

7. Übung

Samstag, 2. Dezember 2023 23:16

*Aufgabe 25 (Drehmoment)

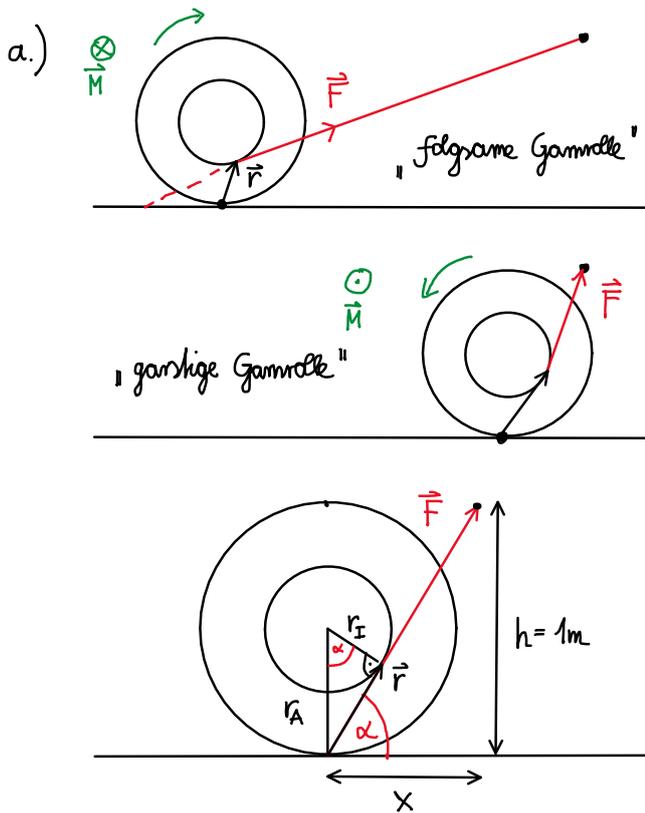
Sie sitzen auf einem Stuhl und sind gerade mit der Verdrahtung eines Experiments beschäftigt. Als Sie ein Kabel von einer Kabelrolle (ähnlich dem nebenstehenden Bild) zu sich ziehen, fällt diese vom Tisch, rollt quer durch das Labor davon und kommt in rollbarer Lage mit dem Kabel auf der Unterseite (es zeige in Ihre Richtung) zum Stehen. Der Außendurchmesser der Kabelrolle betrage $D_A = 10\text{ cm}$. Die Abrollfläche des Kabels habe einen Durchmesser von $D_I = 5\text{ cm}$.



a) Sie versuchen nun die Rolle zu sich heranzuholen, indem sie vorsichtig am Kabel ziehen ($h = 1\text{ m}$ über dem Boden). Dies funktioniert zunächst und die Rolle rollt auf Sie zu, ändert dann aber die Richtung und kommt nach etwas Hin- und Herpendeln zum Stehen. Erklären Sie diese Beobachtung!

b) In welcher Entfernung kommt die Rolle zum Stehen?

(Bemerkung: Es gebe keine Änderung des Durchmessers der Abrollfläche!)



- die Rolle dreht sich um den Auflagepunkt
- die Kraft wirkt entlang des Kabels und greift am Innenkreis (Abrollfläche) der Spule an
- zu Beginn liegt die Wirklinie des Kraftvektors hinter der Rolle, das Drehmoment \vec{M} zeigt in die Zeichenebene. $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
- nach der Rechte-Hand-Regel bewirkt dies eine Drehung nach rechts
- kommt die Rolle zu nah, liegt die Wirklinie des Kraftvektors vor dem Auflagepunkt
- ⇒ Das Drehmoment ändert sein Vorzeichen
- ⇒ Die Rolle wird gebremst und rollt danach wieder nach links
- verläuft die Wirkungslinie des Kraftvektors \vec{F} durch den Auflagepunkt, so ist $\vec{F} \parallel \vec{r}$ und $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$.
- ⇒ die Rolle erfährt kein Drehmoment mehr und kommt nach der Pendelbewegung zum Stehen

• wir erhalten den Grenzwinkel α über $\cos \alpha = \frac{r_I}{r_A}$

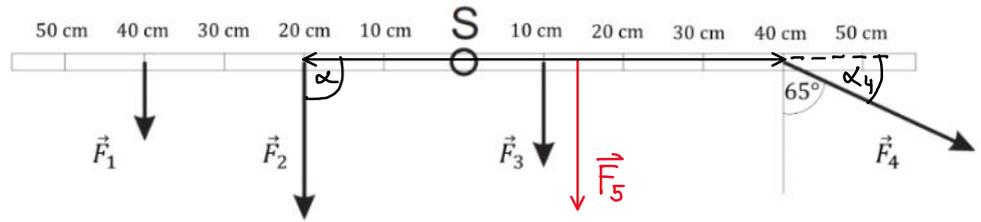
• dem gesuchten Abstand x bekommen wir über $\tan \alpha = \frac{h}{x}$

es gilt allgemein $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1} = \sqrt{\left(\frac{r_A}{r_I}\right)^2 - 1}$

