit der Suszeptibilität bei anderen Frequenzen in Form einer Integralgleichung in Beziehung

$$\begin{aligned}\chi(\omega) &= \frac{1}{i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{\omega-\varepsilon} d\bar{\omega} \frac{\chi(\bar{\omega})}{\bar{\omega}-\omega} + \int_{\omega+\varepsilon}^{\infty} d\bar{\omega} \frac{\chi(\bar{\omega})}{\bar{\omega}-\omega} \right] \\ &= \frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\omega} \frac{\chi(\bar{\omega})}{\bar{\omega}-\omega},\end{aligned}\quad (2.32)$$

wobei wir hier mit \mathcal{P} den Cauchyschen Hauptwert eingeführt haben. Die Kramers-Kronig Relation ist allein noch nicht sehr nützlich, jedoch lässt sich daraus eine Beziehung für den Real- und Imaginärteil der Suszeptibilität herleiten:

$$\operatorname{Re}(\chi(\omega)) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\omega} \frac{\operatorname{Im} \chi(\bar{\omega})}{\bar{\omega}-\omega} \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(\chi(\omega)) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\omega} \frac{\operatorname{Re} \chi(\bar{\omega})}{\bar{\omega}-\omega} \quad (2.33)$$

Wir können daraus eine wichtige Erkenntnis schlussfolgern:

Die Dispersion eines Materials ($\operatorname{Re} \chi(\omega)$) ist fundamental verknüpft mit der Absorption des Materials ($\operatorname{Im} \chi(\omega)$).

Das bedeutet, dass durch eine einfache Absorptionsmessung die Dispersion des Materials bestimmt werden kann!

2.6 Doppelbrechende Materialien

Im Folgenden wollen wir noch einmal die wichtigsten Ergebnisse der Vorlesung über doppelbrechende Materialien zusammenfassen. Für ein anisotropes Medium gilt kein einfacher Zusammenhang mehr zwischen Polarisation und elektrischem Feld. Stattdessen erheben wir die Dielektrizitätszahl $\hat{\varepsilon}$ zu einem Tensor zweiter Stufe

$$D_i = \varepsilon_0 \sum_{j=1}^3 \hat{\varepsilon}_{ij} E_j \quad \text{d.h. im Allgemeinen} \quad \mathbf{D} \nparallel \mathbf{E}. \quad (2.34)$$

Wollen wir nun näherungsweise absorptionsfreie Materialien beschreiben, so lässt sich zeigen, dass der Dielektrizitätstensor hermitesch ist $\hat{\varepsilon}_{ij} = \hat{\varepsilon}_{ji}^*$. Damit sind die Eigenwerte des Tensors reell und bilden mit den Eigenvektoren eine orthogonale Basis. Damit kann $\hat{\varepsilon}$ diagonalisiert werden. Die Darstellung im Hauptachsensystem lautet dann

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Ein solcher diagonalisierbarer Tensor lässt sich geometrisch als ein Indexellipsoid beschreiben

$$\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1. \quad (2.36)$$

Das Indexellipsoid ist am Beispiel eines einachsigen Kristalls in Abbildung 5 dargestellt. Hierbei fallen zwei Brechzahlen zusammen $n_x^2 = n_y^2 = n_o^2$. Der Index "o" steht hierbei für *ordentlich*, während $n_z^2 = n_e^2$ der *außerordentliche* (extraordinary) Brechungsindex ist.

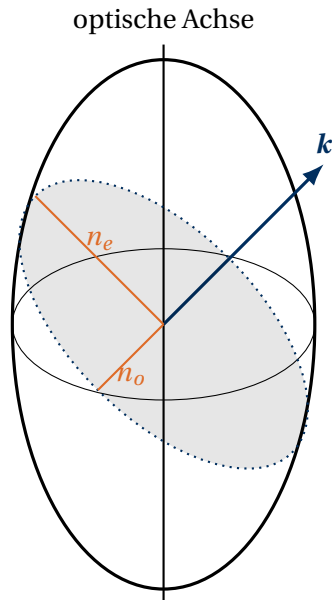


Fig. 5: Indexellipsoid eines einachsigen Kristalls.

Für eine gegebene Ausbreitungsrichtung \mathbf{k} formt die Ebene senkrecht zu \mathbf{k} eine Ellipse. Für eine gegebene Richtung entlang der Ellipse (Polarisationsrichtung), bestimmt sich die jeweilige Brechzahl durch den Abstand zum Ursprung des Koordinatensystems. Es zeigt sich beispielsweise, dass für eine Ausbreitungsrichtung parallel zur optischen Achse die Polarisationsebene zu einem Kreis entartet und die doppelbrechende Eigenschaft für unterschiedliche Polarisationsrichtungen verschwindet.

2.7 Polarisation elektromagnetischer Felder

Im Folgenden wollen wir das Kapitel über die Polarisation elektromagnetischer Felder wiederholen. Zur Vereinfachung der Berechnungen treffen wir folgende Annahmen:

- Ebene Wellen $e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$
- Homogene, transparente Materialien
- Ausbreitung in z -Richtung

Das elektrische Feld der ebenen Welle lässt sich dann im allgemeinen schreiben als

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} E_x \cos(kz - \omega t + \varphi_x) \\ E_y \cos(kz - \omega t + \varphi_y) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x \cos(\theta) \\ E_y \cos(\theta - \delta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \theta = kz - \omega t + \varphi_x. \quad (2.37)$$

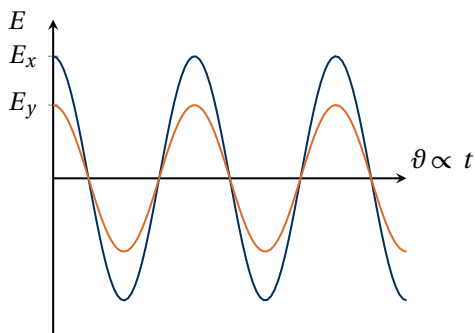
Die hier eingeführte Größe der Phasenverschiebung $\delta = \varphi_y - \varphi_x$ ist die charakteristische Größe zur Beschreibung des Polarisationszustands. Zur einfacheren Charakterisierung des Polarisationszustandes führen wir den (normierten) *Jones*-Vektor ein als

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\sqrt{E_x^2 + E_y^2}} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y e^{i\delta} \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

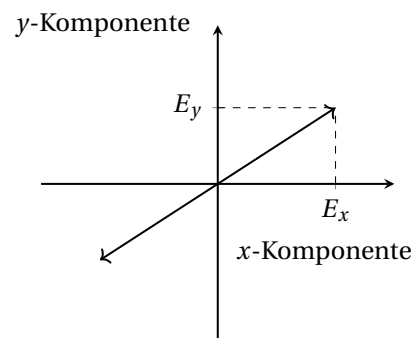
2.7.1 Polarisationszustände

Abhängig von δ können wir nun zwischen verschiedenen Polarisationszuständen unterscheiden:

Lineare Polarisation: $\delta = 0, \pi$ und $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} E_x \\ \pm E_y \end{pmatrix}$



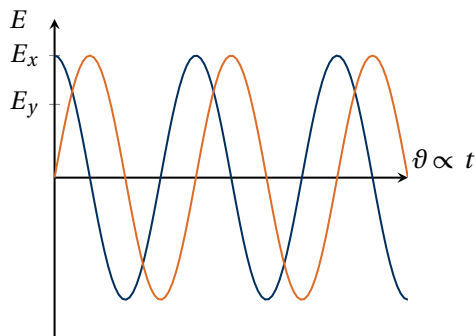
Zeitverlauf der elektrischen Feldkomponenten



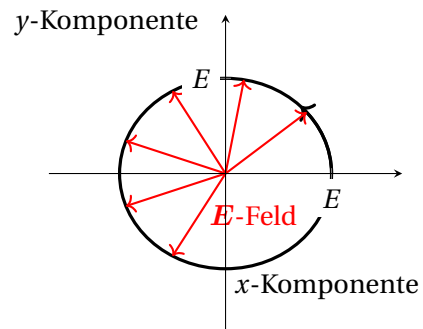
Kurve des Polarisationsvektors

Hier steht das elektrische Feld in einer einzigen Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Bezüglich einer Referenzebene (z. B. optischer Tisch oder Reflexionsebene) unterscheiden wir zwischen parallel (p) und senkrecht (s) polarisiertem Licht.

