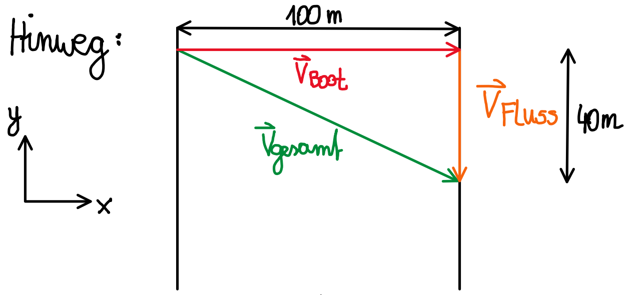
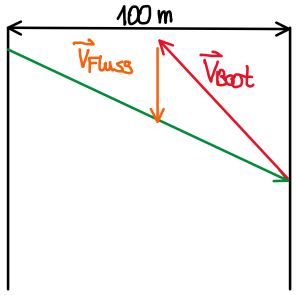
# Übungsserie 2

## *Aufgabe 6 (Kinematik)

Für die Überquerung eines 100 m breiten Flusses benötigt ein Ruderboot 2 Minuten. Dabei steht die Eigengeschwindigkeit des Bootes senkrecht zum Flussufer bzw. zur überall als konstant angenommenen Strömungsgeschwindigkeit des Flusses. Durch den Einfluss der Strömung kommt das Boot 40 m flussabwärts am anderen Ufer an.

a) Der Ruderer möchte nun von seiner Landestelle wieder direkt zum Ausgangspunkt zurückrudern. D.h. die Eigengeschwindigkeit des Bootes darf nun nicht mehr senkrecht zur Fließrichtung des Flusses stehen. Wie lange benötigt er hierfür? Der Betrag der Eigengeschwindigkeit des Bootes ist für Hin- und Rückweg gleich. Fertigen Sie eine Skizze der Situation an!



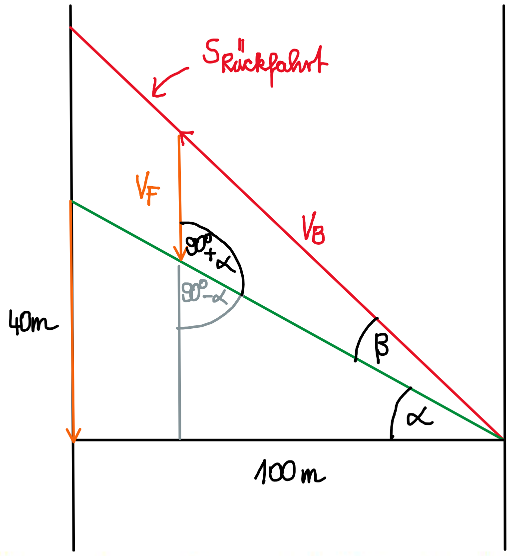

- Berechne zunächst die Eigengeschwindigkeit des Bootes

$$V_B = \frac{x_0}{t_0} = \frac{100\,m}{120\,s} = \frac{5}{6}\,\frac{m}{s} \approx 0{,}83\,\frac{m}{s} \quad \Rightarrow \text{Fließgeschwindigkeit des Flusses: } V_F = \frac{-40\,m}{120\,s} = -\frac{1}{3}\,\frac{m}{s}$$

$$\tan\alpha = \frac{V_F}{V_B} \qquad \text{Sinussatz: } \frac{\sin\beta}{V_F} = \frac{\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})}{V_B} = \frac{\cos\alpha}{V_B}$$

$$\Rightarrow \sin\beta = \frac{V_F}{V_B}\cos\alpha = \frac{V_F/V_B}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{V_F/V_B}{\sqrt{1+(V_F/V_B)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+(V_B/V_F)^2}}$$




Wir erhalten die Länge der Rückfahrt über

$$S_{Rückfahrt} = \frac{100\,m}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{100\,m}{\cos\left[\arctan\left(\frac{V_F}{V_B}\right) + \arcsin\left(\sqrt{1+(V_B/V_F)^2}^{\,-1}\right)\right]}$$

$$= 138{,}1\,m \quad \Rightarrow \quad t = \frac{S_{Rückfahrt}}{V_B} = \underline{165{,}7\,s}$$

