10. Übung

Montag, 18. Dezember 2023 11:16

*Aufgabe 36 (Scheinkräfte)

Beim so genannten Spacediving am Äquator steigt ein Springer mit einem mit Helium gefüllten Ballon auf eine Höhe von $h = 30\,\text{km}$ über der Erdoberfläche und springt dann ab. Wir betrachten die ersten $\Delta h_1 = 10\,\text{km}$ des freien Falls, wobei wir Reibung vernachlässigen wollen. Nehmen Sie an, dass der Ballon sich zum Zeitpunkt des Absprungs relativ zum Boden nicht bewegt.

a) Welche maximale Fallgeschwindigkeit erreicht der Springer auf dieser Strecke?

b) Wie groß ist die durch die Corioliskraft verursachte seitliche Abdrift auf den ersten 10 km des Sprungs?

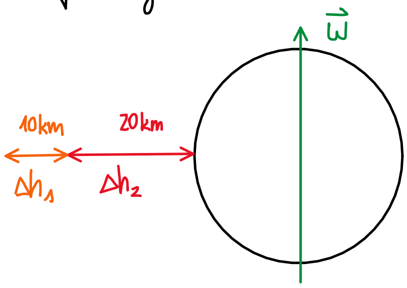
c) Die restlichen 20 km bleibe die Fallgeschwindigkeit konstant. Unter Vernachlässigung der Bremsung vor der Landung, wie lange dauert der Sprung insgesamt? Wie hoch ist die Durchschnittsgeschwindigkeit (Corioliskräfte vernachlässigt!)?

Hinweis: Es kann die konstante Fallbeschleunigung g verwendet werden.

a) $s = \frac{g}{2} t^2 \Rightarrow t_{end} = \sqrt{\frac{2\Delta h_1}{g}} = 45{,}16\,s \qquad \Rightarrow v_{max} = g\,t_{end} = \sqrt{2\Delta h_1 g} = 443\,\frac{m}{s}$

b.) Coriolisbeschleunigung

$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v} \overset{\text{Äquator}}{\underset{\vec{\omega} \perp \vec{v}}{\Rightarrow}} a_c = 2\omega \cdot v$



$v_c = \int_0^t 2\omega \underbrace{v}_{g \cdot t'} \cdot dt' = \omega g t'^2 \Big|_0^t = \omega g t$

$s_c = \int_0^t \omega g t'^2 dt' = \frac{1}{3} \omega g t^3$

· setze nun t_{end} ein: $s_c = \frac{1}{3} \omega g \sqrt{\frac{2\Delta h_1}{g}}^3$ mit $\omega = \frac{2\pi}{24h} = 7{,}272 \cdot 10^{-5} \frac{1}{s}$

$= \underline{\underline{21{,}9\,m}}$

c.) Die gesamte Fallstrecke ergibt sich nun über

$s_{ges} = \underbrace{\frac{v_{end}}{2}}_{\text{mittlere Geschwindigkeit}} t_{end} + v_{end}(t - t_{end}) = v_{end}\left(t - \frac{1}{2} t_{end}\right) \Rightarrow t = \frac{s_{ges}}{v_{ges}} + \frac{1}{2} t_{end}$

$= \frac{s_{ges}}{\sqrt{2\Delta h_1 g}} + \sqrt{\frac{\Delta h_1}{2g}} = \underline{\underline{90{,}3\,s}}$

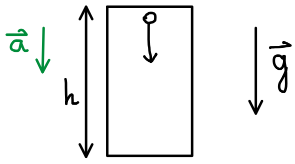
*Aufgabe 37 (Scheinkräfte)

Ein Aufzug mit einer Kabinenhöhe von 2,5 m wird von $t = 0$ an mit konstanter Beschleunigung $a = 1\,\mathrm{m/s^2}$ nach unten beschleunigt. Nach $t = 3\,\mathrm{s}$ wird von der Decke eine Kugel fallen gelassen.

a) Wann erreicht sie den Boden?

b) Welche Fallstrecke hat sie dann im Ruhesystem des Aufzugschachtes zurückgelegt?

c) Welche Geschwindigkeit hat sie beim Aufprall im Ruhesystem und relativ zum Kabinensystem?



