9. Übung

Samstag, 9. Dezember 2023 18:44

*Aufgabe 33 (Fluchtgeschwindigkeit)

Der Mond soll in Zukunft als Ausgangspunkt für die weitere Erkundung des Weltalls dienen. Hierzu soll eine Basis auf der Mondoberfläche entstehen, von der aus Forschungssonden (Masse $m = 5000\,\text{kg}$) gestartet werden. Diese sollen dabei auf einer langen Schiene auf die Fluchtgeschwindigkeit des Mondes beschleunigt werden und benötigen daher nur wenig Treibstoff. (Hinweis: Vernachlässigen Sie den Einfluss anderer Himmelskörper und die Bewegungen des Mondes und schlagen Sie die für die Lösung der Aufgabe notwendigen Konstanten nach!)

a) Wie hoch muss die Abschussgeschwindigkeit sein? Wieviel Energie wird hierbei für eine Sonde benötigt?

b) Wie lang muss die Beschleunigungsschiene sein, wenn die maximale (als konstant angenommene) Beschleunigung $a_{max} = 50\,\text{m/s}^2$ betragen soll?

c) Geben Sie die Leistung des Beschleunigungssystems als Funktion des Ortes auf der Schiene an.

$m = 5000\,\text{kg}$ (Masse der Sonde) $\quad r_M = 1737{,}4\,\text{km} \quad G = 6{,}674 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$

$M = 7{,}346 \cdot 10^{22}\,\text{kg}$ (Masse Mond)

a.) Wir müssen eine kinetische Energie aufbringen, damit die Sonde das Schwerefeld des Mondes verlassen kann. Dafür berechnen wir die notwendige Arbeit über die Gravitationskraft

$$E_{Pot} = \int \vec{F}_G \cdot d\vec{r} = \int_{r_M}^{\infty} G\,\frac{m \cdot M}{r^2}\,dr = -GmM\left[\frac{1}{r}\right]_{r_M}^{\infty} = G\,\frac{mM}{r_M} \overset{!}{=} E_{kin} = \frac{m}{2}v^2$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2GM}{r_M}} = \underline{\underline{2376\,\frac{m}{s}}}$$

↗ vgl. Erde $v_{Flucht} = 11\,180\,\frac{m}{s}$

$$\Rightarrow E_{kin} = \frac{GmM}{r_M} = \underline{\underline{14{,}1\,\text{GJ}}}$$

b.) Länge $L = \frac{a}{2}t^2$ und $v = at \quad \Rightarrow L = \frac{v^2}{2a} = \frac{(2376\,\text{m/s})^2}{2 \cdot 50\,\text{m/s}^2} = \underline{\underline{56{,}454\,\text{km}}}$

↑ Setze a_{max} ein

c.) $$P = \frac{d}{dt}(E_{kin}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}v^2\right) = mv\,\frac{dv}{dt} = ma \cdot v(s)$$

$$v = at \text{ und } s = \frac{a}{2}t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{a}} \Rightarrow v = \sqrt{2as}$$

$$\Rightarrow P(s) = \underline{\underline{ma\sqrt{2as}}} = 2{,}5\,\text{MW}\,\sqrt{s[\text{m}]}$$

*Aufgabe 34 (Trägheitsmoment)

Ein Mann sitzt auf einem reibungsfrei gelagerten Drehstuhl, ohne dass seine Füße den Boden berühren. Mann und Drehstuhl haben zusammen bezüglich der Drehachse das Trägheitsmoment $J_0 = 4\,\mathrm{m^2kg}$. Er nimmt je ein Bleistück der Masse $m = 10\,\mathrm{kg}$ in seine Hände und streckt die Arme aus. Der Abstand zwischen der Drehachse und den Bleistücken beträgt zunächst jeweils $r_1 = 90\,\mathrm{cm}$.

a) Eine zweite Person bringt in $0,5\,\mathrm{s}$ den Drehschemel in Rotation mit einer konstanten Drehzahl $u_1 = 0,4\,\mathrm{Hz}$. Wie groß ist jetzt der gesamte Drehimpuls L_1 des Systems?

