6. Übung

Donnerstag, 30. November 2023 16:30

*Aufgabe 22 (Stoss)

Ein punktförmiges Teilchen der Masse $m_1 = 2\,\mathrm{kg}$, welches sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_1 = 3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\vec{e}_x + 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\vec{e}_y - 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\vec{e}_z$ bewegt, stößt vollkommen unelastisch mit einem zweiten punktförmigen Teilchen der Masse $m_2 = 3\,\mathrm{kg}$, welches sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_2 = -2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\vec{e}_x + 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\vec{e}_y + 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\vec{e}_z$ bewegt.

a) Bestimmen Sie die gemeinsame Geschwindigkeit der Teilchen nach dem Stoß!

b) Berechnen Sie den Anteil der anfänglichen kinetischen Energie der Teilchen, der bei dem Stoß in Wärme bzw. Deformierung der Teilchen umgewandelt wurde!

$m_1 = 2\,\mathrm{kg}$ $\quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}\frac{m}{s} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}\frac{m}{s}$

$m_2 = 3\,\mathrm{kg}$

- beim inelastischen Stoß gilt die Energieerhaltung (mechanisch) nicht mehr, nur noch Impulserhaltung
- vollkommen inelastisch : gemeinsame Bewegung nach dem Stoß

a) $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1+m_2)\,\vec{u}$

$$\Rightarrow \vec{u} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_2 = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}\frac{m}{s} + \frac{3}{5}\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}\frac{m}{s} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}\frac{m}{s}}}$$

b) $2\Delta E = 2E_{kin,1} + 2E_{kin,2} - 2\underbrace{E'_{kin}}_{\text{nach dem Stoß}} = m_1|\vec{v}_1|^2 + m_2|\vec{v}_2|^2 - (m_1+m_2)\,|\vec{u}|^2$

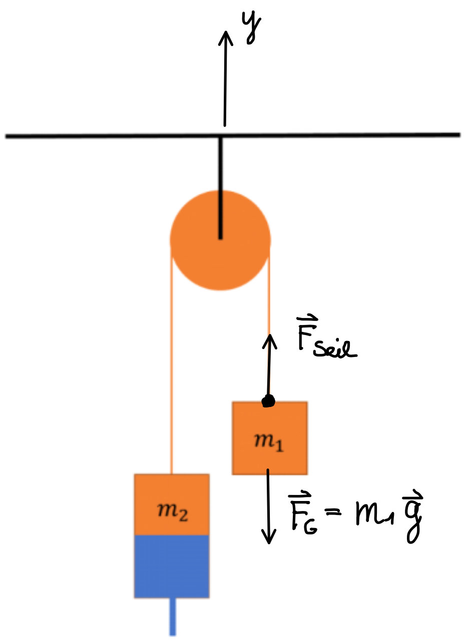
$$= 2\,\mathrm{kg}\,(9+4+1)\,\frac{m^2}{s^2} + 3\,\mathrm{kg}\,(4+4+16)\,\frac{m^2}{s^2} - 5\,\mathrm{kg}\,(4+4)\,\frac{m^2}{s^2}$$

$$= 28\,\mathrm{J} + 72\,\mathrm{J} - 40\,\mathrm{J} = 60\,\mathrm{J}$$

$$\Rightarrow \Delta E = \underline{\underline{30\,\mathrm{J}}}$$

*Aufgabe 23 (Kräfte)

Eine Masse m_1 ist mit einem Seil über einen Flaschenzug mit einem Wasserbehälter verbunden, der anfangs eine Masse $m_2(t=0) = m_0$ hat, wie in der Abbildung dargestellt. Das System wird dann losgelassen und m_2 stößt (mit Hilfe einer internen Pumpe) Wasser mit einer konstanten Rate $\mathrm{d}m_2/\mathrm{d}t = -k$ mit einer Geschwindigkeit v_0 relativ zum Behälter nach unten aus. Bestimmen Sie die Beschleunigung der Masse und des Behälters als Funktion der Zeit. Vernachlässigen Sie die Massen des Seils und des Flaschenzugs.



Kraftansatz an Masse m_1: $\quad \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{Seil} = m_1\vec{a}_1$

$$\vec{F}_{Seil} = m_1\vec{a}_1 - m_1\vec{g} \qquad (1)$$

$$\frac{dm_2}{dt} = -k \quad \Big| \int_0^t \ldots dt'$$

$$\Rightarrow m_2(t) = m_0 - kt$$

An der Masse m_2 benutzen wir die allgemeine Form von Newton II

$$\vec{F}_{Seil} + \underbrace{\vec{F}_{ext}}_{m_2(t)\vec{g}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{p}_2}{dt}}_{\text{Masse } m_2} + \underbrace{\frac{d\vec{p}_W}{dt}}_{\text{ausgestoßenes Wasser}} \qquad (*)$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m_2(t)\,\vec{v}_2(t)\right) = \underbrace{\frac{dm_2}{dt}}_{-k}\vec{v}_2(t) + m_2(t)\,\vec{a}_2(t) = -k\vec{v}_2(t) + (m_0 - kt)\,\vec{a}_2(t) \qquad (2)$$