a.) $a_{ges} = g - a \qquad t_1 = \sqrt{\frac{2h}{a_{ges}}} = \sqrt{\frac{5m}{8{,}81\,m/s^2}} = \underline{\underline{0{,}75s}} \qquad t_0 = 3s$

b) Die Fallstrecke im Laborsystem setzt aus $S_{Fahrstuhl} + S_{Ball}$ zusammen

$$S = \underbrace{\frac{a}{2}(t_0+t_1)^2}_{S_{Fahrstuhl}} + h = 0{,}5\,\frac{m}{s^2}\,(3{,}75s)^2 + 2{,}5m = \underline{\underline{9{,}53\,m}}$$

alternativ: Anfangsstrecke (in der Zeit t_0) + freier Fall des Balls

$$s = \frac{a}{2}t_0^2 + \underbrace{\frac{g}{2}t_1^2 + \underbrace{a t_0}_{v_0} t_1}_{\text{freier Fall mit } v_0 = a t_0} = \underline{\underline{9{,}53\,m}}$$

c.) Ruhesystem: $v_{end} = v_0 + g t_1 = a t_0 + g t_1 = \underline{\underline{10{,}36\,\frac{m}{s}}}$

Fahrstuhlsystem: $v_{end} = (g-a)\,t_1 = \underline{\underline{6{,}61\,\frac{m}{s}}}$

*Aufgabe 38 (Trägheitsmoment)

Auf einer sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2/\mathrm{s}$ rotierenden Scheibe mit dem Radius $R = 1\,\mathrm{m}$ sei eine Abschussrampe, die in radialer Richtung vom Mittelpunkt bis zum Rand der Scheibe reicht, befestigt. Ein Massenpunkt $m = 1\,\mathrm{kg}$ starte im Mittelpunkt der Scheibe mit der Geschwindigkeit $v_0 = 0{,}5\,\mathrm{m/s}$. Reibung werde vernachlässigt.

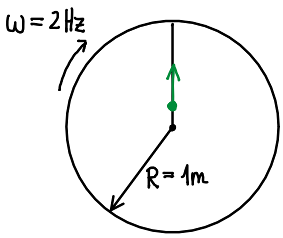
a) Welche kinetische Energie wird dem Massenpunkt während seiner Bewegung bis zum Rand der Scheibe zugeführt?

b) Wie lange benötigt der Massenpunkt bis zum Rand der Scheibe?

c) Welche Geschwindigkeit hat der Massenpunkt am Rand der Scheibe?

d) Woher stammt die Energie, die der Massenpunkt als zusätzliche kinetische Energie bei konstanter Winkelgeschwindigkeit der Scheibe erhält?

e) Welche Gegenkraft muss die Abschussrampe aufbringen?



a.) Die kinetische Energie entspricht der geleisteten Arbeit

$$E_{kin} = \int_{r=0}^{R} \vec{F}_{ZP}\cdot d\hat{r} = \int_{r=0}^{R} m\omega^2 r\,dr = \underline{\underline{\frac{m}{2}\omega^2 R^2}} = 2J$$

b.) Nach Newton II lautet die Bewegungsgleichung

$ma = F_{ZP} \Rightarrow \ddot{r} = \omega^2 r$ DGL. 2. Ordnung

Verwende den Exponentialansatz $r(t) = e^{\lambda t}$

$\Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda t} = \omega^2 e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda = \pm\omega$

$\Rightarrow r(t) = A e^{\omega t} + B e^{-\omega t}$ mit AWB: $r(t=0) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow A = -B$

$v(t=0) \overset{!}{=} v_0 = 2A\omega$

$\Rightarrow A = \frac{v_0}{2\omega}$

$r(t) = A\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right)$

$v(t) = A\omega\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right)$

· damit erhalten wir $r(t) = \frac{v_0}{\omega} \sinh(\omega t)$

$v(t) = v_0 \cosh(\omega t)$

· für $r(t_{end}) = R$ erhalten wir aufgelöst nach t_{end} $\quad t_{end} = \frac{1}{\omega} \operatorname{arsinh}\left(\frac{R\omega}{v_0}\right) = \frac{1}{\omega} \ln\left(\frac{R\omega}{v_0} + \sqrt{\left(\frac{R\omega}{v_0}\right)^2 + 1}\right)$

c.) Setze nun t_{end} in $v(t)$ ein

$$v_{end} = v_0 \cosh(\omega t_{end}) = v_0 \cosh\left(\operatorname{arsinh}\left(\frac{R\omega}{v_0}\right)\right) = v_0 \sqrt{1 + \left(\frac{R\omega}{v_0}\right)^2} \approx \underline{\underline{2{,}06 \,\frac{m}{s}}}$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$
$$\cosh(x) = \sqrt{1 + \sinh^2(x)}$$

d.) Es muss ein Drehmoment von außen aufgewendet werden um die Winkelgeschwindigkeit aufrecht zu erhalten