⇒ $x = \frac{h}{\tan \alpha} = \frac{h}{\sqrt{\left(\frac{r_A}{r_I}\right)^2 - 1}} = \frac{1\text{ m}}{\sqrt{\left(\frac{10\text{ cm}}{5\text{ cm}}\right)^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\text{ m} \approx \underline{\underline{0,58\text{ m}}}$

*Aufgabe 26 (Drehmoment)

Eine Stange ist um eine senkrecht durch den Schwerpunkt S gehende Achse drehbar gelagert. An der Stange greifen die eingezeichneten Kräfte mit $F_1 = 20\text{ N}$, $F_2 = 40\text{ N}$, $F_3 = 30\text{ N}$ und $F_4 = 80\text{ N}$ an. 15 cm rechts vom Schwerpunkt greift eine vertikal gerichtete Kraft \vec{F}_5 an. Danach befindet sich die Stange im Gleichgewicht. Welchen Betrag und welche Orientierung hat diese Kraft?



Das Gesamtdrehmoment muss verschwinden. Alternativ: die Summe der Beträge der Drehmomente muss gleich sein

$$\vec{M}_{\text{ges}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \stackrel{!}{=} 0 \quad \sum_{i, \text{links}} |\vec{r}_i \times \vec{F}_i| = \sum_{i, \text{rechts}} |\vec{r}_i \times \vec{F}_i|$$

• für die Beträge gilt: $M = |\vec{r} \times \vec{F}| = r \cdot F \cdot \sin \alpha$

• für $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_5$ ist $\sin \alpha = 1$

$$\Rightarrow r_1 \cdot F_1 + r_2 \cdot F_2 = r_3 \cdot F_3 + r_4 \cdot F_4 \cdot \sin(90^\circ - 65^\circ) + r_5 \cdot F_5$$

$$\Rightarrow F_5 = \frac{1}{r_5} (r_1 F_1 + r_2 F_2 - r_3 F_3 - r_4 F_4 \sin(25^\circ))$$

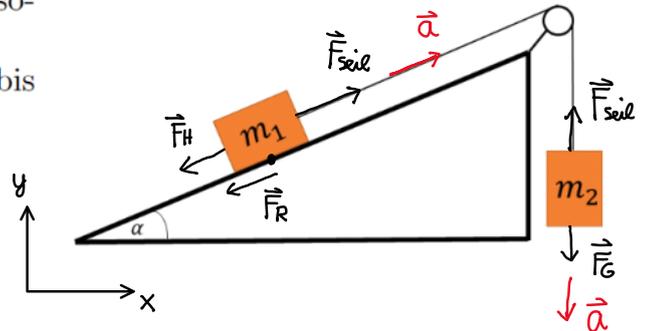
$$= \frac{1}{15 \text{ cm}} (40 \text{ cm} \cdot 20 \text{ N} + 20 \text{ cm} \cdot 40 \text{ N} - 10 \text{ cm} \cdot 30 \text{ N} - 40 \text{ cm} \cdot 80 \text{ N} \cdot \sin(25^\circ))$$

$$F_5 = \underline{\underline{-3,5 \text{ N}}} \rightarrow F_5 \text{ muss nach oben orientiert sein!}$$

*Aufgabe 27 (Kräfte)

Zwei Körper $m_1 = 2\text{ kg}$ und $m_2 = 3\text{ kg}$ sind über ein masseloses Seil miteinander verbunden. m_1 bewegt sich auf einer schiefen Ebene mit der Steigung $\alpha = 30^\circ$ gegenüber der Horizontalen und einem Gleitreibungskoeffizienten von 0,5. Die Rolle sei reibungsfrei und masselos. Das System wird aus der Ruhe losgelassen.