· für das Wasser schauen wir uns eine kleine Wassermenge Δm an, das sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_2(t) + \vec{v}_0$ bewegt.

$$\Rightarrow \Delta\vec{p}_W = \Delta m_W \left(\vec{v}_2(t) + \vec{v}_0\right) \qquad | : \Delta t$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\Delta\vec{p}_W}{\Delta t}}_{\frac{d\vec{p}_W}{dt}} = \underbrace{\frac{\Delta m_W}{\Delta t}}_{\frac{dm_W}{dt} = -\frac{dm_2}{dt} = k}\left(\vec{v}_2(t) + \vec{v}_0\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}_W}{dt} = k\left(\vec{v}_2(t) + \vec{v}_0\right) \qquad (3)$$

Nun setzen wir die Seilkraft aus (1) und die Impulsänderung (2) und (3) in (*) ein $\quad (\vec{a}_1 = -\vec{a}_2)$

$$\Rightarrow -m_1\vec{a}_2 - m_1\vec{g} + (m_0 - kt)\vec{g} = -\cancel{k\vec{v}_2(t)} + (m_0 - kt)\,\vec{a}_2(t) + \cancel{k\vec{v}_2(t)} + k\vec{v}_0$$

$$\Rightarrow \vec{a}_2\left(kt - m_0 - m_1\right) = k\vec{v}_0 - (m_0 - m_1 - kt)\vec{g}$$

$$\vec{a}_2 = \frac{k\vec{v}_0 + (m_0 - m_1 - kt)\vec{g}}{(m_1 + m_0 - kt)}$$

· wir können uns die erhaltene Gleichung plausibel machen, indem wir die Gesamtmasse m_g und die effektive Masse Δm des Systems einführen

$$m_g = m_2(t) + m_1 = m_0 + m_1 - kt$$
$$\Delta m = m_2(t) - m_1 = m_0 - m_1 - kt$$

$$\Rightarrow \underbrace{m_g\,\vec{a}_2}_{\text{Beschleunigung des Gesamtsystem}} = \underbrace{\Delta m\,\vec{g}}_{\text{effektive Gewichtskraft}} - k\vec{v}_0 \leftarrow \text{Rückstoß durch das austretende Wasser (nach oben, da } \vec{v}_0 \parallel -\vec{e}_y)$$

<u>Alternative Lösung:</u> Wir begeben uns in ein mitbewegtes Bezugssystem

· hier bewegt sich m_2 nicht: $\vec{v}_2(t) = 0$

$$\rightarrow \frac{d\vec{p}_2}{dt} = m_2\frac{d\vec{v}_2}{dt} = m_2\,\vec{a}_2 \quad , \quad \frac{d\vec{p}_W}{dt} = k\vec{v}_0$$

· wir können dies nun in (*) einsetzen:

$$\vec{F}_{Seil} + \vec{F}_{ext} = m_2\vec{a}_2 + k\vec{v}_0$$

$$\Rightarrow \underbrace{m_1\vec{a}_1}_{-m_1\vec{a}_2} - \underbrace{m_1\vec{g} + m_2(t)\vec{g}}_{\Delta m\,\vec{g}} = m_2\,\vec{a}_2 + k\vec{v}_0$$

$$\underbrace{(m_1 + m_2)}_{m_g}\,\vec{a}_2 = \Delta m \quad - k\vec{v}_0 \qquad \checkmark$$

Aufgabe 24 (Stoss)

a) Was passiert mit der „verlorenen“ Energie bei einem inelastischen Stoß?
b) Warum ist bei einem Verkehrsunfall in der Regel das schwerere Fahrzeug im Vorteil?

a) Die Energie wird in andere Energieformen wie Verformung des Materials oder Wärme umgewandelt

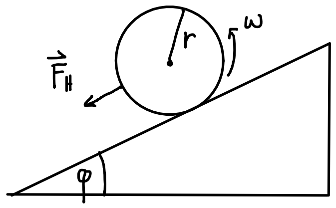
b) Beide Fahrzeuge üben aufeinander die gleiche Kraft aus. (Newton III)
Allerdings ist die Beschleunigung auf das kleine Fahrzeug umgekehrt proportional zur Masse größer

<u>Übungsaufgabe</u>

Ein Hohlzylinder (Wandstärke gegen Null) und ein Vollzylinder gleicher Masse und gleichen Durchmessers werden am oberen Ende einer schiefen Ebene gleichzeitig losgelassen.

a) Berechnen Sie das Verhältnis der Rollzeiten für gleichen überwundenen Höhenunterschied!
b) Bei welchem Anstellwinkel würden die Zylinder anfangen mit rutschen, wenn der Reibungskoeffizient $\mu_r = 0{,}20$ beträgt.