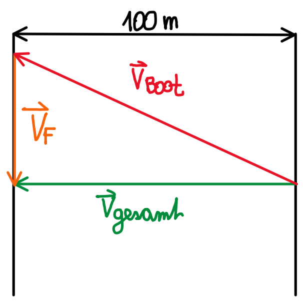
b) Nun soll der Fluss überquert werden, ohne dass das Boot abgetrieben wird. D.h. die direkt gegenüberliegende Stelle des anderen Ufers soll erreicht werden. Wie lange braucht er hierfür?

- für die Überfahrt auf gerader Strecke muss $\vec{V}_y = -\vec{V}_F$ gelten

$\Rightarrow V_y = \frac{1}{3}\,\frac{m}{s}$ mit $V_B^2 = V_x^2 + V_y^2$ folgt

$$\Rightarrow V_x = \sqrt{V_B^2 - V_y^2} = \sqrt{\left(\tfrac{5}{6}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{3}\right)^2}\,\frac{m}{s} = 0{,}76\,\frac{m}{s}$$

$\Rightarrow$ Dauer der Überfahrt: $t = \frac{100\,m}{0{,}76\,m/s} \approx \underline{132\,s}$



## *Aufgabe 7 (Kinematik)

Eine Fallschirmspringerin springt aus einem Flugzeug. Nach 6 s des freien Falls (hier Reibung vernachlässigen) öffnet sie ihren Fallschirm. Nun bremst sie aufgrund der Luftreibung mit $a(t) = -\frac{0{,}3}{\mathrm{m}}\,(v(t))^2$ (die Erdbeschleunigung können Sie **nicht!** vernachlässigen).

a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $v_0$, die die Fallschirmspringerin am Ende des freien Falls hat.

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Fallschirmspringerin am Ende des Abbremsvorgangs ($t \to \infty$).

c) Bestimmen Sie ihre Geschwindigkeit als Funktion der Zeit $v(t)$ für den Bremsvorgang.

a) $V(t{=}6s) = g\,t + \underbrace{V_0}_{0} = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}\cdot 6s = 58{,}9\,\frac{m}{s}$

b) gesamte Beschleunigung des Falls: $a = g - bV^2(t)$

↳ am Ende des Bremsvorgangs gilt $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = 0 \Rightarrow 0 = g - bV_e^2$

$\Rightarrow V_e = \sqrt{\frac{g}{b}} = \sqrt{\frac{9{,}81\,\frac{m}{s^2}}{0{,}3/m}} \approx 5{,}72\,\frac{m}{s} \approx 6\,\frac{m}{s}$

c) Wir müssen die DGL lösen $\frac{dV}{dt} = g - bV^2$ · separabel · 1. Ordnung

$\Rightarrow \int_{V_0}^{V} \frac{1}{g - bV'^2}\,dV' = \int_{t_0}^{t} dt' = t - t_0$

Löse das Integral durch Substitution:

$$\int_{V_0}^{V} \frac{1}{g - bV'^2}\,dV' = \frac{1}{g}\int_{V_0}^{V} \frac{1}{1 - (V/V_e)^2}\,dV \underset{u = V/V_e}{=} \frac{V_e}{g}\int_{V_0/V_e}^{V/V_e} \frac{1}{1-u^2}\,du$$

Lösung durch Partialbruchzerlegung $\frac{1}{1-u^2} = \frac{A}{1+u} + \frac{B}{1-u} \Rightarrow 1 = A(1-u) + B(1+u)$

$u^0:\ 1 = A + B$
$u^1:\ 0 = B - A$ $\Big\}\ B = A = \frac{1}{2}$

$$\frac{V_e}{g}\int_{V_0/V_e}^{V/V_e} \frac{du}{1-u^2} = \frac{V_e}{2g}\int_{V_0/V_e}^{V/V_e}\left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}\right)du$$

