5. Übung

Dienstag, 14. November 2023 11:13

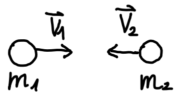
*Aufgabe 19 (Stoss)

Ein Güterwaggon der Masse m_1 mit der Geschwindigkeit v_1 stößt elastisch gegen einen still stehenden Waggon der Masse m_2. In welchem Verhältnis m_1/m_2 stehen ihre Massen zueinander, wenn nach dem Stoß

a) beide Wagen mit der selben Geschwindigkeit entgegengesetzt auseinander fahren.
b) m_2 die 3fache Geschwindigkeit gegenüber m_1 hat, wobei beide in die gleiche Richtung fahren.
c) m_1 mit einem drittel seiner ursprünglichen Geschwindigkeit zurückprallt?

- beim elastischen Stoß gilt sowohl Impuls- als auch Energieerhaltung

$\vec{v}$ - Geschwindigkeit vor dem Stoß
$\vec{u}$ - Geschwindigkeit nach dem Stoß



$\Rightarrow$ Impulserhaltung: $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$

Energieerhaltung: $\cancel{\tfrac{1}{2}} m_1 v_1^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}} m_2 v_2^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}} m_1 u_1^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}} m_2 u_2^2$

- Spezialfall: $v_2 = 0$, frontaler Zusammenstoß (1D Problem)

$$\Rightarrow m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \qquad (1)$$
$$m_1 v_1^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 \qquad (2)$$

- Elimination von v_1

$$(m_1 v_1)^2 = m_1^2 u_1^2 + m_2^2 u_2^2 + 2 m_1 m_2 u_1 u_2 \qquad \Big| : m_1$$
$$m_1 v_1^2 = m_1 u_1^2 + \frac{m_2^2}{m_1} u_2^2 + 2 m_2 u_1 u_2 \qquad (3)$$

$$(2) = (3) \Rightarrow \cancel{m_1 u_1^2} + m_2 u_2^2 = \cancel{m_1 u_1^2} + \frac{m_2^2}{m_1} u_2^2 + 2 m_2 u_1 u_2 \qquad \Big| : (m_2 u_2),\ u_2 \neq 0$$
$$\Rightarrow u_2 = \frac{m_2}{m_1} u_2 + 2u_1$$
$$\Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \frac{u_2 - 2u_1}{u_2} = \underline{\underline{1 - 2\frac{u_1}{u_2}}} \qquad (4)$$

a.) $u_1 = -u_2$: $\frac{m_2}{m_1} = 3 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}$ //

b) $u_2 = 3u_1$ $\frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = 3$ //

c) wir haben hier v_1 und u_1 gegeben. Wir lösen also (4) nach u_2 auf und setzen dies in (1) ein

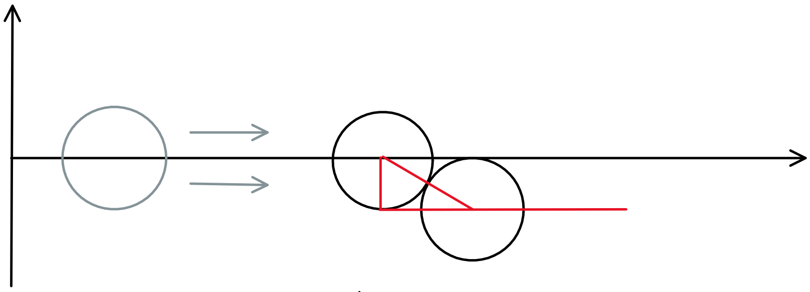
$$\Rightarrow u_2 = \frac{2u_1}{1 - \frac{m_2}{m_1}}$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} m_1 v_1 = m_1 u_1 + \frac{2m_2}{1 - m_2/m_1} u_1 \qquad \Big| : m_1 u_1$$
$$\Rightarrow \frac{v_1}{u_1} = 1 + 2\frac{m_2}{m_1}\frac{1}{1 - m_2/m_1} = 1 + \frac{2}{m_1/m_2 - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_2} - 1 = \frac{2}{v_1/u_1 - 1} \qquad \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = 1 + \frac{2}{v_1/u_1 - 1} \overset{v_1 = -3u_1}{=} 1 - \frac{2}{3+1} = \frac{1}{2}$$ //

*Aufgabe 20 (Stoss)

Ein runder Air Hockey Puck (Masse $m = 100\,\mathrm{g}$, Radius $r = 2\,\mathrm{cm}$) bewegt sich entlang der Bahn $\vec{r}_1 = 100\,\mathrm{cm/s} \cdot t \cdot \vec{e}_x$ auf einem horizontalen Tisch und stößt elastisch mit einem identischen, ruhenden Puck der sich an der Position $\vec{r}_2 = 100\,\mathrm{cm} \cdot \vec{e}_x - 2\,\mathrm{cm} \cdot \vec{e}_y$ befindet. Bestimmen Sie die Geschwindigkeiten $\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$ der beiden Pucks nach dem Stoß. Vernachlässigen Sie Reibung zwischen Pucks und Tisch sowie zwischen den beiden Pucks.