Zirkulare Polarisation $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$ und $E_x = E_y = E$ mit $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$



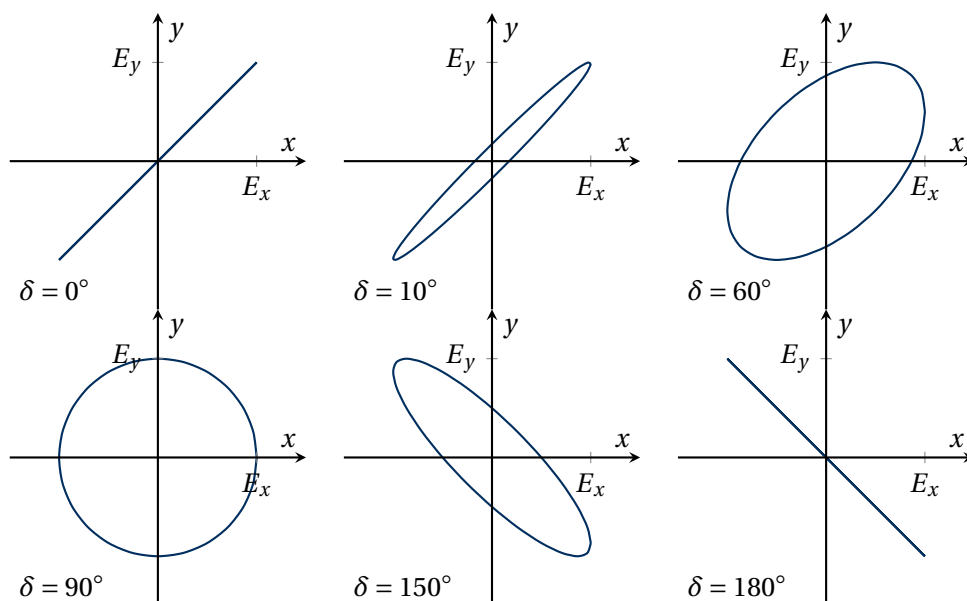
Zeitverlauf der elektrischen Feldkomponenten



Kurve des Polarisationsvektors

Hier dreht sich der elektrische Feldvektor im Kreis. Das heißt insbesondere, dass das elektrische Feld zu keiner Zeit verschwindet. Jedoch ist bei gleicher Leistung die maximale Feldamplitude kleiner als bei linear polarisiertem Licht.

Elliptische Polarisation $\delta \neq 0, \pi$ und $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y e^{i\delta} \end{pmatrix}$



Elliptische Polarisation ist der allgemeine Fall der zirkularen Polarisation. Durch Variation von δ kann die Polarisation kontinuierlich zwischen linear- und zirkular-polarisiert durchgestimmt werden.

2.7.2 Polarisierende Elemente

Im nachfolgenden sind einige polarisierende Elemente und deren mathematische Beschreibung im Jones-Kalkül dargestellt. Dabei kann man einem beliebigen optischen Aufbau eines Jones Matrix $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ zuweisen, die die Polarisation am Ausgang beschreibt.

Polarisator: $\mathbf{j}_{\text{out}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{j}_{\text{in}}$ (x -Orientierung)

Ein Polarisator transmittiert nur Licht mit einer bestimmten Polarisationsrichtung. Man kann zwischen verschiedenen Typen unterscheiden:

- Polarisationsfilter mit stark polarisationsabhängiger Absorption. Diese bestehen aus Stoffen mit anisotroper Molekülstruktur die in verschiedene Richtungen unterschiedlich gut schwingen (absorbieren). Ein berühmtes Beispiel ist der Polaroid-Filter.
- Drahtgitterpolarisator: Reflektion des elektrischen Feldes parallel zum Gitter, da hier im Draht ein Dipol angeregt wird. Hinter dem Polarisator heben sich das elektrische Feld der einfallenden Welle und das Feld des Dipols auf.
- Polarisierender Strahlteiler: Räumliche Trennung der Polarisationsrichtungen durch einen anisotropen Kristall. Dabei werden meist zwei Kristalle aneinandergeklebt, wobei die Brechzahlen und der Winkel so gewählt werden, dass für eine Polarisation Totalreflexion auftritt.

Für die Intensität hinter dem Polarisator gilt das Gesetz von *Malus*

$$I = I_0 \cos^2 \varphi. \quad (2.39)$$

Dies lässt sich aus der allgemeinen Form der Jones-Matrix eines Polarisators mit beliebigem Drehwinkel herleiten

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi \\ \sin \varphi \cos \varphi & \sin^2 \varphi \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

$\lambda/4$ Plättchen: $\mathbf{j}_{\text{out}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \mathbf{j}_{\text{in}}$ (x -Orientierung)

Ein $\lambda/4$ Plättchen bewirkt eine Phasenverschiebung der zwei orthogonalen Polarisationskomponenten um $\pi/2$, d. h. $\delta_{\text{out}} = \delta_{\text{in}} \pm \frac{\pi}{2}$. Somit wird linear polarisiertes Licht in zirkular polarisiertes Licht umgewandelt. Ein solches Phasenplättchen wird meist aus einem doppelbrechendem Kristall hergestellt. Um die Phasenverschiebung zu erreichen muss die optische Weglängendifferenz für ordentlichen (o) und außerordentlichen (e) Strahl $\lambda/4$ betragen. Es ergibt sich

$$d|n_o - n_e| = \frac{\lambda}{4} \quad d - \text{Dicke des Plättchens.} \quad (2.41)$$

$\lambda/2$ Plättchen: $\mathbf{j}_{\text{out}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{j}_{\text{in}}$ (x -Orientierung)

Ein $\lambda/2$ Plättchen bewirkt eine Phasenverschiebung der zwei orthogonalen Polarisationskomponenten um π , d. h. $\delta_{\text{out}} = \delta_{\text{in}} \pm \pi$. Somit wird linear parallel-linear polarisiertes Licht an der x -Achse gespiegelt und es ergibt sich senkrecht-linear polarisiertes Licht. Um die Phasenverschiebung zu erreichen muss die optische Weglängendifferenz für ordentlichen (o) und außerordentlichen (e) Strahl $\lambda/2$ betragen. Es ergibt sich

$$d|n_o - n_e| = \frac{\lambda}{2} \quad d - \text{Dicke des Plättchens.} \quad (2.42)$$

Beachte, dass hierbei keine Drehung der Polarisation erfolgt, sondern eine Spiegelung an der Ausrichtungsachse des Phasenplättchens. Bei einem Winkel α zur Ausrichtungsachse wird die Polarisation um den Winkel 2α "gedreht".

Anwendungen von Phasenplatten

Abgesehen der reinen Manipulation der Polarisation sind Polarisierende Elemente nützlich, um in einem Lasersystem bestimmte optische Komponenten aufzubauen. Über polarisierende Elemente lassen sich beispielsweise optische Dioden, Energieregler (siehe Abbildung 6) oder Schalter konstruieren.

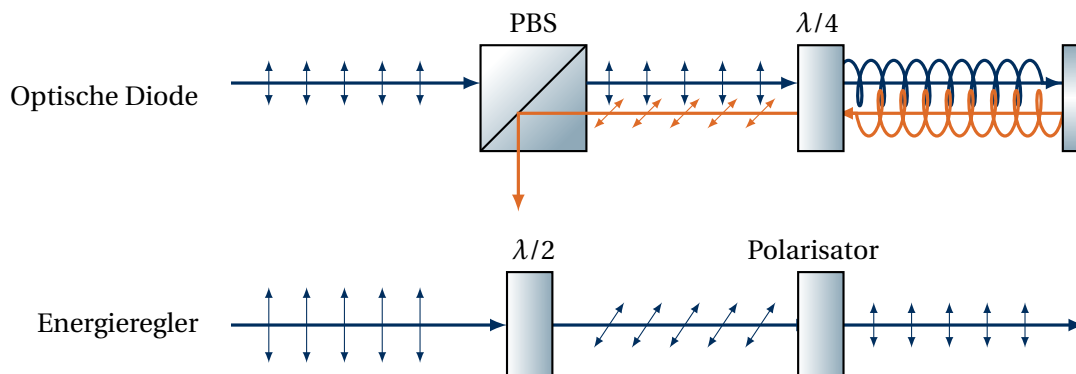


Fig. 6: Verschiedene optische Komponenten realisiert mit polarisierenden Elementen.

