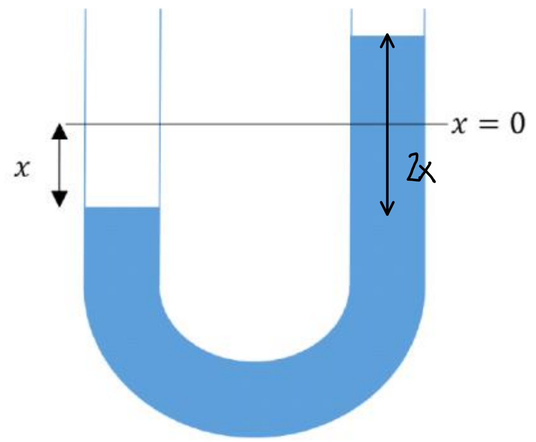
11. Übung

Donnerstag, 11. Januar 2024 14:42

*Aufgabe 44 (Schwingungen)

In einem U-Rohr mit senkrechten Schenkeln mit kreisförmigem Querschnitt und Innendurchmesser d steht eine Wassersäule (Dichte ρ) mit Volumen V. Drückt man das Wasser in einem Schenkel um die Strecke x_0 kurzzeitig herab, so beginnt die Säule zu schwingen. Betrachten Sie diesen Vorgang als ungedämpfte, harmonische Schwingung.

Stellen Sie die Differentialgleichung der Schwingung auf! Lösen Sie die Differentialgleichung mit einem sinnvollen Ansatz und geben Sie eine Formel für die Schwingungsdauer an! Bestimmen Sie die maximale Geschwindigkeit und Beschleunigung der Säule!



die rückstellende Kraft ergibt sich durch den Pegelunterschied zwischen linker und rechter Seite

$$F_{\text{Rückstell}} = -m_w g = -\underbrace{2x \cdot \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2}_{\text{Volumen}} \rho g = -\frac{x}{2} \pi d^2 \cancel{\rho} g \overset{!}{=} m \ddot{x} \quad (\text{Newton II})$$

Masse des gesamten Wassers $m = \cancel{\rho} V$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -\underbrace{\frac{\pi d^2 g}{2V}}_{\omega^2} x \qquad \text{DGL. 2. Ordnung}$$

- die Lösung erhalten wir mit einem Exponentialansatz oder wir erkennen gleich $\sin(\omega t)$ und $\cos(\omega t)$ als Lösung

$$x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{\pi d^2 g}{2V}}$$

- mit den Anfangsbedingungen $x(t=0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = 0$ erhalten wir $B = x_0$ und $A = 0$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x(t) = x_0 \cos(\omega t)}}$$

- Schwingungsdauer: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{2V}{\pi d^2 g}}$
- maximale Geschwindigkeit: $v(t) = \dot{x}(t) = -\underbrace{x_0 \omega}_{v_{max}} \sin(\omega t) \Rightarrow v_{max} = x_0 \omega$
- maximale Beschleunigung: $a(t) = \ddot{x}(t) = -\underbrace{x_0 \omega^2}_{a_{max}} \cos(\omega t) \Rightarrow a_{max} = x_0 \omega^2$

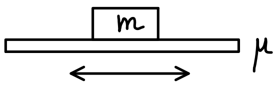
*Aufgabe 45 (Schwingungen)

Eine ebene Plattform vollführt eine horizontale, näherungsweise harmonische Schwingung. Nehmen Sie an, dass die Plattform mit einer einzigen Frequenz und der Periodendauer 0,8 s schwingt. Sie beobachten einen Kasten, der auf der Plattform zu gleiten beginnt, als die Schwingungsamplitude 10 cm erreicht. Wie groß war der Haftreibungskoeffizient zwischen Kasten und Plattform?

Schwingungsgleichung: $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$ mit $x_0 = 10\,cm$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ $\Rightarrow a_{max} = x_0 \cdot \omega^2 = x_0 \frac{4\pi^2}{T^2}$

· das Gleiten beginnt, wenn $m a_{max} \geq F_R = \mu F_N = \mu F_G$

horizontale Ebene



$\Rightarrow a_{max} \geq \mu g$

$\Rightarrow \mu \leq \frac{x_0 \cdot 4\pi^2}{g \cdot T^2} = \underline{\underline{0{,}629}}$

*Aufgabe 46 (Schwingungen)

