1. Übung

Dienstag, 24. Oktober 2023 15:13

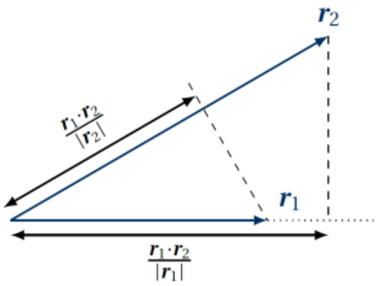
Organisatorisches

- Termin: Fr. 10:00 Uhr - 11:30 Uhr
- Kontakt:
  - M.beyer@uni-jena.de
  - Abbeanum Raum 007 (Fröbelstieg 1)
- Klausurzulassung: 50% in den Übungsserien und den Kurztests
- Website: martin-beyer.uni-jena.de
- Skript zum Auffrischungskurs

Mathematische Grundlagen

1.) Vektorrechnung

- Ortsvektor: $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ $\quad \vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$
- Betrag (Länge): $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq 0$
- Skalarprodukt: $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$



Geometrische Bedeutung:

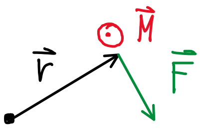
→ Länge der Projektion von $\vec{r}_1$ auf $\vec{r}_2$ multipliziert mit der Länge $|\vec{r}_2|$

- senkrechte Vektoren: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

- Vektorprodukt $\quad \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ z_1 x_2 - z_2 x_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$

- Betrag: $|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2| = |\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2| \cdot \sin(\sphericalangle(\vec{r}_1, \vec{r}_2))$
- anti-kommutativ: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- BAC-CAB Regel: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b})$

Beispiel Drehmoment $\quad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

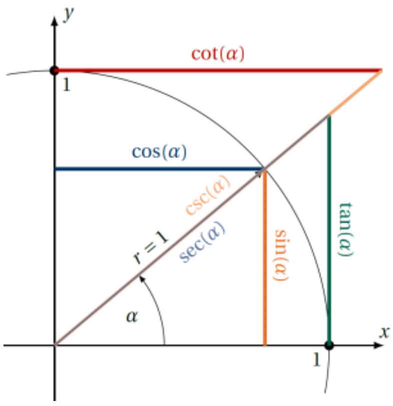


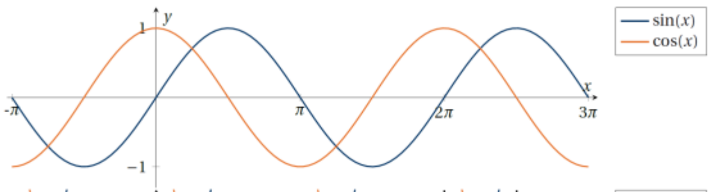
2.) Trigonometrische Funktionen

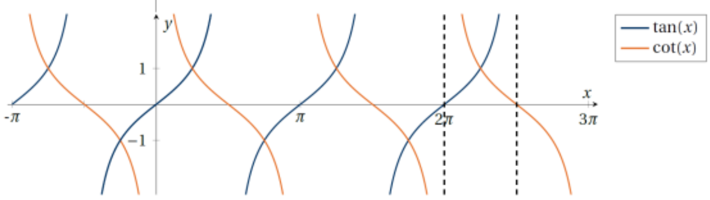
- Umrechnung: Grad- und Bogenmaß $\frac{\alpha[\mathrm{rad}]}{2\pi} = \frac{\alpha[°]}{360}$
- Definition am Einheitskreis:
- Trigonometrischer Pythagoras

$$\boxed{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1}$$

- Tangens: $\tan(\alpha) := \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$
- Kotangens: $\cot(\alpha) := \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{1}{\tan(\alpha)}$







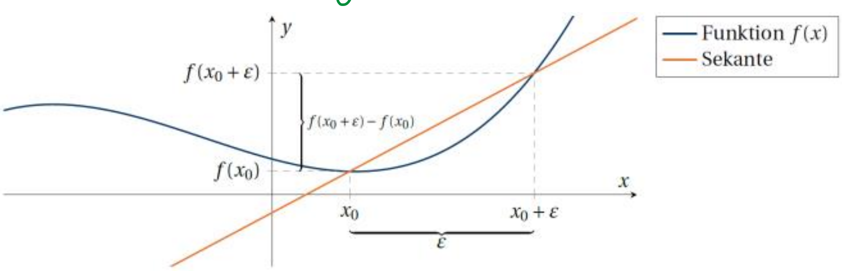
Additionstheoreme

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$
$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

$\Rightarrow$ Doppelwinkelfunktionen

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$
$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$$

3. Differentialrechnung



$$f'(x) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x_0+\varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}$$

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$$

Eigenschaften der Ableitung:

- Linearität: $(a, b \in \mathbb{R})$ $\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(af(x) + bg(x)\big) = a\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + b\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$
- Produktregel (Leibniz-Regel): $\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\cdot g(x) + f(x)\cdot\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$
- Kettenregel: $\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(g(x)) = \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\right)(g(x))}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \overbrace{\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}}^{\text{innere Ableitung}}.$
- Quotientenregel: $\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{1}{g(x)^2}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\cdot g(x) - f(x)\cdot\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right)$

Tabelle 4: Ableitungen spezieller Funktionen

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^n	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x)$		
$\exp(x)$	$\exp(x)$		
a^x	$\ln(a)a^x$		

4. Integralrechnung

- Umkehrung des Ableitens
- wir suchen nach einer Stammfunktion $F(x)$ mit $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx$

