2. Übung

Mittwoch, 25. Oktober 2023 17:54

Übungsserie 1

***Aufgabe 1 (Kinematik)**

Berechnen Sie für die folgenden Bahnkurven die Geschwindigkeit und die Beschleunigung als Funktion der Zeit. Zeichnen Sie die Bahnkurven in der x-y-Ebene. Zeichnen Sie zusätzlich $x(t)$, $y(t)$, $v_x(t)$, $v_y(t)$, $a_x(t)$, $a_y(t)$

a)

$$\vec{r}(t) = \left(5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t + 2\,\mathrm{m}\right) \cdot \vec{e}_x + 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t \cdot \vec{e}_y$$

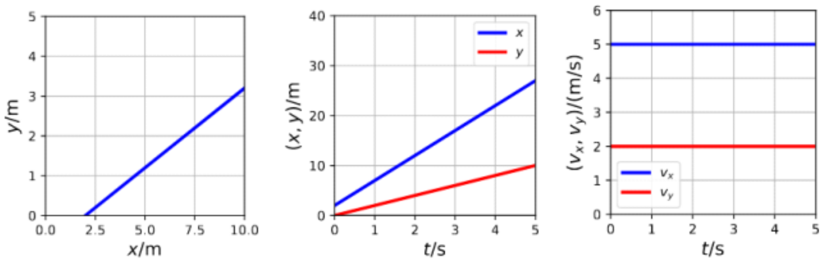
b)

$$\vec{r}(t) = 5\,\mathrm{mm} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{5\,\mathrm{s}} \cdot t\right) \vec{e}_x + 5\,\mathrm{mm} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{5\,\mathrm{s}} \cdot t\right) \vec{e}_y$$

Die Geschwindigkeit / Beschleunigung erhalten wir durch Bilden der 1./2. Ableitung.

a) $\vec{v}(t) = 5\,\frac{m}{s}\,\vec{e}_x + 2\,\frac{m}{s}\,\vec{e}_y$

$\vec{a}(t) = 0$



b) $\vec{v}(t) = -2\pi\,\frac{mm}{s}\cos\left(\frac{2\pi}{5s}t\right) + 2\pi\,\frac{mm}{s}\cos\left(\frac{2\pi}{5s}t\right)\vec{e}_y$

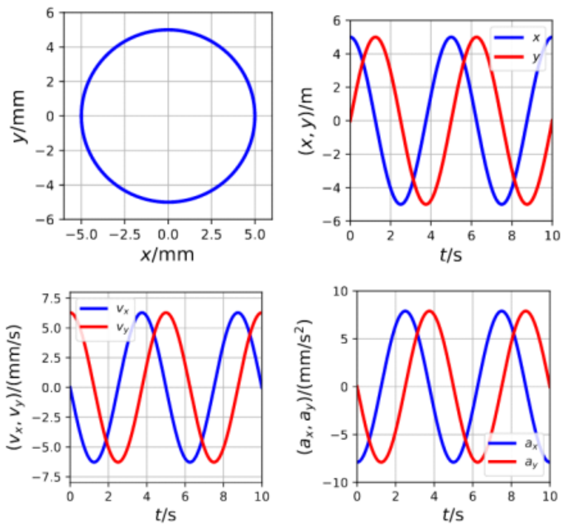
$\vec{a}(t) = \frac{4\pi^2}{5}\,\frac{mm}{s^2}\sin\left(\frac{2\pi}{5s}t\right) + \frac{4\pi^2}{5s}\,\frac{mm}{s^2}\sin\left(\frac{2\pi}{5s}t\right)\vec{e}_y$

$\uparrow$ Periodendauer der Schwingung

Durch Skalarproduktbildung $\vec{r}(t)\cdot\vec{r}(t)$ erhalten wir

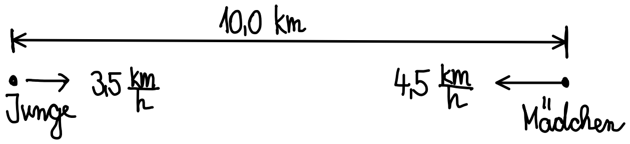
$\vec{r}(t)\cdot\vec{r}(t) = x^2 + y^2 = (5mm)^2$

eine Kreisgleichung in Normalform.