$V_0 = 58{,}9\,\frac{m}{s}$

$$= \frac{V_e}{2g}\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right)\Bigg|_{V_0/V_e}^{V/V_e} = \frac{V_e}{2g}\ln\left[\frac{V_e+V}{V_e-V}\cdot\frac{V_e-V_0}{V_e+V_0}\right] \overset{!}{=} t - t_0$$

$$\Rightarrow \frac{V+V_e}{V-V_e} = \underbrace{\frac{V_0+V_e}{V_0-V_e}}_{A}\exp\Big[\underbrace{\frac{2g}{V_e}(t-t_0)}_{=:x}\Big]$$

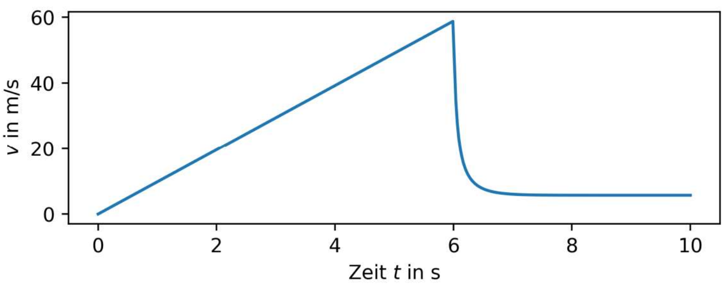
$\frac{2g}{V_e} = \frac{2\cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}}{5{,}72\,\frac{m}{s}} = \frac{3{,}43}{s}$

$\Rightarrow V + V_e = (V - V_e)\,Ae^x$

$\Rightarrow V(1 - Ae^x) = -V_e(Ae^x + 1)$

$\Rightarrow V = V_e\,\frac{Ae^x+1}{Ae^x-1} = V_e\left[1 + \frac{2}{Ae^x - 1}\right]$

$$\Rightarrow \underline{\underline{V(t) = 5{,}72\,\frac{m}{s}\left(1 + \frac{2}{1{,}22\exp\left(\frac{3{,}43}{s}(t-6s)\right) - 1}\right)}}$$



## Aufgabe 8 (Kinematik)

Ein Monstertruck (Masse 4 t) soll einen 61 m weiten Sprung machen. Der Winkel der Absprungrampe in Relation zum ebenen Boden sei $\phi$. Die Reibung sei vernachlässigbar. Auftreffpunkt und Absprungpunkt seien auf gleicher Höhe.

a) Stellen sie eine Gleichung für die Bahnkurve des Sprunges auf.

b) Unter welchem Winkel muss die Absprungrampe zum Boden ausgerichtet sein, damit die Absprunggeschwindigkeit um diesen Sprung zu schaffen möglichst gering ist? Leiten Sie eine entsprechende Formel her, aus der sich dieser optimale Winkel ergibt.

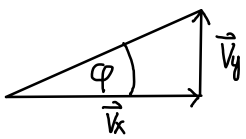
c) Welche Geschwindigkeit muss der Monstertruck für diesen Winkel beim Absprung haben?

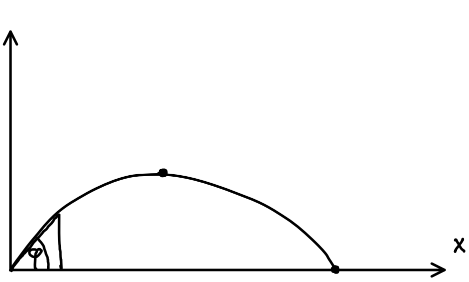
d) Welche maximale Höhe erreicht der Monstertruck über dem Boden?

e) Wie groß sind die Horizontal- und Vertikalkomponenten der Geschwindigkeit beim Aufsetzen?

a.) $x(t) = V_0 \cos\varphi \; t$

$y(t) = V_0 \sin\varphi \; t - \frac{g}{2} t^2$




$\rightarrow$ Löse nach t auf und setze ein

$t = \frac{x}{V_0 \cos\varphi} \Rightarrow y(x) = \tan\varphi \cdot x - \frac{g}{2} \frac{x^2}{V_0^2 \cos^2\varphi}$

b.) Berechnung der Sprungweite $y(x) \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow 0 = \tan\varphi - \frac{g}{2} \frac{x_W}{V_0^2 \cos^2\varphi}$

