8. Übung

Mittwoch, 6. Dezember 2023 16:44

***Aufgabe 29 (Trägheitsmoment)**

Leiten Sie eine Formel für das Trägheitsmoment der folgenden Körper homogener Dichte her:

a) Ein Würfel, (Kantenlänge a, Masse m) der um eine seiner Kanten rotiert.

b) Ein Vollzylinder, (Radius R, Höhe h, Masse m) der um seine Symmetrieachse rotiert.

c) Ein Kegel, (Radius Grundfläche R_0, Höhe h, Masse m) der um eine Achse parallel (Entfernung d) zu seiner Symmetrieachse rotiert.

d) Eine Kugel, (Radius R, Masse m) die um eine ihrer Symmetrieachsen rotiert.

Das Trägheitsmoment ist über folgendes Integral definiert:

$$J_A = \int_{\text{Volumen}} \rho(\vec{r})\, r_\perp^2\, d^3r.$$

Dabei bezeichnet $r_\perp$ den senkrechten Abstand des Punktes $\vec{r}$ zur Drehachse

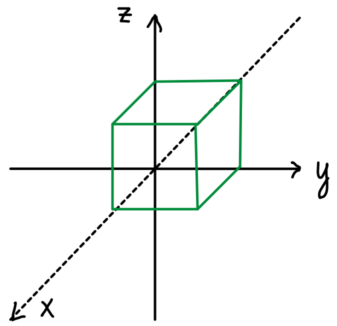
Satz von Steiner:

- rotiert ein starrer Körper um eine Achse die nicht durch den Schwerpunkt verläuft, so ergibt sich das Trägheitsmoment der Drehung als: (dabei bezeichnet r den Abstand der Drehachse zum Schwerpunkt

$$\boxed{J_A' = J_A + mr^2}$$

↑ Trägheitsmoment, wenn Rotation durch Schwerpunkt

a.) für eine konstante Dichte gilt $\rho \neq \rho(\vec{r})$



$$\Rightarrow J_A = \rho \int_0^a \int_0^a \int_0^a r_\perp^2\, dx\,dy\,dz$$

Drehachse: z, $x = 0 = y$

$\hookrightarrow r_\perp^2 = x^2 + y^2$

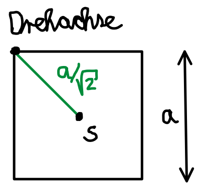
$$= \rho \int_0^a \int_0^a \int_0^a (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \frac{m}{a^3}\left[z \cdot \frac{1}{3}(x^3y + xy^3)\right]_{x,y,z=0}^{a}$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{a^3}$$

$$= \frac{m}{\cancel{a^3}}\left[\frac{a}{3}(a^{\cancel{4}} + a^{\cancel{4}})\right] = \underline{\underline{\frac{2}{3}ma^2}}$$

alternativ Satz von Steiner:



$$J_A = \rho \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz + m\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= \underset{\text{8 Oktanden}}{8}\rho \int_0^{a/2} \int_0^{a/2} \int_0^{a/2} (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz + \frac{m}{2}a^2$$

$$= \frac{8m}{a^3}\left[\frac{a}{6}(x^3y + xy^3)\right]_0^{a/2} + \frac{m}{2}a^2$$

$$= \frac{\cancel{8}m}{\cancel{a^3}}\left[\frac{a}{6}\underbrace{\left(\frac{a^{\cancel{4}}}{\cancel{16}_2} + \frac{a^{\cancel{4}}}{\cancel{16}_2}\right)}_{a}\right] + \frac{m}{2}a^2 = \frac{m}{6}a^2 + \frac{m}{2}a^2 = \underline{\underline{\frac{2}{3}ma^2}}$$

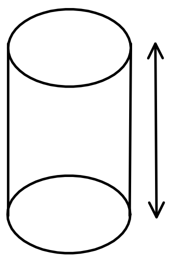
b) $J_A = \rho \int_{r=0}^{R} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{h} r_\perp^2 \cdot \underbrace{r\,dr\,d\varphi\,dz}_{d^3r}$

hier: $r_\perp = r$

$= \rho\, 2\pi h \int_{r=0}^{R} r^3\,dr$

$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi R^2 h}$

$= \frac{m}{\cancel{\pi R^2 h}} \cancel{2\pi h} \left[\frac{1}{4} r^4\right]_0^R = \underline{\underline{\frac{m}{2} R^2}}$



c) Berechne zunächst J_A durch die Symmetrieachse

$J_A = \rho \int_{r=0}^{R} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{h(1-r/R)} r_\perp^2\, \underbrace{r\,dr\,d\varphi\,dz}_{d^3r}$

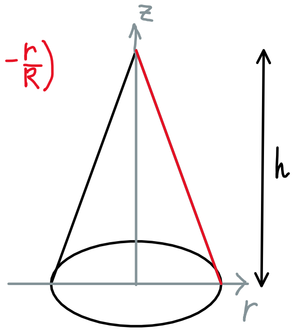
hier: $r_\perp = r$

$= 2\pi\rho \int_{r=0}^{R} h\left(1-\frac{r}{R}\right) r^3\,dr$

$\rho = \frac{m}{V} = \frac{3m}{\pi R^2 h}$

$= \frac{6\cancel{\pi} m}{\cancel{\pi} R^2 \cancel{h}} \cancel{h} \left[\frac{1}{4} r^4 - \frac{1}{5R} r^5\right]_0^R$