- Bestimmen Sie die Beschleunigung der Blöcke sowie die Zugkraft im Seil!
- Berechnen Sie die Energie, welche von $t_0 = 1\text{ s}$ bis $t = 2\text{ s}$ in Reibung umgewandelt wird!



a.) an m_2 : $\vec{F}_{\text{Seil}} + \vec{F}_{\text{ext.}} = m_2 \vec{a}$

$$F_{\text{Seil}} - m_2 g = -m_2 a \quad (1)$$

an m_1 : $\vec{F}_{\text{Seil}} + \vec{F}_{\text{ext.}} = m_1 \vec{a}$

$\vec{F}_{\text{ext.}} = \vec{F}_H + \vec{F}_R$ da \vec{F}_H, \vec{F}_R und \vec{F}_{Seil} entlang einer Linie liegen, lassen wir die Vektorpfeile weglassen.

$$\Rightarrow m_1 g (\mu_H \cos \alpha + \sin \alpha) - F_{\text{Seil}} = -m_1 a \quad (2)$$

$$F_H = m_1 g \sin \alpha$$

Eliminiere die Seilkraft durch (1) + (2)

$$F_R = \mu_H F_N = \mu_H m_1 g \cos \alpha$$

$$m_1 g (\mu_H \cos \alpha + \sin \alpha) - m_2 g = -(m_1 + m_2) a$$

$$\Rightarrow a = \frac{m_2 g - m_1 g (\mu_H \cos \alpha + \sin \alpha)}{m_1 + m_2} = \frac{3\text{ kg} - 2\text{ kg} (0,5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2})}{5\text{ kg}} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \underline{\underline{2,22 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$

$$\Rightarrow \text{mit (1) folgt: } F_{\text{Seil}} = m_2 (g - a) = 3\text{ kg} (9,81 - 2,22) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \underline{\underline{22,77\text{ N}}}$$

b) $W = F_R \cdot \Delta s = F_R (s(t) - s(t_0))$ $s(t) = \frac{a}{2} t^2$

$$= \mu_H m_1 g \cos \alpha \frac{a}{2} \underbrace{(t^2 - t_0^2)}_{4\text{ s}^2 - 1\text{ s}^2} = 0,5 \cdot 2\text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cos(30^\circ) \frac{2,22}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3\text{ s}^2 = \underline{\underline{28,29\text{ J}}}$$

Aufgabe 28 (Drehmoment)

Ein kleines Schwungrad (Trägheitsmoment $J = 3,0 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$) werde mittels eines Elektromotors, der auf ein konstantes Drehmoment von $M = 0,001 \text{ Nm}$ geregelt ist, in Rotation versetzt.

- a) Wie groß ist die Winkelbeschleunigung α ? Leiten Sie die Bewegungsgleichungen für den Winkel $\varphi(t)$ und die Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ her.
- b) Wie groß ist die Leistung des Motors in Abhängigkeit von der Zeit $P(t)$. Das Schwungrad soll am Ende mit einer Drehzahl von $N = 12000/\text{min}$ laufen. Wieviel Energie steckt dann in seiner Drehbewegung? Wie lange dauert die Beschleunigung aus dem Stand? Welche Leistung muss der Elektromotor mindestens abgeben können, damit das konstante Drehmoment bis zum Erreichen der Endgeschwindigkeit aufrecht erhalten werden kann.
- a.) Wir identifizieren die Parameter der Kreisbewegung zur geradlinigen Bewegung und benutzen Newton II

Drehbewegung	geradl. Bewegung	
Drehmoment \vec{M}	Kraft \vec{F}	$\Rightarrow \vec{F} = m \vec{a} \Leftrightarrow \vec{M} = J \cdot \vec{\alpha}$
Trägheitsmoment J	Masse m	$\Rightarrow \alpha = \frac{M}{J} = \frac{0,001 \text{ Nm}}{3 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2} = 33 \frac{1}{\text{s}^2}$
Winkelbesch. α	Beschl. a	

Durch Integration erhalten wir $\omega(t) = \int_{t_0}^t \alpha dt' = \alpha t + \omega_0$

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t \omega(t') dt' = \frac{1}{2} \alpha t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$$

b.) Leistung $P = \frac{dE_{\text{rot}}}{dt}$

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \omega(t)^2 \Rightarrow P = J \omega(t) \cdot \frac{d\omega}{dt} = \underline{J \alpha (\alpha t + \omega_0)}$$

$$\nearrow \text{Vgl. } E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} v^2$$

Ende: $N = 12000/\text{min} = 200/\text{s} \Rightarrow \omega = 2\pi f$
 \uparrow auch Frequenz f

$$\Rightarrow E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} J (2\pi f)^2 = 2\pi^2 J f^2 = 2 \cdot 9,81 \cdot 3 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2 (200/\text{s})^2 = \underline{\underline{23,7 \text{ J}}}$$

Dauer der Beschleunigung $\omega = \alpha t \Rightarrow t = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{2\pi \cdot 200/\text{s}}{33/\text{s}^2} = \underline{\underline{37,7 \text{ s}}}$

maximal benötigte Leistung:

$$P_{\text{max}} = J \omega_{\text{end}} \cdot \alpha = 3 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2 \cdot 2\pi \cdot 200/\text{s} \cdot 33/\text{s}^2 = \underline{\underline{1,26 \text{ W}}}$$