b) Der Mann zieht beide Arme an den Körper, bis sich die Bleistücke im Abstand $r_2 = 20\,\mathrm{cm}$ von der Drehachse befinden. Wie groß ist jetzt die Drehzahl u_2? Welche Arbeit wird dabei verrichtet und wo kommt die dafür notwendige Energie her?

a.) $L = J\omega \qquad J = J_0 + \underset{\uparrow\ \text{zwei Massen}}{2}\cdot mr^2 \qquad$ mit $J_0 = 4\,\mathrm{kg\,m^2}$

$r_1 = 0{,}9\,\mathrm{m} \qquad J_1 = J_0 + 2mr_1^2 = 4\,\mathrm{kgm^2} + 2\cdot 10\,\mathrm{kg}\cdot 0{,}81\,\mathrm{m^2} = 20{,}2\,\mathrm{kg\,m^2}$

$r_2 = 0{,}2\,\mathrm{m} \qquad J_2 = J_0 + 2mr_2^2 = 4\,\mathrm{kgm^2} + 2\cdot 10\,\mathrm{kg}\cdot 0{,}04\,\mathrm{m^2} = 4{,}8\,\mathrm{kg\,m^2}$

$\Rightarrow L_1 = J_1\cdot\omega_1 = J_1\cdot(2\pi u_1) = 20{,}2\,\mathrm{kg\,m^2}\cdot 2\pi\cdot 0{,}4\,\frac{1}{s} = \underline{\underline{50{,}77\,\frac{\mathrm{kgm^2}}{s}}}$

b.) Es gilt Drehimpulserhaltung: $L_1 \overset{!}{=} L_2$

$u_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{J_1}{J_2}\omega_1 = \frac{J_1}{J_2}u_1 = \frac{20{,}2\,\mathrm{kgm^2}}{4{,}8\,\mathrm{kg\,m^2}}\cdot 0{,}4\,\mathrm{Hz} = 1{,}68\,\mathrm{Hz}$

- verrichtete Arbeit: Differenz der Rotationsenergien $E_{rot} = \frac{1}{2}J_1\omega^2$

$W = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 - \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 = \frac{L}{2}(\omega_1-\omega_2) = \pi L(u_1-u_2) = \pi\cdot 50{,}77\,\frac{\mathrm{kgm^2}}{s}(0{,}4\,\mathrm{Hz}-1{,}68\,\mathrm{Hz}) = \underline{\underline{-204\,\mathrm{J}}}$

- alternativ: Berechne die Arbeit als das Wegintegral über die Zentripetalkraft

$$W = \int_{r_1}^{r_2}\vec{F}_{ZP}\cdot d\vec{s} = \int_{r_1}^{r_2}F_{ZP}\,dr = 2m\int_{r_1}^{r_2}\omega^2 r\,dr \qquad F_{ZP} = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r$$

$$= 2mL^2\int_{r_1}^{r_2}\frac{r}{(J_0+2mr^2)^2}\,dr$$

$$= -\frac{\cancel{2}mL^2}{\cancel{4}_2 m}\left[\frac{1}{J_0+2mr^2}\right]_{r_1}^{r_2} = -\frac{L^2}{2}\left(\frac{1}{J_2}-\frac{1}{J_1}\right) = \underline{\underline{\frac{L}{2}(\omega_1-\omega_2)}}$$

Aufgabe 35 (Verständnis)

a) Die Kraft, die zur Überwindung des Luftwiderstands eines Autos erforderlich ist, nimmt quadratisch mit der Geschwindigkeit zu. Was bedeutet dies für die Motorleistung, die bei zunehmender Geschwindigkeit zur Verfügung stehen muss?

b) Bei den meisten Türen befindet sich der Griff nahe der Seitenkante, die den Angeln gegenüberliegt (also nicht in der Mitte wie beispielsweise bei einer Schublade). Warum ist dies so?

a.) $P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int\underbrace{\vec{F}\cdot d\vec{s}}_{\vec{F}\cdot\frac{d\vec{s}}{dt}dt\,=\,\vec{F}\cdot\vec{v}\,dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\int\vec{F}\vec{v}\,dt\right) = \vec{F}\,\vec{v} \propto \underline{\underline{v^3}}$

b.) der Griff ist so angebracht, dass der Hebelarm möglichst lang ist. $\Rightarrow$ weniger Kraft wird benötigt