

FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA
PHYSIKALISCH-ASTRONOMISCHE-FAKULTÄT



FRIEDRICH-SCHILLER-
UNIVERSITÄT
JENA

WINTERSEMESTER 2023/2024

Experimentalphysik 1

TUTORIUM

Inhaltsverzeichnis

1. Mechanik der Massenpunkte	3
1.1. Dynamik - Seilkräfte	3
1.2. Arbeit und Energie	6
1.3. Impuls - Der Stoß	8
1.3.1. Der Elastische Stoß	8
1.3.2. Der inelastische Stoß	13
1.4. Reibung	14
2. Der starre Körper	16
2.1. Drehmoment und Trägheitsmoment	16
2.2. Analogie zwischen Translations- und Rotationsbewegungen	21
3. Gravitation und Planetenbahnen	22
3.1. Das Gravitationsgesetz	22
3.2. Konservative Kraftfelder	23
3.3. Die Keplerschen Gesetze	26
4. Bezugssysteme und Trägheitskräfte	28
5. Schwingungen und Wellen	30
5.1. Mathematisches und physikalisches Pendel	30
5.2. Allgemeine, gedämpfte Schwingung	31
5.3. Die Wellengleichung	33
5.4. Schwebung	34
5.5. Doppler-Effekt	35
6. Hydrostatik	37
6.1. Schweredruck	37
6.2. Auftrieb	37
Appendix	39
A. Schiefer Stoß von Proton und Deuteron	39
B. Herleitung der Halbwinkelgleichung für Kosinusfunktionen	39

1. Mechanik der Massenpunkte

Für unsere folgenden Überlegungen machen wir immer von den drei Newtonschen Axiomen Gebrauch, die die Grundlage der klassischen Mechanik bilden:

1. Newton I: Trägheitsprinzip

Ein kräftefreier Körper bewegt sich geradlinig gleichförmig.

2. Newton II: Aktionsprinzip

Wenn eine Kraft F auf einen Körper mit (träger) Masse m wirkt, so wird dieser beschleunigt entsprechend

$$F = m \cdot a. \quad (1.1)$$

3. Newton II: Reaktionsprinzip

Wirkt ausgehend von Körper 1 eine Kraft F auf Körper 2, so wirkt auf Körper 1 ausgehend von Körper 2 die entgegengesetzt gleiche Kraft $-F$

1.1. Dynamik - Seilkräfte

Wir wollen in diesem Abschnitt die Frage klären, was der Begriff *Seilkraft* bedeutet und wie wir Seilkräfte explizit ausrechnen können. Für einen beliebigen Punkt im Seil können wir nach Newton II eine Kraftgleichung aufstellen:

$$F_{\text{Seil}} + F_{\text{ext.}} = m \cdot a. \quad (1.2)$$

Dabei stellt F_{Seil} die Seilkraft und $F_{\text{ext.}}$ eine extern wirkende Kraft dar. a bezeichnet die Beschleunigung des Seils. Anschaulich können wir die Seilkraft interpretieren als die Kraft die ein Federkraftmesser anzeigt, wenn wir das Seil durchschneiden und an den jeweiligen Enden des Federkraftmessers befestigen. Zur Bestimmung der Seilkraft eignen sich meist die Angriffspunkte der Massen am Seilende¹.

Betrachten wir nun das einfachste Beispiel eines Seils mit einem Massestück m das an einer Decke befestigt ist. Das Seil hängt in Ruhe, daher ist $a = 0$. Somit gilt

$$F_{\text{Seil}} + F_{\text{ext.}} = 0. \quad (1.3)$$

Die extern wirkende Kraft ist nun die Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$. Die beiden wirkenden Kräfte sind nun entgegengesetzt gerichtet und gleich groß. Es gilt also

$$F_{\text{Seil}} = F_G \approx 100\text{N}. \quad (1.4)$$

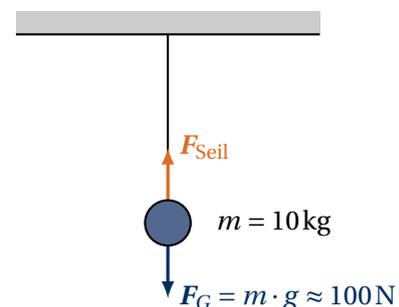


Abb. 1: Massestück am Seil.