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(J_A \cdot \omega) = \omega \frac{dJ_A}{dt} = 2m\omega r\dot{r} = 2m v_0^2 \underbrace{\sinh(\omega t) \cosh(\omega t)}_{\sinh(2\omega t)} = m v_0^2 \sinh(2\omega t)$$

$J_A = J_0 + mr^2$ ← Kugel

↑ Scheibe

e.) Die Rampe muss das Drehmoment kompensieren

$$F = \frac{M}{r} = 2m\omega\dot{r} = 2m v_0 \omega \cosh(\omega t)$$

alternativ kann man betrachten, dass auf die Masse die Corioliskbeschleunigung $\vec{a}_c$ wirkt, die von der Rampe kompensiert wird

↳ $\vec{a}_c = 2\vec{v} \times \vec{\omega}$

$$F = m a_c = 2m v \cdot \omega \quad ✓$$

*Aufgabe 39 (Kräfte)

Eine typische Situation zum Beispiel bei Hängebrücken ist, das ein oder mehrere Tragseile, die an zwei Pylonen oberhalb der Fahrbahn aufgehängt sind, diese tragen. Die Gewichtskraft der Fahrbahn wirkt dabei gleichmäßig pro Länge der Fahrbahn auf die Seile. Der Konstrukteur der Brücke muss dabei die Tragseile so dimensionieren, dass sie die zu erwartende Zugspannung aushalten. Eine solche Brücke ist beispielsweise die vom Thüringer Ingenieur Johann August Röbling konstruierte *Brooklyn Bridge* in New York, die dort seit 1883 die Stadteile Brooklyn und Manhattan verbindet. Die Brücke wird von 4 Tragseilen getragen. Der Abstand der zwei Pylonen, die 48,5 m über die Fahrbahn ragen, ist $L = 486\,\text{m}$. Berechnen Sie die Zugspannung auf ein Tragseil, die sich lediglich aus dem Gewicht der Fahrbahn zwischen den beiden Pylonen ergibt. Die Masse der Seile bleibe unberücksichtigt. Die Masse der Fahrbahn pro Länge ist ungefähr $\mu = 10\,\text{t/m}$. Welche Bedeutung hat die Höhe der Pylonen, die damals alle Gebäude New Yorks außer der nur 1 m höheren *Trinity Church* deutlich überragten?

Hinweise zu Lösung: Die Kraft wirkt auf das das Seil nur senkrecht, so dass die differenzielle Änderung der y-Komponente des Seilkraftvektors $\vec{F_S}$ gleich dem Gewichtsdifferenzial der Fahrbahn mit der Gesamtmasse m ist:

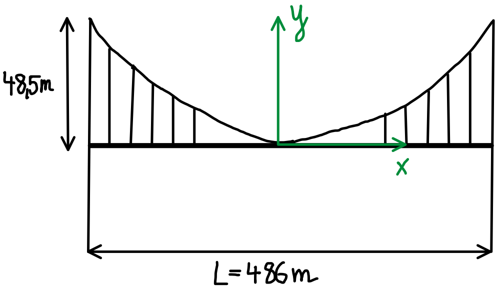
$$\begin{pmatrix} dF_{S_x} \\ dF_{S_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ dm(x)\,g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu\, g \end{pmatrix} dx \qquad (1)$$

Bestimmen Sie zuerst den Verlauf des Seiles $y(x)$, wobei die Richtung des Seiles immer in die Richtung der Seilkraft zeigt, d.h. es gilt die Proportionalität:

$$\frac{dx}{F_{S_x}} = \frac{dy}{F_{S_y}} \qquad (2)$$

Die maximale Zugspannung ist dann der maximale Betrag $F_S(x)$.

Wir integrieren zunächst Gleichung (1), um die Kräfte als Funktion von x zu bestimmen



$$\frac{dF_{Sx}}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Sx}(x) = F_{x,0}$$

$$\frac{dF_{Sy}}{dx} = \mu g \quad \Rightarrow \quad F_{Sy}(x) = \mu g x + F_{y,0}$$

- mit Gleichung (2) folgt dann

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mu g x + F_{y,0}}{F_{x,0}} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{\mu g}{2F_{x,0}} x^2 + \frac{F_{y,0}}{F_{x,0}} x + C_1$$