*Aufgabe 2 (Kinematik)

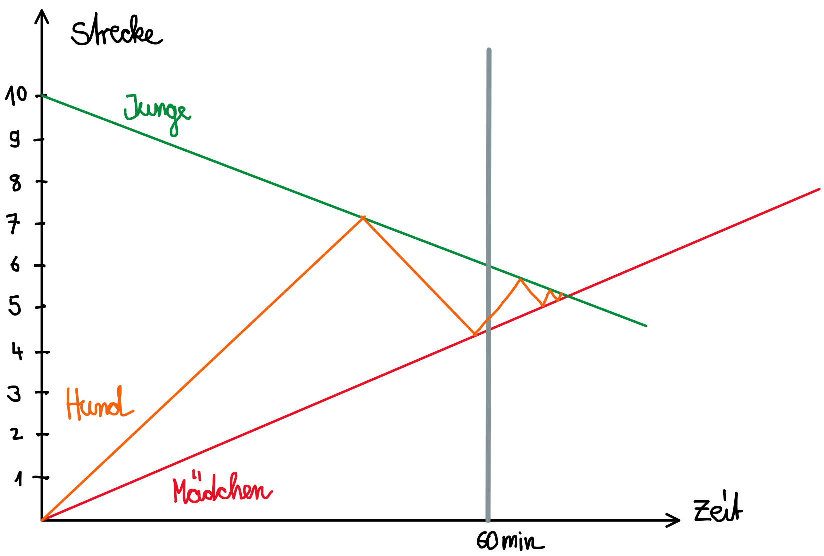
Ein Junge schlendert mit einer konstanten Geschwindigkeit vom 3,5 km/h in Richtung des 10 km entfernten Nachbarortes, in dem sich gerade seine Schwester mit ihrem Hund befindet. Sie geht ihm mit einer konstanten Geschwindigkeit von 4,5 km/h entgegen. Ihr Hund läuft mit einer konstanten Geschwindigkeit von 10 km/h in Richtung des Jungen. Bei ihm angekommen dreht er um und läuft wieder in Richtung des Mädchens, wo er wieder umdreht usw., bis sich Junge, Mädchen und Hund treffen. Wo treffen sie sich? Wie weit ist der Hund gelaufen? Wie oft hat der Hund gewendet?



- wir berechnen zunächst die Zeit, bis sich die beiden treffen

$$s_{ges} = (v_J + v_M)\,t \Rightarrow t = \frac{s_{ges}}{v_J + v_M} = \frac{10\,km}{8\,km/h} = 1{,}25\,h = 75\,min$$

- Laufweg des Jungen: $s_J = v_J \cdot t = 3{,}5\,km/h \cdot 1{,}25\,h = \underline{\underline{4{,}38\,km}}$
- Laufweg des Hundes: $s_H = v_H \cdot t = 10\,\frac{km}{h} \cdot 1{,}25\,h = \underline{\underline{12{,}5\,km}}$



Wir erkennen, dass der Hund unendlich oft zwischen den Kindern hin- und herläuft.

*Aufgabe 3 (Kinematik)

Ein PKW fährt auf einer Bundesstraße mit konstantem Sicherheitsabstand von 40 m hinter einem LKW (25 m Länge) mit der konstanten Geschwindigkeit von 80 km/h her. Als der Fahrer eine 300 m lange freie Strecke einsehen kann, schert er zum Überholen aus. Dabei beschleunigt er mit $1{,}5\,\mathrm{m/s^2}$ bis auf 110 km/h. Wie lang sind Überholzeit und Überholweg, wenn auch beim Wiedereinscheren der Sicherheitsabstand von 40 m beachtet wird? Schafft er das Überholen gefahrlos?

geg: $a = 1{,}5\,\frac{m}{s^2}$ $\quad V_0 = 80\,\frac{km}{h}$, $V_1 = 110\,\frac{km}{h}$, $S_1 = 40m + 40m + 25m = 105m$

ges: Ist $S_{PKW} < 300m$?

Lösung: $V_1 = a \cdot t_1 + V_0 \Rightarrow t_1 = \frac{V_1 - V_0}{a} = 5{,}6s$

t_1 - Zeit der Beschleunigung
$t - t_1$, Zeit mit $V = const.$

$$S_{PKW} = \frac{a}{2} t_1^2 + V_0 t_1 + V_1 (t - t_1)$$
$$S_{LKW} = V_0 t$$

$V_1 = 30{,}56\,\frac{m}{s}$
$V_0 = 22{,}2\,\frac{m}{s}$

Der Überholvorgang ist vorbei wenn $S_{PKW} \overset{!}{=} S_{LKW} + S_1$

$\Rightarrow$ Auflösen nach t:

$$V_0 t + S_1 = \frac{a}{2} t_1^2 + V_0 t_1 + V_1 (t - t_1)$$
$$\Rightarrow t (V_0 - V_1) = \frac{a}{2} t_1^2 + (V_0 - V_1) t_1 - S_1$$
$$\Rightarrow t = \frac{a/2\, t_1^2 + (V_0 - V_1) t_1 - S_1}{V_0 - V_1} = \frac{a/2\, t_1^2 - S_1}{V_0 - V_1} + t_1 = \underline{15{,}4s}$$

$$S_{PKW} = S_{LKW} + S_1 = V_0 t + S_1 = 22{,}2\,\frac{m}{s} \cdot 15{,}4s + 104m = \underline{\underline{446\,m}}$$

Der PKW kann nicht gefahrlos wiederholen!

Aufgabe 4 (Kinematik)

Bestimmen Sie die Geschwindigkeit und den Ort eines Teilchens mit der Beschleunigung $a(t) = -k \cdot v(t)$.

Bei diesem Problem könnte es sich um eine Bremsbewegung durch Reibung (Stokes handeln)

$\frac{dv}{dt} = -kv(t)$ $\qquad$ separable, lineare DGL 1. Ordnung

$$\Rightarrow \frac{1}{v}\frac{dv}{dt} = -k \quad \Big| \int \dots dt'$$

$$\Rightarrow \int_{V_0}^{V} \frac{1}{V'} dV' = -k \int_0^t dt' \Rightarrow \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) = -kt$$
$$\Rightarrow V(t) = V_0 \exp(-kt) = \frac{ds}{dt}$$

$$\Rightarrow \int_{S_0}^{S(t)} ds' = \int_0^t V_0 \exp(-kt')\, dt' = -\frac{V_0}{k} \exp(-kt) \Big|_0^t$$

$$\underline{S(t) = \frac{V_0}{k}\left(1 - \exp(-kt)\right) + S_0}$$

Aufgabe 5 (Kinematik)

a) Ein Körper bewegt sich auf einer geraden Linie mit einer konstanten Beschleunigung a_{x0}. Zur Zeit $t = 0$ befindet er sich bei x_0 und hat die Geschwindigkeit v_{x0}. Leiten Sie Gleichungen für seine Geschwindigkeit und seinen Ort als Funktion der Zeit her.

b) Betrachten Sie nun den dreidimensionalen Fall. Der Körper bewegt sich mit der konstanten Beschleunigung $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_{x0}, & a_{y0}, & a_{z0} \end{pmatrix}$. Leiten Sie auch für diesen Fall die Geschwindigkeit und den Ort des Körpers als Funktion der Zeit her.

a.)

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = a \quad \Big| \int \mathrm{d}t'$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}v(t')}{\mathrm{d}t'}\,\mathrm{d}t' = \int_{t_0}^{t} a\,\mathrm{d}t' \quad \Rightarrow \quad \int_{v(t_0)}^{v(t)} \mathrm{d}v = a\cdot(t-t_0)$$

$$v(t) - v(t_0) = a\cdot(t-t_0) \quad \text{, wähle } t_0 = 0 \text{ und } v(0) \equiv v_0$$

$$\Rightarrow v(t) = a\cdot t + v_0.$$

Nun berechnen wir noch die Funktion des Ortes $x(t)$ durch eine zweite Integration

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = v(t) = a\cdot t + v_0 \quad \Big| \int \mathrm{d}t'$$

$$\int_{0}^{t} \frac{\mathrm{d}x(t')}{\mathrm{d}t'}\,\mathrm{d}t' = \int_{0}^{t} (a\cdot t' + v_0)\,\mathrm{d}t' \quad \Rightarrow \quad \int_{x(0)}^{x(t)} \mathrm{d}x = a\cdot\frac{t^2}{2} + v_0 t$$

$$x(t) - x(0) = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t \quad , x(0) \equiv x_0$$

$$\Rightarrow x(t) = \underline{\underline{\frac{a}{2}t^2 + v_0 t + x_0}}.$$

b.) Wir können die einzelnen Komponenten separat integrieren:

$$v_i(t) = a_i t + v_{0i} \qquad \Rightarrow \quad \vec{v}(t) = \vec{a}t + \vec{v}_0$$

$$r_i(t) = \frac{a_i}{2}t^2 + v_{0i}t + r_{0,i} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}(t) = \frac{\vec{a}}{2}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$