3 Geometrische Optik

Im folgenden wollen wir das Verhalten optischer Systeme im Sinne der Strahlenoptik unter Vernachlässigung von Beugungseffekten beschreiben. Dafür treffen wir die Annahme, dass das Feld durch viele unendlich dünne Strahlen repräsentiert werden kann. Jeder Strahl besitzt hierbei eine fest definierte Amplitude u_i mit $P_i = |u_i|^2$, Ausbreitungsrichtung \mathbf{k}_i und Polarisation \mathbf{j}_i .

3.1 Matrizenoptik

Zur Beschreibung optischer Elemente betrachten wir im folgenden nur rotationssymmetrische Probleme, weshalb sie die Beschreibung auf zwei Dimensionen reduziert. Die Symmetrieachse wird auch optische Achse genannt. Wir beschreiben die Position und Richtung eines Strahls durch einen Zweiervektor

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} x \\ n\alpha \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

wobei x den Abstand und α den Winkel zur optischen Achse beschreiben.

Weiterhin benutzen wir die *paraxiale Näherung* mit der Annahme, dass der Winkel α zur optischen Achse klein ist mit $\sin \alpha \approx \alpha$. Damit vereinfacht sich das Brechungsgesetz zu

$$n_1 \alpha_1 = n_2 \alpha_2. \quad (3.2)$$

Ein optisches Element wird wieder durch eine Matrix \hat{M} charakterisiert die auf den Zweiervektor wirkt

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax + B\alpha \\ Cx + D\alpha \end{pmatrix} \quad \text{ABCD-Matrix Formalismus.} \quad (3.3)$$

1.) Freiraum der Länge L Bei der Propagation durch den freien Raum bleibt der Winkel α unverändert und der Abstand ändert sich gemäß $x = x_0 + \tan \alpha L \approx x_0 + \alpha L$. In Matrixschreibweise lautet dies

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

2.) Linse mit Brennweite f Für eine Linse mit Brennweite f ändert sich der Abstand zur optischen Achse nicht $x = x_0$, jedoch der Winkel. Für einen Parallelstrahl $\alpha_0 = 0$ gilt nach dem Linsendurchgang $\alpha = -\frac{x}{f}$ (Brennpunktstrahl). Somit lautet die Matrix

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Hierbei ist die Brennweite f der Linse nach der Vorlesung gegeben als

$$f = \frac{n_3}{k_{12} + k_{23}} \quad \text{mit} \quad k_{ij} = \frac{n_j - n_i}{R}, \quad (3.6)$$

wobei k_{ij} die Brechkraft an der Grenzfläche zwischen Medium i und j und R den Krümmungsradius der Linsenoberfläche beschreibt. Unter der Annahme einer Linse in Luft mit $n_1 = 1 = n_3$ und $n_2 = n$ ergibt sich

$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{R_1} + \frac{1-n}{R_2} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (3.7)$$

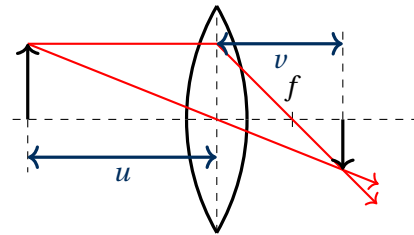
Dies ist die sogenannte *Linsenschleiferformel* für dünne Linsen.

3.) Hohlspiegel mit Krümmungsradius R Für einen Hohlspiegel ($R < 0$) werden die Strahlen wie bei einer Linse der Brennweite $f = -\frac{R}{2}$ fokussiert, wodurch sich folgende Transfermatrix ergibt:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

3.2 Abbildung durch eine dünne Linse

Wir wollen im Folgenden die Abbildung durch eine dünne Linse beschreiben. Liegt das Objekt einen Abstand $u > 0$, $u > f$ vor der Linse (Gegenstandsweite), so liegt das Bild im Abstand $v > 0$ hinter der Linse. Die Matrix des Gesamtsystems ergibt sich zu:



$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{v}{f} & u + v - \frac{uv}{f} \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{u}{f} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Die Position des Bildpunktes darf nicht vom Eingangswinkel abhängen $x_{\text{out}} \neq f(\alpha_{\text{in}})$, da das gesamte Licht auf den Bildpunkt abgebildet wird. Mit $x_{\text{out}} = Ax_{\text{in}} + B\alpha_{\text{in}}$ erhalten wir $B = 0$ mit $u + v - \frac{uv}{f} = 0$ oder

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}. \quad (3.10)$$

Der Abbildungsmaßstab (Vergrößerung) entspricht dem Verhältnis $A = x_{\text{out}}/x_{\text{in}}$ in der ABCD-Matrix und damit

$$A = 1 - \frac{v}{f} = \frac{f}{f - u}. \quad (3.11)$$

Er ist für reelle Bilder ($u > f$) und ($v > f$) negativ, d. h. das Bild steht auf dem Kopf. Dabei ist $|A| > 1$ für Gegenstandspositionen $f < u < 2f$ und $|A| < 1$ für $u > 2f$.

3.3 Hauptebenen

Wir wollen nun ein kompliziertes Linsensystem wie beispielsweise ein Objektiv durch eine effektive dünne Linse ersetzen. Dafür fügen wir vor und hinter der Linse einen Freiraum der Länge u und v ein. Damit gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + vC & Au + B + uvC + vD \\ C & Cu + D \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Ein Vergleich der linken und rechten Matrix liefert zwei Gleichungen für die Position der Hauptebenen:

$$v = \frac{1 - A}{C} \quad \text{und} \quad u = \frac{1 - D}{C}. \quad (3.13)$$

Das Verschwinden der B -Komponente wird durch die Eigenschaft $\det(\hat{M}) = AD - BC = 1$ der Transfermatrix sichergestellt.

4 Beugungsphänomene

Im Folgenden wollen wir uns Beugungsphänomene anschauen, die wir in unseren bisherigen Rechnungen stets vernachlässigt haben. Dafür kehren wir von der einfachen Beschreibung des Lichtes durch Lichtstrahlen mit gegebener Richtung zurück zur Beschreibung mittels Feldern, die durch den Raum propagieren. Für ein monochromatisches Feld in einem homogenen, isotropen und absorptionsfreien Medium wird die Feldausbreitung durch die Helmholtz-Gleichung beschrieben

$$(\Delta + k^2)E = 0 \quad \text{mit} \quad k^2 = n^2 \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (4.1)$$

Um nun eine beliebige Feldverteilung beschreiben zu können, müssen wir diese mittels Fouriertransformation in ihre örtlichen und räumlichen Frequenzen aufteilen, für diese anschließend die Helmholtz-Gleichung lösen und danach die Felder mit einer Fourier-Rücktransformation wieder zusammensetzen.

4.1 Berechnung des Beugungsintegrals

Zur Berechnung treffen wir einige Annahmen:

- Die Objekt- und Bildebene liegen in der x - y -Ebene
- Die Ausbreitung erfolgt in positive z -Richtung.
- Die Feldverteilung in der Objektebene $z = 0$ sei gegeben als $u_0(x, y)$.