Beispiele: $\int 1\,dx = x + C$

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1} x^n + C \quad \text{für } n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

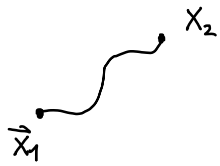
$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$$

- bestimmtes Integral: $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = F(x_2) - F(x_1)$

- Das Wegintegral:

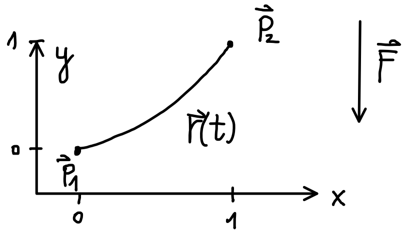
↳ Integration entlang einer Kurve im Raum

↳ Beantwortung der Frage nach der Arbeit, wenn ein Teilchen im Raum bewegt wird



- Beispiel: Massepunkt m im Gravitationsfeld

↳ Bewegung entlang einer Normalparabel von $\vec{P}_1 = \binom{0}{0}$ nach $\vec{P}_2 = \binom{1}{1}$



$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Arbeit}}}{W} = \int_{\vec{r}(s)} \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} \qquad d\vec{r} = ?$$

Die Kurve $\vec{r}(t)$ parametrisieren wir über die Zeit $t \in [0,1]$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \Rightarrow d\vec{r} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kettenregel}}}{\frac{d\vec{r}}{dt}\,dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt$$

$$\Rightarrow W = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}}_{\vec{F}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt}_{d\vec{r}} = \int_0^1 (0 \cdot 1 - 2mg\,t)\,dt$$

$$= \int_0^1 -2mgt\,dt = -mgt^2 \Big|_0^1 = -mg$$

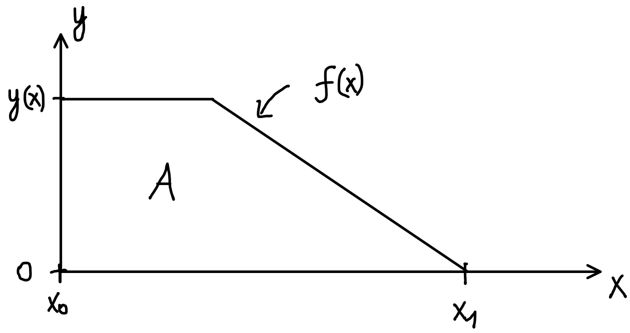
⇒ Minuszeichen: für die Bewegung muss Arbeit „verrichtet" werden

- Flächen- und Volumenintegrale

Doppelintegral: $A = \underset{\text{Fläche}}{\iint} dx\,dy$

$$\Rightarrow A = \int_{x_0}^{x_1} \int_0^{f(x)} dx\,dy = \int_{x_0}^{x_1} [y]_0^{f(x)}\,dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$$



⇒ Das bestimmte Integral beschreibt die Fläche unter dem Graphen $f(x)$.

- mit Dreifachintegralen können Volumen berechnet werden.

Kinematik

- kinematische Gleichung der gleichmäßig, geradlinig beschleunigten Bewegung

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \tfrac{1}{2}\vec{a}_0 t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0 \\ \vec{v}(t) &= \vec{a}_0 t + \vec{v}_0\end{aligned}}$$

- wir können daraus viele nützliche Formeln für den 1D-Fall herleiten $(v_0 = 0,\ s_0 = t)$
  - $s = \frac{a}{2} t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$ bzw. $a = \frac{2s}{t^2}$
  - $v = at \Rightarrow s = \frac{v}{2} t$ bzw. $s = \frac{v + v_0}{2} t$ für $v_0 \neq 0$

  ↳ Die Strecke lässt sich über die Durchschnittsgeschwindigkeit $\bar{v} = \frac{v + v_0}{2}$ berechnen

- Superpositionsprinzip: Voneinander unabhängige Bewegungen können vektoriell addiert werden

  ↳ Beispiel: waagerechter Wurf

  1.) horizontale konstante Geschwindigkeit $\vec{v}_x = v_x \vec{e}_x$
  2.) vertikale beschleunigte Geschwindigkeit $\vec{v}_y = -gt\vec{e}_y$

  $\Big\}\ \vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y = \begin{pmatrix} v_x \\ -gt \end{pmatrix}$

Aufgabe:
Berechne die Geschwindigkeit, mit der ein Turmspringer das Wasser trifft, wenn er von einem 10m Turm springt und dabei eine waagerechte Anlaufgeschwindigkeit von 5m/s hat. Wie lang muss das Becken mindestens sein, damit der Springer unversehrt bleibt?

geg: $s = 10\,m$ $\quad v_x = 5\,m/s$ $\quad v_{y,0} = 0$ $\qquad$ ges: v_{gesamt}, s_x

Lösung: $t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10m}{9{,}81m} s^2} \approx \sqrt{2}\,s \approx 1{,}4\,s$ $\quad 1{,}428\,s$

$v_y = a \cdot t \approx 10\,\frac{m}{s^2} \cdot 1{,}4\,s = 14\,\frac{m}{s}$ $\quad \Rightarrow v_{gesamt} = \sqrt{5^2 + 14^2}\,\frac{m}{s} = \sqrt{221}\,\frac{m}{s} \approx 15\,\frac{m}{s}$ //

$\Rightarrow s_x = 1{,}43\,s \cdot 5\,\frac{m}{s} \approx 7{,}1\,m$ //