$= \frac{6m}{\cancel{R^2}} \left[\underbrace{\frac{1}{4} R^{\cancel{4}\,2} - \frac{1}{5} R^{\cancel{4}\,2}}_{\frac{1}{20} R^2}\right] = \frac{6}{20} mR^2 = \frac{3}{10} mR^2$



Verwende nun Satz von Steiner: $J_A' = J_A + md^2 = \underline{\underline{\frac{3}{10} mR^2 + md^2}}$

d) $J_A = \rho \int_{r=0}^{R} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} r_\perp^2\, r^2 \sin\vartheta\, dr\,d\vartheta\,d\varphi$

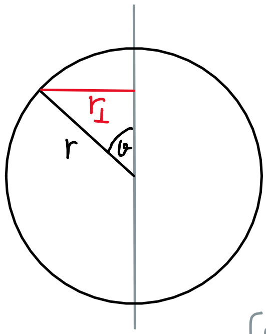
$r_\perp = r \sin\vartheta$

$= 2\pi\rho \int_{r=0}^{R} \int_{\vartheta=0}^{\pi} r^4 \sin^3\vartheta\, dr\,d\vartheta$

$\rho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

$= 2\pi\rho \underbrace{\left[\frac{1}{5} r^5\right]_0^R}_{\frac{R^5}{5}} \underbrace{\left[\frac{1}{3}\cos^3\vartheta - \cos\vartheta\right]_0^\pi}_{-\frac{1}{3}+1-\left(\frac{1}{3}-1\right) = \frac{4}{3}}$

$= 2\pi \frac{m}{\cancel{\frac{4}{3}}\pi \cancel{R^3}} \frac{R^{\cancel{5}\,2}}{5} \cdot \cancel{\frac{4}{3}} = \underline{\underline{\frac{2}{5} mR^2}}$



$\int f'(x) \cdot f^2(x)\,dx = \frac{1}{3} f^3(x) + C_1$

NR: $\int \sin^3\vartheta\, d\vartheta = \int \sin\vartheta\,(1-\cos^2\vartheta)\, d\vartheta$

$= \int \sin\vartheta - \int \sin\vartheta \cos^2\vartheta\, d\vartheta$

$= -\cos\vartheta + \frac{1}{3}\cos^3\vartheta + C_1$

*Aufgabe 30 (Trägheitsmoment)

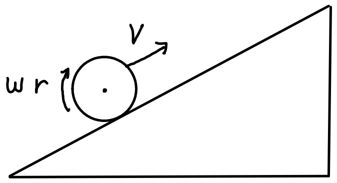
Eine Kugel rolle eine schiefe Ebene hinauf.

a) Wie schnell muss die Kugel anfänglich mindestens sein, um einen Höhenunterschied von 7cm zu überwinden? Vergleichen Sie mit der Mindestgeschwindigkeit für einen reibungsfrei gleitenden Körper.

b) Welcher rollende geometrische Körper wäre in diesem Zusammenhang besonders gut geeignet, um bei niedriger Ausgangsgeschwindigkeit eine große Höhe zu überwinden? Begründen Sie Ihre Aussage!

a.) Trägheitsmoment der Kugel: $J_A = \frac{2}{5} m r^2$

Gesamtenergie der Kugel: $E_{ges} = E_{kin} + \underbrace{E_{rot}}_{\frac{1}{2} J_A \omega^2}$



· schlupffreies Rollen: $v = \omega \cdot r$

$\Rightarrow E_{ges} = \frac{m}{2} v^2 + \frac{1}{2} J_A \omega^2 = \frac{m}{2}\left(v^2 + \frac{2}{5} v^2\right)$

· Forderung: Umwandlung in potentielle Energie $E_{pot} = m \cdot g \cdot h$

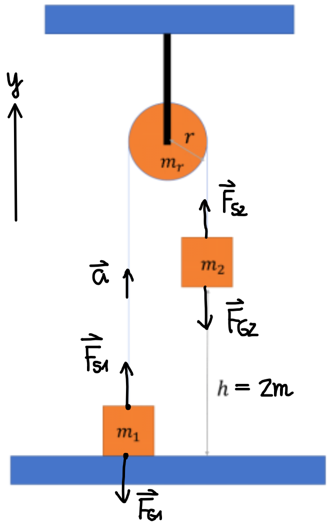
$\Rightarrow \cancel{m} g h = \frac{\cancel{m}}{2} \cdot \frac{7}{5} v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{10}{7} g h} \approx \underline{\underline{1 \frac{m}{s}}}$

· für einen reibungsfrei gleitenden Körper entfällt die Rotationsenergie

$mgh = \frac{m}{2} v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh} \approx \underline{\underline{\sqrt{1{,}4}\,\frac{m}{s}}} > 1 \frac{m}{s}$

b.) Besonders gut geeignet wäre ein Körper mit maximalem Trägheitsmoment, da hier der Anteil der Rotationsenergie am größten ist. $\Rightarrow$ ideal ist ein Hohlzylinder, die gesamte Masse ist maximal weit weg von der Drehachse