Wir beginnen zunächst damit, die Ausgangsfeldverteilung zu transformieren und die finale Feldverteilung durch ihre Fourierkomponenten darzustellen

$$\tilde{u}_0(\alpha, \beta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_0(x, y) e^{-i(\alpha x + \beta y)} dx dy \quad (4.2)$$

$$u(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\alpha, \beta, z) e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta. \quad (4.3)$$

Auf diese Fourierkomponenten (Gleichung (4.3)) können wir nun die Helmholtz-Gleichung anwenden und diese anschließend lösen. Für sich in positive z -Richtung ausbreitende Felder ergibt sich die Lösung

$$\tilde{u}(\alpha, \beta, z) = \tilde{u}_0(\alpha, \beta) \exp[i\gamma(\alpha, \beta)z] \quad \text{mit} \quad \gamma = \sqrt{k^2 - \alpha^2 - \beta^2}. \quad (4.4)$$

Diese Lösung können wir nun wieder zurücktransformieren und wir erhalten

$$u(x, y, z) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\tilde{U}_0(\alpha, \beta)}_{\text{Amplitude}} \exp[i\gamma(\alpha, \beta)z]}_{\text{Welle}} e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta \quad (4.5)$$

Summation über alle Wellen

Wir können das Ganze in einem Schema (siehe Abbildung 7) zusammenfassen:

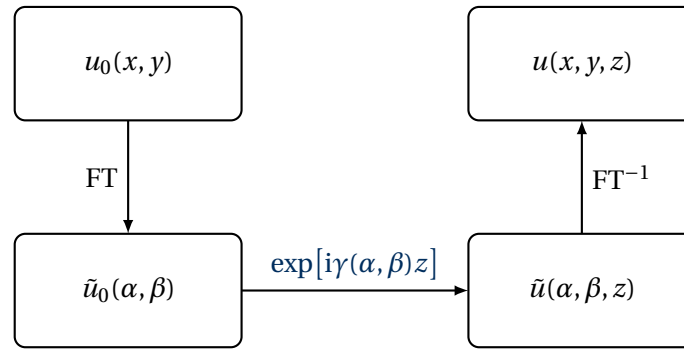


Fig. 7: Schema zur Herleitung des Beugungsintegrals.

4.2 Gaußförmige Strahlen in paraxialer Näherung

Wir betrachten im Folgenden eine gaußförmige Feldverteilung $u(x, y) = A_0 \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{W_0^2}\right)$. Wir wollen für dieses Feld das Beugungsintegral unter der Annahme kleiner Winkel zur z -Achse lösen. Das Fourierspektrum der Ausgangsfeldverteilung ist ebenfalls wieder gaußförmig

$$\tilde{u}_0(\alpha, \beta) = A_0 \frac{W_0^2}{4\pi} \exp\left[-\frac{W_0^2}{4}(\alpha^2 + \beta^2)\right]. \quad (4.6)$$

Für das Beugungsintegral wird nun die paraxiale Näherung verwendet

$$\sqrt{k^2 - (\alpha^2 + \beta^2)} \approx k - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2k}. \quad (4.7)$$

Dann lässt sich das Beugungsintegral analytisch ausrechnen zu

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \iint_{-\infty}^{\infty} d\alpha d\beta \underbrace{\tilde{u}_0(\alpha, \beta) \exp\left(i\sqrt{k^2 - \alpha^2 - \beta^2}z\right)}_{A_0 \frac{W_0^2}{4\pi} \exp\left(-\frac{W'^2}{4}(\alpha^2 + \beta^2)\right) e^{ikz} \text{ mit } W'^2 = W_0^2 + \frac{2iz}{k}} e^{i(\alpha x + \beta y)} \\ &= e^{ikz} \frac{W_0^2}{W'^2} A_0 \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{W'^2}\right] \\ u(x, y, z) &= e^{ikz} \frac{A_0}{1 + i\frac{z}{z_R}} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{W_0^2(1 + i\frac{z}{z_R})}\right] \text{ mit } z_R = \frac{\pi W_0^2}{\lambda}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Der Parameter z_R heißt *Rayleigh-Länge* und wird auch Beugungsparameter genannt. Er hängt quadratisch von der Strahlbreite und invers von der Wellenlänge ab. Er beschreibt, die Strecke z , nach welcher der Strahl seinen Querschnitt verdoppelt hat, bzw. die Leistung auf die Hälfte des Maximalwertes abgefallen ist. Er ist also ein Maß für die Divergenz des Strahls.

Trennen wir die komplexe Funktion noch in Amplitude und Phase auf, so ergibt sich

$$u(x, y, z) = \frac{e^{ikz} e^{i\varphi} A_0}{\sqrt{1 + (z/z_R)^2}} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{W_0^2(1 + (z/z_R)^2)}\right] \exp\left[i\frac{z}{z_R} \frac{x^2 + y^2}{W_0^2(1 + (z/z_R)^2)}\right] \quad (4.9)$$

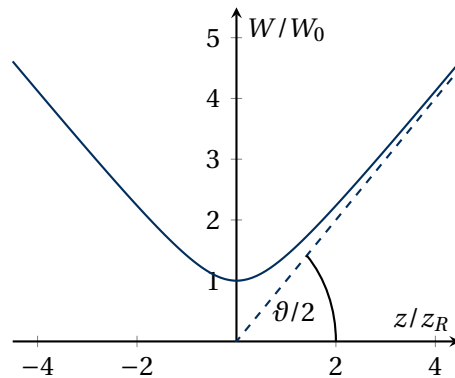
mit $\varphi = -\arctan(z/z_R)$.

Strahlbreite $W(z) = W_0 \sqrt{1 + (z/z_R)^2}$

Für große Ausbreitungslängen $z \gg z_R$ gilt $W(z) \approx W_0 z/z_R$, d. h. von der Strahltaile ($z = 0$) geht ein Strahlkegel mit dem Öffnungswinkel

$$\vartheta = 2 \arctan \frac{W_0}{2z_R} = 2 \arctan \frac{\lambda}{2\pi W_0}, \quad (4.10)$$

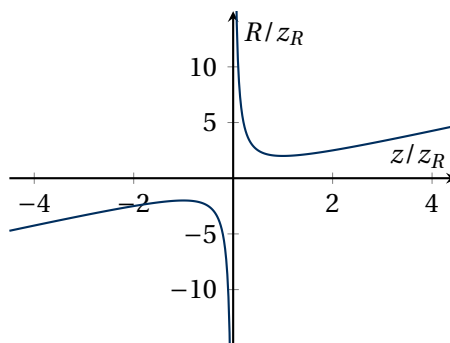
d. h. je kleiner die Strahltaile ist, desto stärker divergiert der Strahl bei der Ausbreitung.



Phasenkrümmung

Der Phasenterm $\exp[i\dots]$ in (4.9) bewirkt außerhalb der Strahltaile ($z \neq 0$) eine Krümmung der Phasenfronten im Strahl. der entsprechende Krümmungsradius ergibt sich bei Vergleich mit einer Kugelwelle zu

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_R}{z} \right)^2 \right]. \quad (4.11)$$



Für große Abstände $z \gg z_R$ gilt $R(z) \approx z$, d. h. der Strahl bildet den Ausschnitt aus einer Kugelwelle mit dem Zentrum in der Strahltaile.

4.3 Gauß Optik mit q -Parametern

Wie wir gesehen haben, lässt sich ein Gaußstrahl vollständig durch seine Breite $W(z)$ und seinen Krümmungsradius $R(z)$ beschreiben. Wir wollen diese beiden Größen nun in einen einzigen Parameter vereinen, den wir q -Parameter nennen. Er ist definiert als

$$q = z_F - iz_R, \quad (4.12)$$

wobei z_F den Abstand zur Strahltaile beschreibt und $z_R = \frac{\pi W_0^2}{\lambda}$ die Rayleigh-Länge ist. Wir können aus dem q -Parameter die beiden relevanten Größen ablesen, indem wir sein Reziprokes betrachten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} &= \frac{1}{z_F - iz_R} = \frac{z_F}{z_F^2 + z_R^2} + i \frac{z_R}{z_F^2 + z_R^2} \\ &= \frac{1}{R(z)} + i \frac{\lambda}{\pi} \frac{1}{W(z)^2}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Dynamik des q -Parameters

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass der Formalismus der Transfermatrizen eines Linsensystems auch auf den q -Parameter angewendet werden kann. Es ergibt sich

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \Rightarrow q_{\text{out}} = \frac{Aq_{\text{in}} + B}{Cq_{\text{out}} + D}. \quad (4.14)$$

Für eine Translation L im freien Raum ergibt sich beispielsweise $q_{\text{out}} = q_{\text{in}} + L$. Da heißt die Rayleigh-Länge bleibt gleich und nur der Abstand zur Strahltaile ändert sich.