- der Scheitel der Parabel liegt bei $y(0)=0$. Damit folgt $C_1 = 0$

↳ Da die Funktion $y(x)$ symmetrisch in x sein soll, muss der lineare Term in x verschwinden

$\Rightarrow F_{y,0} = 0$

- weiterhin gilt $y(x=\frac{L}{2}) = y_0 = 48{,}5\,m$

$$\Rightarrow y(\tfrac{L}{2}) = \frac{\mu g}{2F_{x,0}} \left(\frac{L}{2}\right)^2 = y_0$$

$$\Rightarrow \quad F_{x,0} = \frac{\mu g}{8 y_0} L^2 \qquad \Rightarrow y(x) = \frac{y_0}{4L^2} x^2$$

- Wir erhalten nun für die Seilkraft: $\quad \vec{F_S} = \begin{pmatrix} F_{Sx} \\ F_{Sy} \end{pmatrix} = \mu g \begin{pmatrix} L^2/8y_0 \\ x \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow F_S = |\vec{F_S}| = \frac{\mu g L}{2} \sqrt{\left(\frac{L}{4y_0}\right)^2 + \left(\frac{2x}{L}\right)^2} \quad \text{maximal für } x = \frac{L}{2}$$

$$F_{S\max} = \frac{mg}{2} \sqrt{\left(\frac{L}{4y_0}\right)^2 + 1} = 2{,}7\,\frac{mg}{2} \qquad \text{mit } m = \mu L = 10\,\frac{t}{m} \cdot 486\,m = 4860\,t.$$

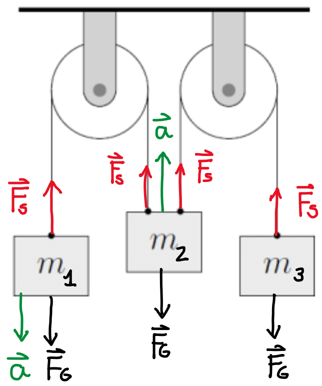
⇒ Je höher die Pylonen, desto geringer die maximale Seilkraft. Aufgeteilt auf 4 Seile ergibt sich eine Kraft von 16,1 MN.

Aufgabe 40 (Kräfte)

Drei Massen der Größe m sind entsprechend der Abbildung an masselosen Seilen aufgehängt. Die Seile verlaufen über ebenfalls als masselos angenommene Rollen. Die Reibung soll vernachlässigt werden.

a) Wie groß ist die Beschleunigung der Masse in der Mitte?

b) Wie groß ist die Zugkraft in jedem Seil?



- Wir überlegen uns wieder das Kräftegleichgewicht an den einzelnen Massen
- aufgrund der Symmetrie verhalten sich m_1 und m_3 gleich, demzufolge sind auch die Zugkräfte in beiden Seilen identisch

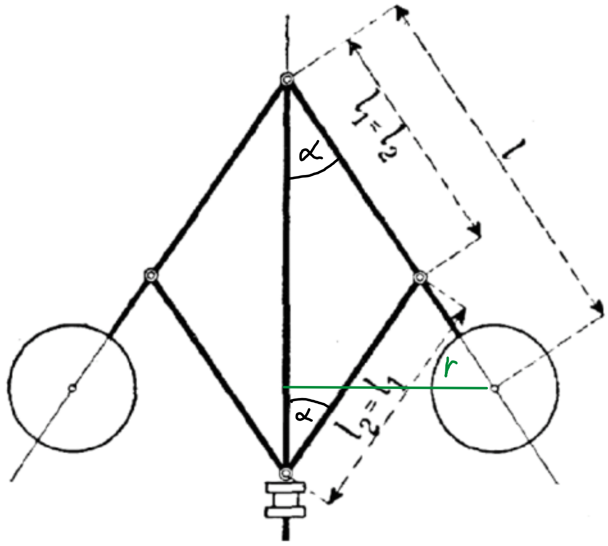
$$m_1: \quad F_S - F_G = -ma \qquad (1)$$

$$m_2: \quad 2F_S - F_G = ma \qquad (2)$$

$$\Rightarrow 2\cdot(1) - (2): \quad -F_G = -3ma \qquad \text{mit } F_G = mg \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{a = \tfrac{1}{3} g}}$$

Einsetzen von a in (1) ergibt $\quad F_S = F_G - ma = m(g - \frac{1}{3}g) = \underline{\underline{\frac{2}{3} mg}}$

Aufgabe 41 (Kreisbewegung)