¹Wir können auch im Seil selbst die Seilkraft bestimmen. Liegt allerdings ein dynamischer Fall eines sich bewegenden Seils vor, so müssen wir dem Seil selbst eine Masse zuweisen, um die Seilkraft zu berechnen

Beispiel: Tauziehen zweier Personen

Wir wollen nun das Beispiel von zwei Personen betrachten, die jeweils mit einer bestimmten Kraft an einem Tau ziehen. Zunächst nehmen wir den einfachen Fall an, dass beide mit der gleichen Kraft ($F = 100\text{ N}$) ziehen, wie in Abbildung 2 gezeigt:



Abb. 2: Seilkräfte beim Tauziehen mit gleicher Kraft an beiden Seiten. Hier beträgt die Seilkraft $F_{\text{Seil}} = 100\text{ N}$.

Für den statischen Fall, dass beide Personen mit der gleichen Kraft ziehen, ändert sich nichts gegenüber des vorherigen Beispiels mit der Masse am Seil. Im letzten Beispiel hat die Verankerung der Decke die Gegenkraft von 100 N aufgebracht, die nun von der zweiten Person verrichtet wird. Die Seilkraft beträgt also $F_{\text{Seil}} = 100\text{ N}$.

Machen wir nun das Beispiel etwas komplizierter, indem eine der beiden Personen nun mit 200 N an einem Seilende zieht. Dann ist die Nettokraft auf das Seil nicht mehr Null und es beginnt sich zu bewegen. Für die Bewegung müssen wir den Personen eine Masse zuweisen, um die Beschleunigung zu berechnen. Wir wählen die in Abbildung 3 gezeigten Massen an.

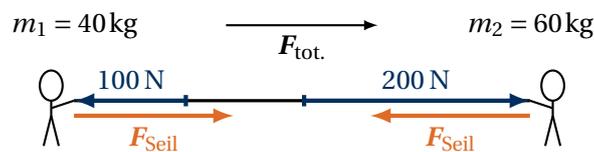


Abb. 3: Seilkräfte beim Tauziehen mit unterschiedlicher Kraft an beiden Seiten. Wir beobachten eine Gesamtkraft nach rechts, die eine Beschleunigung der beiden Personen zufolge hat. Zur Bestimmung der Beschleunigung müssen wir die Massen der beiden Personen kennen.

Wir berechnen zunächst die Gesamtbeschleunigung der beiden Personen

$$\mathbf{F}_{\text{tot}} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \Rightarrow F_{\text{tot}} = F_2 - F_1 = 100\text{ N} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F_{\text{tot}}}{m_1 + m_2} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (1.5)$$

Wir können nun für beide Personen jeweils die Kraft im Seil ausrechnen:

$$\begin{aligned} \text{links: } F_{\text{Seil}} - 100\text{ N} &= m_1 a \quad \Rightarrow F_{\text{Seil}} = m_1 a + 100\text{ N} = 40\text{ kg} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 100\text{ N} = 140\text{ N} \\ \text{rechts: } F_{\text{Seil}} - 200\text{ N} &= -m_2 a \quad \Rightarrow F_{\text{Seil}} = -m_2 a + 200\text{ N} = -60\text{ kg} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 200\text{ N} = 140\text{ N}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Wir erhalten für beide Personen die (wie erwartet) gleiche Seilkraft.

Beispiel: Seilkraft zweier Massen

Wir betrachten nun eine vereinfachte Version einer vergangenen Übungsaufgabe, wo eine Masse m_1 auf einem Wagen liegt und diese mit einer Rolle mit Masse m_2 verbunden ist, welche sich aufgrund der Gravitationskraft nach unten bewegt. Wir wollen nun am Ort der Masse m_1 die wirkende Seilkraft berechnen:

$$F_{\text{Seil}} + \underbrace{F_{G,1} + F_N}_{=0} = m_1 \mathbf{a}. \quad (1.7)$$

Die Gewichtskraft der Masse m_1 wird durch die Normalkraft des Wagens ausgeglichen. Die Masse bewegt sich nicht in vertikale Richtung. Die Gesamtbeschleunigung $\mathbf{a} = a \hat{\mathbf{e}}_x$ ergibt sich durch die Bewegung des Gesamtsystems beider Massen nach Newton II zu

$$F = m_2 \cdot g = (m_1 + m_2) \cdot a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{m_2 \cdot g}{m_1 + m_2}. \quad (1.8)$$

Damit folgt für die Seilkraft

$$F_{\text{Seil}} = m_1 a = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot g. \quad (1.9)$$

Wir können unser Ergebnis mit verschiedenen Grenzfällen auf Plausibilität überprüfen. Für $m_1 \rightarrow 0$ oder $m_2 \rightarrow 0$ verschwindet die Seilkraft, da das (masselose) Seil nicht mehr unter Spannung steht. Für $m_1 \rightarrow \infty$

$$\lim_{m_1 \rightarrow \infty} F_{\text{Seil}} = \lim_{m_1 \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{m_1}{m_1 + m_2}}_{\rightarrow 1} m_2 \cdot g = m_2 \cdot g. \quad (1.10)$$

Wird also die Masse m_1 unendlich schwer, so erhalten wir das erste Beispiel der an einer Decke aufgehängten Masse, wo die Seilkraft der Gewichtskraft der Masse entspricht.