Für die Propagation durch eine dünne Linse folgt:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow q_{\text{out}} = \frac{q_{\text{in}}}{-q_{\text{out}}/f + 1} \Rightarrow \frac{1}{q_{\text{out}}} = \frac{1}{q_{\text{in}}} - \frac{1}{f}. \quad (4.15)$$

Die Linse führt also zu einer Veränderung der Krümmung der Phasenfronten, während die Strahlbreite $\left(\text{Im} \frac{1}{q}\right)$ unverändert bleibt. Zudem verändert sich die Rayleigh Länge des Systems, da hinter der Linse eine neue Strahltaile entsteht. Damit ändert sich hinter der Linse die Position und Größe der Strahltaile.

Übungsaufgabe

Berechne für einen kollimierten Gaußstrahl ($z_R \gg 1$) mit Breite W die Größe der Strahltaile bei Propagation durch eine dünne Linse mit Brennweite f .

Lösung: Wir berechnen den q -Parameter hinter der Linse mithilfe von (4.15) zu

$$\frac{1}{q_{\text{out}}} = \frac{1}{\underbrace{R}_{\approx 0}} + i \frac{\lambda}{\pi W^2} - \frac{1}{f}. \quad (4.16)$$

Für die Breite der Strahltaile benötigen wir die neue Rayleigh-Länge hinter der Linse $z_R = -\text{Im}(q_{\text{out}})$

$$q_{\text{out}} = \frac{1}{i \frac{\lambda}{\pi W^2} - \frac{1}{f}} = \frac{-\frac{1}{f} - i \frac{\lambda}{\pi W^2}}{\frac{1}{f^2} + \frac{\lambda^2}{\pi^2 W^4}}. \quad (4.17)$$

Damit folgt für die Rayleigh-Länge z_R und folglich die Strahlbreite

$$\begin{aligned} z_R &= \frac{\lambda}{\pi W^2} \frac{1}{\frac{1}{f^2} + \frac{\lambda^2}{\pi^2 W^4}} \stackrel{!}{=} \frac{\pi}{\lambda} W_0^2 \\ \Rightarrow W_0 &= \frac{\lambda}{\pi W} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{f^2} + \frac{\lambda^2}{\pi^2 W^4}}} \approx \frac{\lambda f}{\pi W} \quad \text{für} \quad \frac{1}{f^2} \gg \frac{\lambda^2}{\pi^2 W^4} = \underbrace{\frac{W_0^4}{W^4}}_{<1} \underbrace{\frac{1}{z_R^2}}_{\ll 1}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Wir sehen, dass sich kleiner Wellenlängen besser fokussieren lassen, da hier die Beugung schwächer ist. Weiterhin fokussieren kleinere Brennweiten den Strahl stärker. Je größer der kollimierte Strahl, desto kleiner ist die Taille.

4.4 Gauß-Moden im Resonator

Im folgenden wollen wir Laserresonatoren beschreiben. Hierbei wollen wir untersuchen, unter welchen Bedingungen ein Laserresonator stabil ist. Die notwendige Bedingung hierfür ist, dass sich der q -Parameter nach einem Umlauf nicht ändert. Für eine ABCD-Matrix des Resonators folgt damit

$$q = \frac{Aq + B}{Cq + D} \Rightarrow q^2 + \frac{D-A}{C}q - \frac{B}{C} = 0$$

$$\Rightarrow q = \frac{A-D}{2C} \pm \sqrt{\left(\frac{A-D}{2C}\right)^2 + \frac{B}{C}}. \quad (4.19)$$

Damit sich der q -Parameter (mit nichtverschwindender Rayleigh-Länge) nach einem Umlauf reproduziert, muss die Diskriminante der Wurzel negativ werden, damit der q -Parameter komplex ist. Wir erhalten dann mit $\det \hat{M} = AD - BC = 1$ die Bedingung

$$(A-D)^2 + 4BC = (A+D)^2 - 1 < 0 \Rightarrow |A+D| < 2. \quad (4.20)$$

Wenden wir diese Beziehung auf einen klassischen Laserresonator an, so ergibt sich

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/R_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/R_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + 2L/R_1 & 2L(1 + L/R_1) \\ 2(1/R_1 + 1/R_2 + L/(R_1R_2)) & 1 + 2L/R_1 + 4L/R_2 + 4L^2/(R_1R_2) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left| 1 + 2\left(\frac{L}{R_1} + \frac{L}{R_2}\right) + \frac{2L^2}{R_1R_2} \right| < 1. \quad (4.22)$$

Diese Beziehung lässt sich durch Einführung der beiden Parameter $g_i = 1 + \frac{L}{R_i}$ vereinfachen zu

$$|2g_1g_2 - 1| < 1 \Rightarrow 0 < g_1g_2 < 1. \quad (4.23)$$

Wir können das grafisch in einem Resonatorstabilitätsdiagramm (siehe Abb.8) darstellen.

Man kann weiterhin beweisen, dass im stabilen Resonator der Phasenkrümmungsradius an den Spiegeln gleich dem Krümmungsradius der Spiegel sein muss. Es lässt sich damit für eine vorgebene Gaußmode immer ein passender Resonator. Umgekehrt lässt sich nicht für jeden beliebigen Resonator eine passende Gaußmode konstruieren.

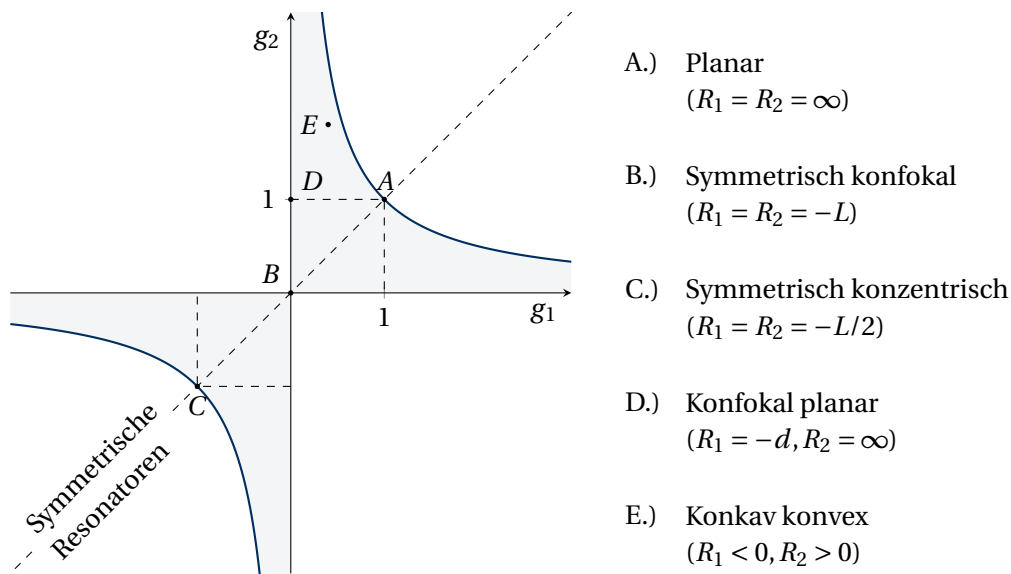


Fig. 8: Resonator-Stabilitäts-Diagramm: Ein sphärischer Resonator ist stabil, wenn die Parameter $g_1 = 1 + L/R_1$ und $g_2 = 1 + L/R_2$ in den schattierten Regionen, welche durch die Koordinatenachsen begrenzt werden, liegen. Alle symmetrischen Resonatoren liegen entlang der Linie $g_2 = g_1$.

Resonatortypen

Wir können je nach Lage im Stabilitätsdiagramm zwischen verschiedenen Typen unterscheiden:

- Fabry-Perot Resonator:** $R_1 = R_2 = \infty$
Dieser Resonatortyp liegt an einer Stabilitätsgrenze. Es bildet sich eine \cos^2 -förmige Feldverteilung in transversale Richtung aus.
- Konfokaler Resonator:** $R = L$
Hier liegt der Brennpunkt in der Resonatormitte. Es bildet sich eine Gaußförmige Feldverteilung aus
- Konzentrischer Resonator:** $2R = L$ Der Krümmungsmittelpunkt liegt in der Resonatormitte. Die Feldverteilung ist abhängig von der Spiegelapertur. Dieser Resonator liegt an einer Stabilitätsgrenze.