Gegeben sei ein Fliehkraftregler wie in nebenstehender Abbildung. Die Masse des Gestänges sei vernachlässigbar und die beiden Kugeln der Masse m als Punktmassen zu betrachten. Wird der Regler in Drehung versetzt, werden die Kugeln auf Grund der Fliehkraft nach außen und durch die Gewichtskraft nach unten gezogen. Gehen Sie weiter davon aus, dass in Nulllage ein minimaler Abstand der Kugeln von der Drehachse vorhanden sei.

a) Geben Sie den Winkel α zwischen Arm und Drehachse, die Anhebung h der Gewichte, die Bahngeschwindigkeit v_B der Gewichte und die in diesen gespeicherte Gesamtenergie E_{ges} als Funktionen der Drehzahl an.

b) Ab welcher Drehzahl findet eine Auslenkung der Masse statt (Formel)?

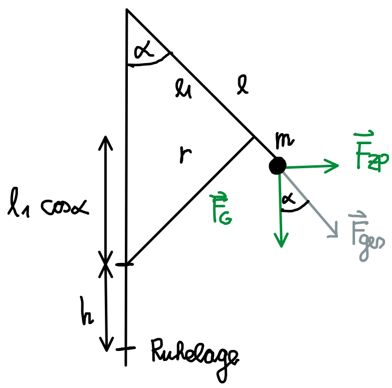
a.) Trägheitsmoment des Systems: $J_A = \underset{\uparrow \text{ zwei Gewichte}}{2} m r^2 = 2m\, l^2 \sin\alpha$ mit $r = l \sin\alpha$

- für die Auslenkung mit Winkel α muss die Nettokraft aus $\vec{F}_G$ und $\vec{F}_{ZP}$ parallel zur Stange stehen

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{F_Z}{F_G} = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \omega^2 \frac{l \sin\alpha}{g}$$

$\alpha \neq 0$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{g}{l\omega^2} \quad \Rightarrow \alpha = \underline{\underline{\arccos\left(\frac{g}{l\omega^2}\right)}} \quad \text{mit } \omega = 2\pi \underset{\text{Drehzahl}}{f}$$



- Anhebung der Gewichte:

$$h = 2l_1 - 2l_1\cos\alpha = 2l_1(1-\cos\alpha) = \underline{\underline{2l_1\left(1 - \frac{g}{l\omega^2}\right)}}$$

- Bahngeschwindigkeit $V_B = \omega r = \omega l \sin\alpha = \omega l \sqrt{1-\cos^2\alpha}$

$$= \omega l \sqrt{1 - \left(\frac{g}{l\omega^2}\right)^2}$$

$$E_{ges} = E_{kin} + E_{Pot} = 2 \cdot \frac{1}{2} m V_B^2 + 2mgh$$

$$= m\omega^2 l^2 \left[1 - \left(\frac{g}{l\omega^2}\right)^2\right] + 4mg l_1 \left(1 - \frac{g}{l\omega^2}\right)$$

b.) Es findet eine Auslenkung statt für $\cos\alpha < 1$

$$\Rightarrow 1 > \frac{g}{l\omega^2} \Rightarrow \omega^2 > \frac{g}{l}$$

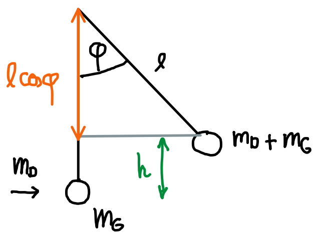
$$\Rightarrow \omega > \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Aufgabe 42 (Stoss)

Ein Geschoss (Diabolo) mit einer Masse $m_D = 0{,}5\,\mathrm{g}$ werde in einen Knetblock geschossen und bleibt dort stecken (Gesamtmasse aus Knete und Diabolo dann $m_G = 10\,\mathrm{g}$). Der Knetblock sei an einem Faden der Länge $l = 50\,\mathrm{cm}$ aufgehängt. Durch den Einschlag des Geschosses werde das Pendel um $\varphi = 60°$ ausgelenkt.

a) Wie schnell war das Geschoss?
b) Wieviel Energie wurde für die plastische Verformung des Knetblocks benötigt?
c) Welche Geschwindigkeit müsste das Geschoss haben, damit das Pendel einen Überschlag macht? (Der Faden soll hierbei stets gespannt sein!)

a.) vollkommen inelastischer Stoß



Impulserhaltung: $m_D v_D = (m_D + m_G)\,u$

$$\Rightarrow v_D = u\,\frac{m_D + m_G}{m_D} \qquad u = v_D\,\frac{m_D}{m_D + m_G}$$