Aufgabe 31 (Drehmoment)



Das System aus der Abbildung bestehend aus $m_1 = 20\,\text{kg}$ und $m_2 = 30\,\text{kg}$ wird aus dem Stillstand losgelassen. Dabei hängt m_2 in einer Höhe von $h = 2\,\text{m}$ über dem Boden. Als Rolle dient eine gleichförmige Scheibe mit einem Radius von $r = 10\,\text{cm}$ und einer Masse von $m_r = 5\,\text{kg}$. Berechnen Sie, jeweils unmittelbar vor dem Auftreffen, die Geschwindigkeit von m_2, die Winkelgeschwindigkeit der Rolle und die Zugkräfte in den beiden Seilabschnitten. Wie groß ist die Fallzeit von m_2? Das Seil soll schlupffrei über die Rolle laufen (Seil und Rolle bewegen sich gleich schnell) und immer gespannt sein.

Variante 1) Wir stellen für beide Massen wieder das Kräftegleichgewicht auf. (Kräfte die in $-\vec{e}_y$-Richtung zeigen, erhalten ein Minus)

· Masse 1: $F_{S1} - m_1 g = m_1 a$ (1)

· Masse 2: $F_{S2} - m_2 g = -m_2 a$ (2)

- an der Rolle wirkt eine Kraft, deshalb sind F_{S1} und F_{S2} nicht gleich

↳ diese Kraft F_r bewirkt ein Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ auf die Rolle $\vec{r} \perp \vec{F} \Rightarrow M = r F_r$ zudem $M = \underbrace{J_A}_{\text{Trägheitsmoment}} \cdot \overbrace{\alpha}^{\text{Winkelbeschleunigung}}$

$\Rightarrow F_r = F_{S2} - F_{S1} = \frac{M}{r} = \frac{J_A}{r} \alpha$ $(F_{S2} > F_{S1})$

- mit $J_A = \frac{m_r}{2} r^2$ und $\alpha = \frac{a}{r}$ (Rollbedingung) folgt

$F_{S1} = F_{S2} - \frac{m_r}{2} r \cdot \frac{a}{r} = F_{S2} - \frac{m_r}{2} a$

- Setzen wir die in (1) ein:

$$
\begin{aligned}
\cancel{F_{S2}} - \tfrac{m_r}{2}a - m_1 g &= m_1 a \\
-\left(\cancel{F_{S2}} \qquad - m_2 g \right. &= \left. -m_2 a \right) \\
\hline
-\tfrac{m_r}{2}a + \underbrace{(m_2 - m_1)}_{m_{eff}} g &= \underbrace{(m_1 + m_2)}_{m_{ges}} a
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + m_r/2}}} = \frac{30\,kg - 20\,kg}{20\,kg + 30\,kg + 2{,}5\,kg}\, g = 1{,}87 \,\frac{m}{s^2}
$$

Variante 2) Wir berechnen wie oben die Kraft auf die Rolle $F_r = \frac{m_r}{2} a$

- die effektive Masse des Systems ist $m_{eff} = m_2 - m_1$, welche mit g beschleunigt wird

$$\Rightarrow F_{eff} - F_r = (m_1 + m_2)\, a$$

- nach Newton III ist F_r der Rolle der Bewegung entgegengerichtet (daher das Minus)

$$\Rightarrow (m_2 - m_1) g - \frac{m_r}{2} a = (m_1 + m_2)\, a$$

- Dies führt uns auf das gleiche Ergebnis wie oben!

Mit der Beschleunigung können wir nun die Seilkräfte, (Winkel)Geschwindigkeit und Seilkraft berechnen

$$h = \frac{a}{2} t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = 1{,}46\,s$$

$$v = at \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2ha} = 2{,}73\,\frac{m}{s}$$

$$v = \omega r \quad \Rightarrow \quad \omega = v/r = \sqrt{\frac{2ha}{r^2}} = 27{,}3\,\frac{1}{s}$$

Bestimmung der Seilkräfte

$$F_{S1} = m_1 g + m_1 a = m_1 (a + g) = 233{,}6\,N$$

$$F_{S2} = m_2 g - m_2 a = m_2 (g - a) = 238{,}2\,N$$

Aufgabe 32 (Trägheitsmoment)

a) Wie kann man sich die aktive Veränderung des Trägheitsmoments beim Sport zunutze machen?

b) Wie kann man das Trägheitsmoment eines zusammengesetzten Körpers bestimmen?

a.) Beim Eiskunstlauf. Bei einer Pirouette zieht die Läuferin ihre Arme ein und verringert ihr Trägheitsmoment. Nach Drehimpulserhaltung ist

$L = J_A \cdot \omega = \text{const.}$ Sinkt also J_A, so erhöht sich die Winkelgeschwindigkeit.

b.) Wir addieren die Trägheitsmomente bezüglich der Rotationsachse auf. Dabei Satz von Steiner beachten!