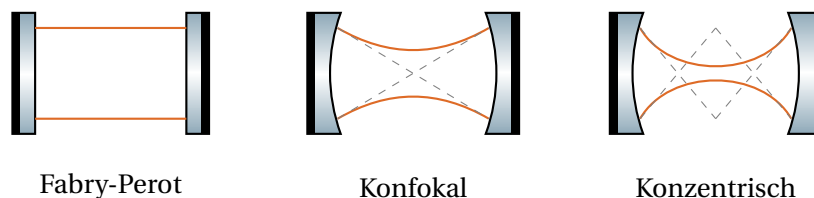


Fig. 9: Verschiedene stabile Resonatortypen.

4.5 Höhere Lasermoden

Die Gaußstrahlen haben wir im Beugungsintegral mittels der paraxialen Näherung herausbekommen. Es existieren jedoch noch weitere Lösungen zusätzlich zum Gaußstrahl. Dafür stellen wir zunächst die Helmholtz-Gleichung in paraxialer Näherung auf. Wir teilen dabei die Welle in eine langsam veränderliche Einhüllende und eine harmonische Schwingung in z -Richtung auf $u(x, y, z) = v(x, y, z)e^{ikz}$. Dann schauen wir, wie sich die zweite Ableitung in z -Richtung vereinfachen lässt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(v(x, y, z)e^{ikz} \right) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} e^{ikz} + ikve^{ikz} \right) \\ &= \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}}_{\approx 0 \text{ Slowly varying envelope approximation (SVEA)}} e^{ikz} + 2ik \frac{\partial v}{\partial z} e^{ikz} - k^2 v e^{ikz} = \left(2ik \frac{\partial v}{\partial z} - k^2 v \right) e^{ikz} \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2} \rightarrow 2ik \frac{\partial}{\partial z} - k^2. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Damit modifiziert sich die Helmholtz-Gleichung zu

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) u(x, y, z) &= 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{2k} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + i \frac{d}{dz} \right) v(x, y, z) &= 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Für die Konstruktion weiterer Lösung nehmen wir die Lösung des Gauß-Strahls und wenden partielle Ableitungen nach x und y an. Diese erfüllen aufgrund der Vertauschbarkeit partieller Ableitungen ebenfalls die Helmholtz-Gleichung

$$v_{mn} = \frac{\partial^m}{\partial x^m} \frac{\partial^n}{\partial y^n} v \quad \text{mit} \quad v = \frac{A_0}{1 + iz/z_R} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{W_0^2(1 + iz/z_R)} \right). \quad (4.26)$$

Die entstehenden Lösungen sind durch die Hermite-Polynome H_m, H_n beschreibbar

$$v_{mn} = \frac{A_0(-1)^{n+m}}{1 + iz/z_R} H_m\left(\frac{x}{W_0\sqrt{1 + iz/z_R}} \right) H_n\left(\frac{y}{W_0\sqrt{1 + iz/z_R}} \right) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{W_0^2(1 + iz/z_R)} \right), \quad (4.27)$$

wobei die Hermite-Polynome durch folgende Differentialgleichung gegeben sind:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}. \quad (4.28)$$

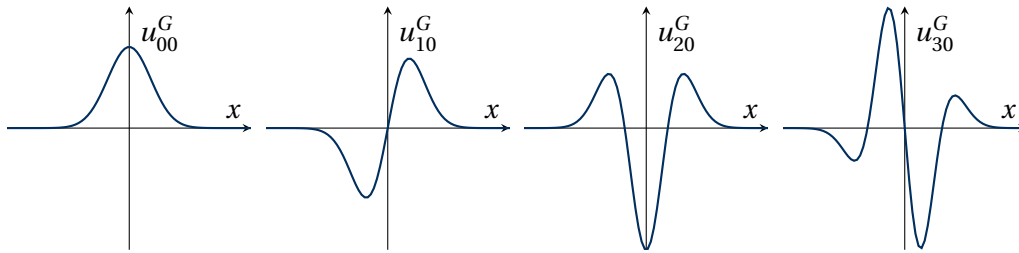


Fig. 10: Gauß-Hermite Polynome der ersten drei Ordnungen.

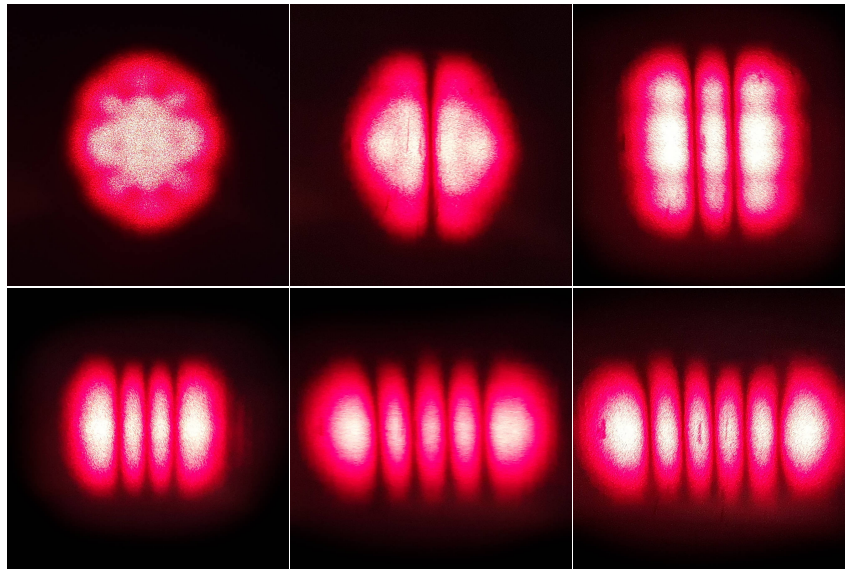


Fig. 11: Transversal elektrische Moden verschiedener Ordnungen. Die Anzahl der Nullstellen im Strahlprofil entspricht der Modenordnung.

4.6 Fraunhofer Beugung

Bisher hatten wir Beugung im gesamten Halbraum $z > 0$ hinter der beugenden Struktur mit Hilfe des Beugungsintegrals exakt beschrieben. Zur Beschreibung von Laserstrahlen haben wir dann die paraxiale Näherung eingeführt und für eine gaußförmige Feldverteilung den Gaußstrahl als Lösung erhalten. Man spricht bei dieser Beschreibung von Beugungsphänomenen mit paraxialer Näherung auch von der *Fresnel*-Beugung.

Nun wollen wir uns nur noch auf den Fall einschränken, dass das Beugungsbild sehr weit weg von der beugenden Struktur entstehen soll, dass also z viel größer als die Ausdehnung des Objekts ist. Beginnen wir zunächst mit dem Beugungsintegral in paraxialer Näherung.

$$u(x, y, z) \approx \iint_{-\infty}^{\infty} d\alpha d\beta \bar{U}_0(\alpha, \beta) \exp \left[i \left(k - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2k} \right) z \right] e^{i(\alpha x + \beta y)}, \quad (4.29)$$

Der Ausdruck lässt sich nun so umformen, dass im Exponenten ein komplexer Gauß auftritt, was sich durch quadratische Ergänzung leicht zeigen lässt:

$$u(x, y, z) \approx e^{ik \left(z + \frac{x^2 + y^2}{2z} \right)} \iint_{-\infty}^{\infty} d\alpha d\beta \bar{U}_0(\alpha, \beta) \exp \left\{ -i \frac{z}{2k} \left[\left(\alpha - k \frac{x}{z} \right)^2 + \left(\beta - k \frac{y}{z} \right)^2 \right] \right\} \quad (4.30)$$

quadratische Ergänzung $-\left(\alpha^2 \frac{z}{2k} - \alpha x + \frac{k}{2z} x^2 \right) + \frac{k}{2z} x^2 = -\frac{z}{2k} \left(\alpha - k \frac{x}{z} \right)^2 + \frac{k}{2z} x^2$.