Eine Last mit einer Masse von 3000 kg hängt an einem Kranseil, das sich wie eine Feder mit einer Federkonstante $k = 2000\,\mathrm{kN/m}$ verhält. Die Last führt gedämpfte Schwingungen aus. Nach 10 Schwingungen ist die Amplitude $x_1 = 8{,}00\,\mathrm{cm}$. Nach 1 weiteren Schwingung ist sie auf 7,55 cm abgeklungen. Es wird davon ausgegangen, dass die Frequenz der gedämpften Schwingung gleich der der ungedämpften ist.

a) Wie groß ist die Periodendauer der Schwingung?
b) Wie groß ist die Abklingkonstante δ der gedämpften Schwingung?
c) Mit welcher Amplitude hat die Schwingung begonnen?
d) Um welche Strecke hat sich das Kranseil ausgedehnt, als die Last angehängt wurde?

Für die gedämpfte Schwingung gilt allgemein: $k = 2000 \frac{kN}{m}$

$m\ddot{x} + R\dot{x} + kx = 0$ mit $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \delta^2} \approx \sqrt{\frac{k}{m}}$ mit $\delta = \frac{R}{2m}$ $m = 3000\,kg$

Annahme aus Aufgabenstellung

Lösung $x(t) = x_0\, e^{-\delta t} \cos(\omega t)$

a.) Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \underline{\underline{0{,}2433\,s}}$

b.) $\left.\begin{aligned} x(10T) &= x_0\, e^{-\delta(10T)} = x_1 \\ x(11T) &= x_0\, e^{-\delta(11T)} = x_2 \end{aligned}\right\}$ $\frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{-\delta 10T}}{e^{-\delta 11T}} = e^{\delta T} \Rightarrow \delta = \frac{1}{T} \ln\left(\frac{x_1}{x_1}\right) = \frac{1}{0{,}2433\,s} \ln\left(\frac{8\,cm}{7{,}55\,cm}\right) = \underline{\underline{0{,}238\,\frac{1}{s}}}$

c.) $x_0 = x_1\, e^{10\delta T} = x_1 \cdot \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{10} = \underline{\underline{14{,}27\,cm}}$

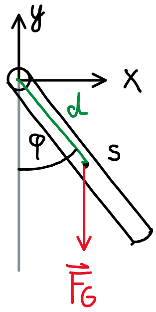
d.) nach dem Gesetz von Hooke gilt: $F = k \cdot \Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{mg}{k} = \frac{3000\,kg \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}}{2000\,kN/m} = \underline{\underline{1{,}47\,cm}}$

Aufgabe 47 (Schwingungen)

a) Was ist der Unterschied zwischen mathematischem und physikalischem Pendel?
b) Welche Möglichkeiten gibt es bei der gedämpften Schwingung in Abhängigkeit von der Dämpfung?

a.) Beim mathematischen Pendel wird das Pendel als Massenpunkt mit masselosem Seil genähert
Physikalisches Pendel: · berücksichtigt Form und Größe des Pendelkörpers
· Schwingung eines ausgedehnten Körpers mit Trägheitsmoment

⇒ Aufstellen der Bewegungsgleichung über das Drehmoment



$$\vec{M} = J_A \ddot{\vec{\varphi}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Schwerpunkt}}}{\vec{r}} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} d\sin\varphi \\ -d\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -dmg\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J_A \ddot{\varphi} = -dmg \sin\varphi$$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} \approx \underbrace{-\frac{dmg}{J_A}}_{\omega^2} \varphi \qquad \Rightarrow \varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t) \text{ mit } \omega = \sqrt{\frac{dmg}{J_A}}$$

b.) $m\ddot{x} + R\dot{x} + kx = 0$ Exponentialansatz: $x(t) = A e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow m\lambda^2 + R\lambda + k = 0 \qquad \Rightarrow \lambda_{1/2} = -\underbrace{\frac{R}{2m}}_{\delta} \pm i \underbrace{\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{R}{2m}\right)^2}}_{\omega}$$

$$\Rightarrow x(t) = A\, e^{-\delta t} \underbrace{\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)}_{2\cos(\omega t)} = x_0\, e^{-\delta t} \cos(\omega t)$$

1.) $\delta = 0$: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ungedämpfte Schwingung
2.) $0 < \delta < \omega_0$: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ gedämpfte Schw.
3.) $\delta = \omega_0$: $\omega = 0$ aperiodischer Grenzfall
4.) $\delta > \omega_0$: $\omega = i\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ Kriechfall