$\Rightarrow x_W = \frac{V_0^2}{g} 2 \sin\varphi \cos\varphi = \frac{V_0^2}{g} \underbrace{\sin(2\varphi)}_{\text{maximal } 1 \text{ bei } \varphi = 45^\circ}$

c.) $V_0^2 = x_W \cdot g \Rightarrow V_0 = \sqrt{x_W g} = \sqrt{61\,\mathrm{m} \cdot 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 24{,}5 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

d.) Die maximal Höhe ergibt sich durch Nullsetzen der 1. Ableitung

$y = x - g \frac{x^2}{V_0^2} \quad (\cos^2(45^\circ) = \frac{1}{2})$

$y' = 1 - 2\frac{g}{V_0^2} x_0 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x_0 = \frac{V_0^2}{2g} = \frac{x_W}{2} \Rightarrow y\left(x = \frac{V_0^2}{2g}\right) = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{V_0^2}{4g} = \frac{V_0^2}{4g} = \frac{x_W}{4} = \underline{\underline{15{,}25\,\mathrm{m}}}$

e.) $V_x = V_0 \cos\varphi = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$

wir haben schon bei d.) gesehen, dass der Sprung symmetrisch ist. $(x_0 = \frac{x_W}{2})$

$\Rightarrow V_y = -V_y(t=0) = -(V_0 \sin\varphi - gt) = -\frac{V_0}{\sqrt{2}}.$

## Aufgabe 9 (Kinematik)

a) Wäre bei Berücksichtigung einer geschwindigkeitsabhängigen Abbremsung $\vec{a} = -k|\vec{v}| \cdot \vec{v}$ z.B. durch Reibung die Aufspaltung in Richtungskomponenten bei einer 2D – Bewegung noch möglich?

b) Ein senkrecht nach oben geworfener Gegenstand fällt zurück und wird an der Absturzstelle wieder aufgefangen. Seine Flugzeit ist $t$ und die maximale Flughöhe ist $h$. Was gilt dann für seinen mittleren Geschwindigkeitsbetrag? Was gilt für die mittlere (vektorielle) Geschwindigkeit?

c) Nennen Sie Beispiele für eine Bewegung, bei der der Geschwindigkeits- und der Beschleunigungsvektor a) in entgegengesetzte Richtungen zeigen, b) in die gleiche Richtung zeigen bzw. c) senkrecht aufeinander stehen.

a.) Nein, denn $\vec{a} = -k|\vec{v}|\vec{v} = \begin{pmatrix} -k\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}\, v_x \\ -k\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}\, v_y \\ -k\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}\, v_z \end{pmatrix}$

b.) $v(t) = v_0 - gt$ $\quad v_{end} = -v_0$ $\quad \Rightarrow T = \frac{2v_0}{g}$

$$\Rightarrow \langle v \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T |v(t)|\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T |v_0 - gt|\, dt$$

$$= \frac{1}{T}\left(\int_0^{T/2} v_0 - gt\, dt + \int^{T} gt - v_0\, dt\right)$$

$$= \frac{1}{T}\left(\left[v_0 t - \frac{g}{2}t^2\right]_0^{T/2} + \left[\frac{g}{2}t^2 - v_0 t\right]_{T/2}^{T}\right)$$

$0 \leftarrow$ verschwindet

$$= \frac{\cancel{2}}{\cancel{T}}\left(v_0 \frac{\cancel{T}}{\cancel{2}} - \frac{g}{\cancel{2}}\frac{T^{\cancel{2}}}{4}\right)$$

$$= v_0 - g\frac{T}{4} = v_0 - \frac{v_0}{2} = \frac{v_0}{2}$$

- die mittlere vektorielle Geschwindigkeit ist Null.

$\langle v \rangle = \frac{v_0}{2} = \frac{h}{T}$

c.) 1) Abbremsung
2.) Beschleunigung
c) Kreisbewegung