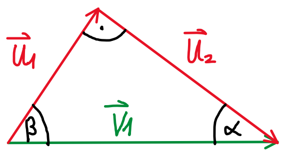


Stoßwinkel $\sin\alpha = \frac{2\,cm}{4\,cm} = \frac{1}{2} \curvearrowright \alpha = 30° = \frac{\pi}{6}$ rad , $m = 100g$ $\quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{1x} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100\,cm/s \\ 0 \end{pmatrix}$

· Impulserhaltung $\cancel{m}\vec{v}_1 = \cancel{m}\cdot\vec{u}_1 + \cancel{m}\vec{u}_2 \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \Rightarrow$ $v_{1x} = u_{1x} + u_{2x}$
$0 = u_{1y} + u_{2y}$

· Energieerhaltung $\cancel{m}v_1^2 = \cancel{m}u_1^2 + \cancel{m}u_2^2 \Rightarrow \underbrace{v_1^2 = u_1^2 + u_2^2}$

das Dreieck aus $\vec{v}_1, \vec{u}_1, \vec{u}_2$ muss rechtwinklig sein



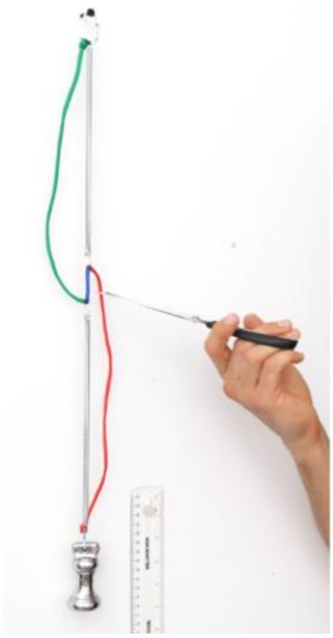
$\Rightarrow \vec{u}_1 = u_1 \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$ $\quad \beta = 90° - \alpha = 60°$

$\cos\beta = \frac{u_1}{v_1} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \vec{u}_1 = \frac{v_1}{2} \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{25\,\frac{cm}{s} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}}}$

$\vec{u}_2 = v_1 \cos\alpha \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{pmatrix} = v_1 \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{25\,\frac{cm}{s} \begin{pmatrix} 3 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}}}$

*Aufgabe 21 (Federkräfte)



Wie in der Abbildung nebenan sei ein Gewicht (m=1kg) an zwei Federn aufgehängt. Die untere Feder sei an der oberen trennbar mit einem Seil angehängt (blau). Zusätzlich sei die untere Feder mit einem Seil (grün, knapp nicht gespannt) an der Halterung der oberen befestigt und das Gewicht am unteren Ende der oberen Feder ebenso (rot).

a) Beide Federn haben die gleiche Federkonstante. Berechnen Sie die Federkonstante der einzelnen Federn, wenn das Gewicht beim Anhängen im Vergleich zu unbelasteten Federn die Ruhelage des Aufhängungspunktes um 20cm nach unten verschiebt.

b) Das blaue Seil werde nun durchtrennt, wodurch die anderen beiden Seile sofort unter Spannung stehen (die Länge der Seile sei so gewählt, dass diese gerade lang genug waren um im Anfangszustand nicht unter Spannung zu stehen). Berechnen Sie, um wie viel und in welche Richtung sich die Ruhelage des Gewichtes nach dem Durchtrennen des blauen Seils durch geänderte Belastung der Federn verschiebt.

a.) In diesem Fall sind die beiden Federn in Reihe geschalten. Die beiden Auslenkungen addieren sich

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = \frac{F_G}{k} + \frac{F_G}{k} = \frac{2F_G}{k}$$

$$\Rightarrow k = \frac{2F_G}{\Delta x} = \frac{2m\cdot g}{\Delta x} = \frac{2\cdot 1kg\cdot 9{,}81\,m/s^2}{0{,}2m} = 98{,}1\,\frac{N}{m}$$

b) Nun ändert sich die Situation. Durch das Spannen der Seile werden die Federn parallel geschalten

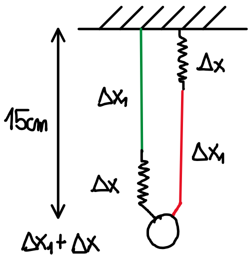
$\Rightarrow$ Nun addieren sich die beiden Kräfte der Federn zur Gesamtkraft

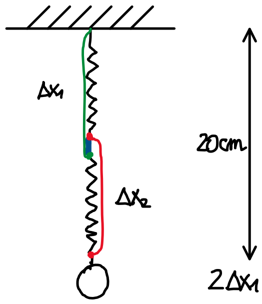
$$F_G = k\Delta x + k\Delta x = 2k\,\Delta x$$

$$\Rightarrow \Delta x = \frac{F_G}{2k} = \frac{mg}{2\cdot 98{,}1\,N/m} = \frac{9{,}81\,N}{20\cdot 9{,}81\,N/m} = 0{,}05\,m = 5cm$$

· Das Gewicht wird nach oben gezogen, jedoch nur um

$$2\Delta x_1 - (\Delta x_1 + \Delta x) = 20cm - 15cm = 5cm$$





Ein anschauliches Video findet sich auf YouTube: The Spring Paradox (Steve Mould)