<u>Variante 1)</u> Translation des Schwerpunktes + Rotation



- Rollbedingung $v = \omega \cdot r$
- Kraftansatz nach Newton II

$$mg \cdot \sin\varphi - \underbrace{F_r}_{} = ma \quad (1)$$

Reibungskraft aufgrund der Rollbewegung, wird durch ein Drehmoment erzeugt

$$M = r \cdot F_r \quad (\text{da } \vec{r} \perp \vec{F}_r)$$

$$\Rightarrow r F_r \stackrel{!}{=} J_A \cdot \alpha = J_A \cdot \frac{a}{r}$$

$$mg \sin\varphi - J_A \frac{a}{r^2} = ma$$

$$\Rightarrow a = \frac{mg \sin\varphi}{m + J_A/r^2}$$

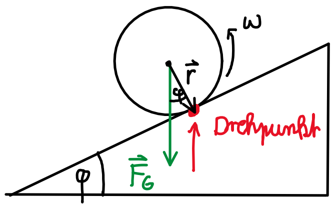
setze nun J_A ein: $\begin{cases} \text{Vollzylinder} & J_A = \frac{1}{2} mr^2 \\ \text{Hohlzylinder} & J_A = mr^2 \end{cases}$ $\quad a = \frac{2}{3} g \sin\varphi = \frac{2}{3} g$; $\quad a = \frac{1}{2} g \sin\varphi = \frac{1}{2} g$

Spezialfall $\varphi = 90°$

<u>Variante 2)</u> Abrollbewegung um den Auflagepunkt

- Drehmoment:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_G \Rightarrow M = r \cdot F_G \cdot \sin\varphi \stackrel{!}{=} J_A' \cdot \alpha \leftarrow \frac{a}{r}$$

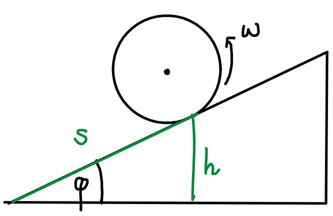


- das Trägheitsmoment für eine Drehung um den Auflagepunkt ergibt sich nach dem Satz von Steiner zu $J_A' = J_A + mr^2$

- wir erhalten also:

$$r \cdot mg \cdot \sin\varphi = (J_A + mr^2) \frac{a}{r} \Rightarrow a = \frac{r^2 mg \sin\varphi}{mr^2 + J_A} = \frac{mg \sin\varphi}{m + J_A/r^2}$$

<u>Variante 3)</u> Energieerhaltung $\quad h = s \cdot \sin\varphi$



$$mg\, s \sin\varphi = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} J_A \omega^2$$

- nutze wieder die Rollbedingung: $v = \omega \cdot r$, setze zudem $s = \frac{a}{2} t^2$, $v = at$

$$\Rightarrow mg \frac{a}{\cancel{2}} \sin\varphi\, \cancel{t^2} = \frac{1}{\cancel{2}} m (a\cancel{t})^2 + \frac{1}{\cancel{2}} J_A \frac{(a\cancel{t})^2}{r^2}$$

$$mg \sin\varphi\, \cancel{a} = ma^{\cancel{2}} + J_A \frac{a^{\cancel{2}}}{r^2} \Rightarrow a = \frac{mg \sin\varphi}{m + J_A/r^2}$$

b.) Wir beginnen ausgehend von der Rechnung in Variante 1

Reibungskraft: $F_R = \mu F_N = \mu mg \cos\varphi$

$\rightarrow$ die Beschleunigung aus Gleichung (1) beschreibt die Translation der Rolle

$$mg\sin\varphi - F_R = ma_T$$
$$\cancel{m}g(\sin\varphi - \mu\cos\varphi) = \cancel{m}a_T$$

$\rightarrow$ die drehende Beschleunigung ergibt sich über das Drehmoment

$$M = F_r \cdot r = \mu m g \cos\varphi \cdot r \overset{!}{=} J_A \alpha = J_A \frac{a_{dreh}}{r}$$

- der Zylinder beginnt zu rutschen, wenn $a_T > a_{dreh}$

$$\Rightarrow (\sin\varphi - \mu\cos\varphi)\cancel{g} > \frac{r^2}{J_A} m\cancel{g}\cos\varphi \cdot \mu$$

$$\Rightarrow \quad \sin\varphi > \frac{\mu m r^2}{J_A}\cos\varphi + \mu\cos\varphi$$

$$\tan\varphi > \underline{\underline{\mu\left(\frac{mr^2}{J_A} + 1\right)}}$$

$$\begin{cases} \text{Vollzylinder} & \tan\varphi > \mu(2+1) \Rightarrow \varphi > 31° \\ \text{Hohlzylinder} & \tan\varphi > \mu(1+1) \Rightarrow \varphi > 21{,}8° \end{cases}$$