Umwandlung kinetische in potentielle Energie $\qquad h = l(1-\cos\varphi)$

$$\frac{1}{2}\cancel{(m_D + m_G)}\,u^2 = \cancel{(m_D + m_G)}\,g h \qquad \cos(60°) = \frac{1}{2}$$

$$u = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl(1-\cos\varphi)}$$

$$\Rightarrow v_D = \frac{m_D + m_G}{m_D}\sqrt{2gl(1-\cos\varphi)} = \frac{0{,}5g + 10g}{0{,}5g}\sqrt{2g \cdot 0{,}5m \cdot 0{,}5} = \underline{\underline{46{,}5\,\tfrac{m}{s}}}$$

b.) $$\Delta E = E_{kin,D} - E'_{kin,G} = \frac{m_D}{2} v_D^2 - \frac{m_D + m_G}{2} u^2$$

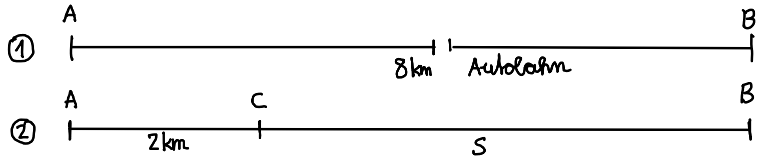
$$= \frac{1}{2} m_D v_D^2 \left(1 - \frac{m_D}{m_D + m_G}\right) = \underline{\underline{0{,}515\,J}}$$

c.) Für den Überschlag muss $h = 2l$ sein

$$\Rightarrow v_D = \frac{m_D + m_G}{m_D}\sqrt{2gh} = \frac{m_D + m_G}{m_D}\sqrt{4gl} = \underline{\underline{93{,}02\,\tfrac{m}{s}}}$$

Aufgabe 43 (gleichm. Beschleunigung)

Zwei Fahrzeuge fahren zur gleichen Zeit von A nach B los. Das erste Fahrzeug nimmt die 8 km lange Autobahn, wobei es maximal 200 km/h schnell fahren kann. Das zweite darf auf der Landstraße maximal 100,0 km/h schnell fahren. Außerdem muss das zweite Fahrzeug noch an einem 2 km entfernten Stoppschild (C) anhalten, fährt von dort aber ohne Pause weiter nach B. Die Fahrzeuge müssen jeweils beim Losfahren mit $a = 0{,}4\,\mathrm{m/s^2}$ auf maximale Geschwindigkeit beschleunigen und mit der betragsmäßig gleichen Beschleunigung beim Anhalten bremsen, um zum Stehen zu kommen. Wie lang ist die Strecke von C nach B, wenn beide Fahrzeuge zur gleichen Zeit in B zum Stehen kommen?



Bewegung von Fahrzeug 1):

• Beschleunigungszeit t_1: $t_1 = \frac{v_1}{a} = \frac{200\,km/h}{0{,}4\,m/s^2} = 139\,s$

$\Rightarrow s_1 = \cancel{2} \cdot \frac{a}{\cancel{2}} t_1^2 + v_1 \cdot (t - 2t_1) \overset{!}{=} 8\,km \quad \Rightarrow t = \frac{s_1 - a t_1^2}{v_1} + 2t_1 = 280\,s$

↑ Beschl. + Bremsen

Bewegung von Fahrzeug 2):

$t_2 = \frac{v_2}{a} = \frac{t_1}{2}$

• Beschleunigungsstrecke: $s = \frac{a}{2} t_2^2 = \frac{1}{2a} v_2^2 = 0{,}965\,km$ ⇐ kürzer als halbe Strecke zwischen A und C

$\Rightarrow s_2 = 4 \frac{a}{2} t_2^2 + v_2 (t - 4t_2) = \frac{2v_2^2}{a} + v_2 \left(\frac{s_1 - a t_1^2}{v_1} + \underbrace{2t_1 - 4t_2}_{0} \right)$

↑ 2× Beschl. + Bremsen $= \frac{2v_2^2}{a} + v_2 \left(\frac{s_1 - v_1^2/a}{v_1} \right) = \underline{\underline{4\,km}}$

$\Rightarrow s_{BC} = s_2 - 2\,km = \underline{2\,km}$

Beachte: diese Rechnung funktioniert nur unter der Annahme, dass $s_{BC} > a t_2^2 = 1{,}93\,km$ ist, da sonst Fahrzeug 2 die Geschwindigkeit v_2 nicht erreicht, bevor der Bremsvorgang beginnt.