Die Breite des komplexen Gauß beträgt $W_G = \sqrt{2k/z}$ und wird also für große Ausbreitungslängen beliebig klein. Das Integral mit dem komplexen Gauß bringt aber nur im Zentrum des Gauß einen von Null verschiedenen Beitrag, da sich Beiträge aus Gebieten außerhalb des Zentrums wegen der immer schneller werdenden Oszillationen gegenseitig kompensieren. Praktisch beeinflusst nur die Fourierkomponente $\bar{U}_0(\alpha = k \frac{x}{z}, \beta = k \frac{y}{z})$ aus dem Zentrum des komplexen GAUSS das Integral

$$u(x, y, z) \approx \underbrace{e^{ik \left(z + \frac{x^2 + y^2}{2z} \right)}}_{e^{ikr}} \bar{U}_0 \left(\alpha = k \frac{x}{z}, \beta = k \frac{y}{z} \right) \underbrace{\iint_{-\infty}^{\infty} d\alpha d\beta \exp \left\{ -i \frac{z}{2k} \left[\left(\alpha - k \frac{x}{z} \right)^2 + \left(\beta - k \frac{y}{z} \right)^2 \right] \right\}}_{\frac{2\pi k}{iz}}$$

$$\approx \frac{(2\pi)^2}{i\lambda} \frac{e^{ikr}}{r} \bar{U}_0 \left(\alpha = k \frac{x}{z}, \beta = k \frac{y}{z} \right). \quad (4.31)$$

Im Fernfeld ist die gestreute Welle annähernd eine Kugelwelle. Ihre Amplitude ist gegeben durch die Fouriertransformierte der Ausgangsfeldverteilung.

Beispiel des Gaußstrahls

Für den Gaußstrahl lautet die Feldverteilung in Fraunhofernäherung

$$u(x, y, z) = A_0 \frac{\pi W_0^2}{i\lambda} \frac{e^{ikr}}{r} \exp \left[-\frac{W_0^2 k^2}{4z^2} (x^2 + y^2) \right] \quad \text{NR.} \quad \frac{W_0^2 k^2}{4} = \frac{z_R^2}{W_0^2}$$

$$= -A_0 i z_R \frac{e^{ikr}}{r} \exp \left[-\frac{1}{W_0^2} \frac{z_R^2}{z^2} (x^2 + y^2) \right]. \quad (4.32)$$

Vergleichen wir das mit dem Ausdruck (4.9), den wir durch die paraxiale Näherung des Beugungsintegrals erhalten haben:

$$u(x, y, z) = \frac{e^{ikz} e^{i\varphi} A_0}{\sqrt{1 + (z/z_R)^2}} \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{W_0^2 (1 + (z/z_R)^2)} \right] \exp \left[i \frac{z}{z_R} \frac{x^2 + y^2}{W_0^2 (1 + (z/z_R)^2)} \right] \quad (4.33)$$

$$\sqrt{1 + (z/z_R)^2} \approx \frac{z}{z_R} \approx \frac{r}{z_R} \quad \approx z^2/z_R^2 \quad \underbrace{\begin{matrix} \rightarrow 0 & \text{für} & z \gg z_R \\ \rightarrow 1 \end{matrix}}$$

mit $\varphi = -\arctan(z/z_R) \approx -\frac{\pi}{2} \Rightarrow e^{i\varphi} = -i$.

Wir erhalten also Gleichung (4.32) durch die Näherung $z \gg z_R$.

Auflösungsgrenzen - Rayleigh Kriterium

Die Basis jeder Abbildung bildet ein optisches System, welches durch Aperturen begrenzt ist und nicht das Licht des gesamten vorderen Halbraums auf sammeln kann. Typischerweise sind diese Aperturen Linsen mit endlichem Durchmesser D , durch die das Feld propagiert. Allerdings führt diese Blendenfunktion ebenfalls zu Beugungseffekten, die unsere Auflösung reduzieren. Gehen wir nun von einer kreisförmigen Blende mit Radius a aus, so lautet dessen Transmissionsfunktion

$$u_0(x, y) = \begin{cases} 1 & x^2 + y^2 \leq a^2 \\ 0 & x^2 + y^2 > a^2. \end{cases} \quad (4.34)$$

Im Folgenden wollen wir die Amplitude des Beugungsbildes in Fraunhofer-Näherung berechnen. Dafür brauchen wir die Fouriertransformation der Transmissionsfunktion

$$u\left(\alpha = k \frac{\tilde{x}}{z}, \beta = k \frac{\tilde{y}}{z}\right) = \iint_{-\infty}^{\infty} u_0(x, y) e^{i(\alpha x + \beta y)} dx dy \Big|_{\alpha = k \frac{\tilde{x}}{z}, \beta = k \frac{\tilde{y}}{z}}$$

$$= \int_0^a \int_0^{2\pi} \exp \left[i k \frac{r}{z} (\tilde{x} \cos \varphi + \tilde{y} \sin \varphi) \right] r dr d\varphi. \quad (4.35)$$

Hier haben wir x und y in Polarkoordinaten ausgedrückt: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Dies können wir auch noch für die Koordinaten \tilde{x} , \tilde{y} tun: $\tilde{x} = R \cos \vartheta$, $\tilde{y} = R \sin \vartheta$. Dann folgt für das Argument der Exponentialfunktion

$$i k \frac{rR}{z} (\cos \vartheta \cos \varphi + \sin \vartheta \sin \varphi) = i \varrho r \cos(\varphi - \vartheta) \quad \text{mit} \quad \varrho := k \frac{R}{z}. \quad (4.36)$$

Dann vereinfacht sich das obere Integral zu

$$u\left(\alpha = k \frac{\tilde{x}}{z}, \beta = k \frac{\tilde{y}}{z}\right) = \int_0^a \int_0^{2\pi} \underbrace{e^{i \varrho r \cos(\varphi - \vartheta)} d\varphi r dr}_{=2\pi J_0(\varrho r)}, \quad (4.37)$$

wobei wir hier die Besselfunktion 0. Ordnung eingeführt haben, die definiert ist als

$$J_0(x) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \cos \varphi} d\varphi. \quad (4.38)$$

Das konstante ϑ im Kosinus spielt hierbei keine Rolle, da über die gesamte Periode integriert wird und sich der Phasenfaktor weghebt. Anschließend können wir noch eine Rekursionsrelation der Besselfunktionen nutzen:

$$\frac{d}{dx}(x^n J_n(x)) = x^n J_{n-1} \Rightarrow \int_0^a x J_0(x) dx = x J_1(x) \Big|_0^a = a J_1(a). \quad (4.39)$$

Setzen wir diese in das Integral ein, erhalten wir für die Fourieramplitude der Transmissionsfunktion

$$\begin{aligned} u\left(\alpha = k \frac{\tilde{x}}{z}, \beta = k \frac{\tilde{y}}{z}\right) &= 2\pi \int_0^a r J_0(\varrho r) dr = \frac{2\pi}{\varrho^2} \int_0^{a\varrho} r' J_0(r') dr' \\ &= \frac{2\pi a}{\varrho} J_1(a\varrho) \sim \frac{J_1(\eta)}{\eta} \quad \text{mit} \quad \eta = a\varrho = \frac{ak}{z} \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Damit ergibt sich für die Intensität das sogenannte Airy Scheibchen als Ergebnis

$$|u(x, y, z)|^2 \sim \left| \frac{J_1(\eta)}{\eta} \right|^2 \quad \text{mit} \quad \eta = \frac{ak}{z} \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}. \quad (4.41)$$

Die erste von Null verschiedene Nullstelle der Besselfunktion 1. Ordnung liegt bei $\eta = 1.22\pi$.

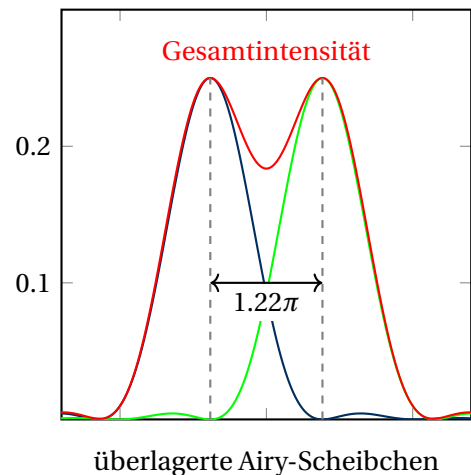
Um jetzt die Auflösung eines abbildenden Systems (Rayleigh-Kriterium) abzuschätzen, nehmen wir an, dass wir zwei zu beobachtende Sterne dann noch auflösen können, wenn das Maximum des Airy-Scheibchen des ersten Sterns mit der Nullstelle des Airy-Scheibchen des zweiten Sterns zusammenfällt. Liegt das eine Scheibchen bei $\eta = 0$ zentriert auf der optischen Achse, so muss das andere mindestens bei

$$\eta = \frac{ak}{z} R > 1.22\pi \quad (4.42)$$

liegen, damit die beiden Objekte noch voneinander zu unterscheiden sind. Da das Beugungsmuster in der Brennebene des optischen Systems steht, gilt $z \approx f$ und damit gilt für die Auflösung $\delta x_0 = R$ des optischen Systems

$$\delta x_0 > 1.22\pi \frac{f}{ak} = 1.22 \frac{f\lambda}{2a}, \quad (4.43)$$

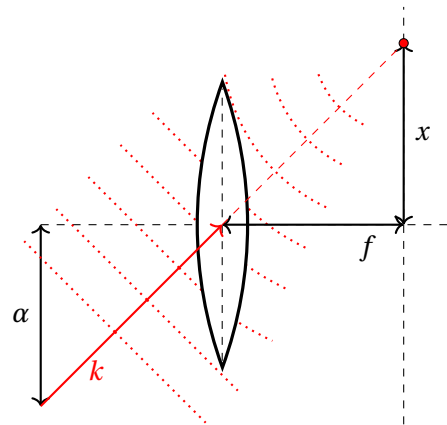
wobei $2a$ den Öffnungsdurchmesser des abbildenden Systems beschreibt.



4.7 Fourier Optik

Wir wollen in diesem Abschnitt das Verhalten einer Linse auf eine Feldverteilung untersuchen. Dabei stellen wir fest, dass jede beliebige Feldverteilung durch eine Summation von ebenen Wellen darstellbar ist. Für eine ebene Welle gilt, dass diese bei Propagation durch eine Linse auf einen Punkt in der Brennebene fokussiert wird. Die Position des Fokuspunktes in der Brennebene ergibt sich zu

$$\frac{x}{f} = \frac{\alpha}{\sqrt{k^2 - \alpha^2 - \beta^2}} \approx \frac{\alpha}{k} \Rightarrow \alpha = k \frac{x}{f}. \quad (4.44)$$



Es lässt sich zudem zeigen, dass die Intensität der Feldverteilung in der Brenn-/Fourierebene proportional zum Betragsquadrat der Fouriertransformierten der Ausgangsverteilung ist

$$|u_f(x, y)|^2 \propto \left| \bar{U}_0 \left(k \frac{x}{f}, k \frac{y}{f} \right) \right|^2. \quad (4.45)$$

Stellen wir nun eine Blende in die Fourierebene, so können wir einen Filter konstruieren, der bestimmte Frequenzen der Feldverteilung herausfiltert. Ein solcher Aufbau wird in einer sogenannten $4f$ -Anordnung realisiert.

$4f$ -Anordnung In einer $4f$ -Anordnung wird ein Objekt umgekehrt mit Vergrößerung von eins abgebildet. Optisch entspricht dies einer Fouriertransformation in die Fourierebene und einer inversen Fouriertransformation in die Brennebene der hinteren Seite. Dies ist in Abbildung 12 dargestellt. Für den Spezialfall, dass das Objekt in die Brennebene der ersten

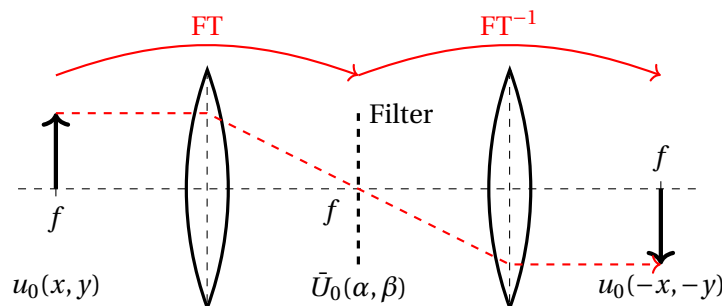


Fig. 12: Aufbau einer $4f$ -Anordnung bestehend aus zwei Linsen gleicher Brennweite und einem Filter in der Fourierebene.

Linse gestellt wird, ist die Fouriertransformation auch phasenrichtig. Das Fourierspektrum kann nun durch Einsetzen einer Blende in der Brennebene modifiziert werden.

Optische Bildverarbeitung

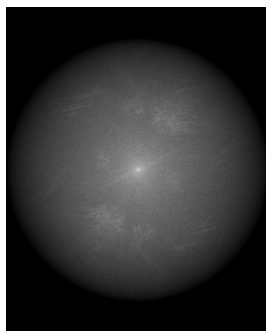
Man kann die Effekte von verschiedenen Filtern einer $4f$ -Anordnung einfach mithilfe eines Bildbearbeitungsprogramms (Gimp oder Photoshop) simulieren. Dafür verwenden wir das Bild des Physikers Joseph Fourier (siehe Abb. 13), der auch der Fourier-Optik seinen Namen gegeben hat. Zur Anwendung des Fourier-Filters wird das Bild zunächst fouriertransformiert, in seine Phase und Amplitude zerlegt und anschließend eine Maske auf die Teile gelegt. Abschließend wird das Bild wieder zurücktransformiert.



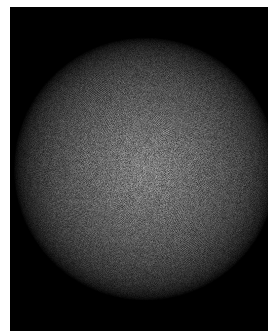
Fig. 13: Joseph Fourier (Wikipedia)

a) Kontrastreduktion:

Setzen wir eine kreisförmige Blende um das Zentrum des fouriertransformierten Bildes, so werden die hohen Frequenzkomponenten ausgeblendet. Für ein $4f$ -System und einer Maske mit Radius a werden alle k -Vektoren mit $k_x > \frac{ka}{f}$ ausgeblendet. Als Resultat ergibt sich ein weichgezeichnetes Bild.



Amplitude



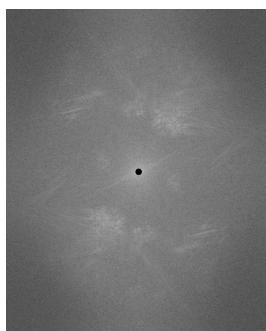
Phase



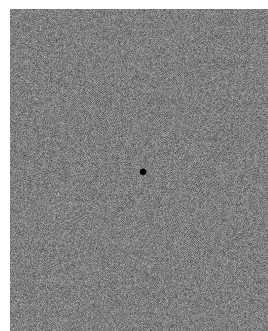
Resultat

a) Kontrasterhöhung:

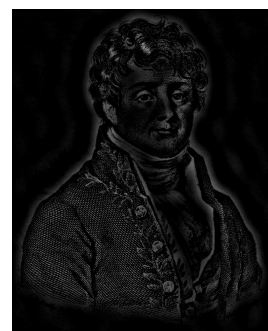
Setzen wir stattdessen eine inverse Blende in die Fourierebene, so werden die niedrigen Frequenzkomponenten ausgeblendet. Für ein $4f$ -System und einer Maske mit Radius a werden alle k -Vektoren mit $k_x < \frac{ka}{f}$ ausgeblendet. Als Resultat ergibt sich ein Bild mit verstärkt sichtbaren Kanten. Da hier auch die nullte Beugungsordnung herausgefiltert wird, und hier die konstante Helligkeit des Bildes enthalten ist, erscheint das Bild dunkel. Deshalb wird eine solche Abbildung auch Dunkelfeldabbildung genannt.



Amplitude



Phase



Resultat