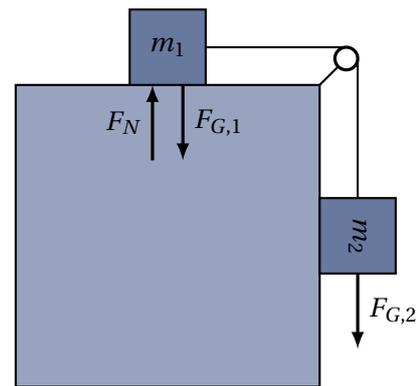


Abb. 4: Beispielskizze mit den wirkenden Kräften.

1.2. Arbeit und Energie

In der Mechanik haben wir zwei verschiedene Formen von mechanischer Energie kennengelernt:

1. kinetische Energie: $E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} v^2$.
2. potentielle Energie: E_{pot} .
Dies bezeichnet die in einem Körper gespeicherte Arbeit, die in Form von potentieller Energie zu Verfügung steht.

Wir haben einerseits die Hubarbeit kennengelernt:

$$W_{\text{hub}} = mg\Delta h, \quad (1.11)$$

wobei ein Körper der Masse m , welcher um die Höhe Δh angehoben wird, die Hubarbeit W_{hub} in Form von potentieller Energie "speichert".

Andererseits ist auch in einer gespannten Feder potentielle Energie gespeichert. Um die gespeicherte Arbeit zu berechnen, müssen wir ebenfalls über die Kraft der Feder integrieren

$$E_{\text{pot}} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{\Delta x} kx \, dx = \frac{k}{2} (\Delta x)^2. \quad (1.12)$$

Bei Kräften, wo die geleistete Arbeit nur vom Start- und Endpunkt abhängt (konservative Kräfte), lässt sich zur Kraft \mathbf{F} ein entsprechendes Potential U definieren, welches über

$$\vec{\nabla} U(\mathbf{r}) = -\mathbf{F}(\mathbf{r}), \quad (1.13)$$

definiert ist. Die geleistete Arbeit ergibt sich dann als die Potentialdifferenz zwischen Start- und Endpunkt. Für die Feder lautet das zugehörige Potential

$$U(x) = -\frac{k}{2} x^2. \quad (1.14)$$

Beispiel: Federung einer bewegten Masse

Eine Masse m bewegt sich reibungslos auf einer horizontalen Fläche mit der Geschwindigkeit v_0 . Sie kollidiert mit einer masselosen Feder der Federkonstanten k . Wie weit wird die Feder verformt, wenn die Masse zum Stillstand kommt?

Lösung: Bei diesem Beispiel wird die kinetische Energie der Masse vollständig in potentielle Energie der Feder umgewandelt. Hierbei verrichtet die Masse Arbeit an der Feder, die für diesen (elastischen) Prozess die gesamte kinetische Energie umwandelt:

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}} = E_{\text{kin}} &\Rightarrow \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad | \cdot 2; : k \\ x^2 &= \frac{m v_0^2}{k} \\ x &= \sqrt{\frac{m v_0^2}{k}}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Übungsaufgabe: Fadenpendel

Ein Pendel besteht aus einem Pendelkörper der Masse m , der an einer masselosen Schnur der Länge $l = 1\text{ m}$ befestigt ist. Der ruhend an der senkrechten Schnur hängende Pendelkörper wird kurzzeitig so angestoßen, dass er eine horizontale Geschwindigkeit von $v_0 = \pi \frac{\text{m}}{\text{s}}$ erhält. Wie groß ist zu diesem Zeitpunkt die wirkende Seilkraft? Bei welchem Winkel φ zur Vertikalen erreicht der Pendelkörper seinen höchsten Punkt? Wie groß ist dann die Zugkraft im Seil?

Lösung: Zur Berechnung der Seilkraft müssen wir wieder das Kraftgleichgewicht (1.2) aufstellen. Da der Pendelkörper die Geschwindigkeit v_0 besitzt, wirkt eine Zentripetalkraft nach oben, die das Pendel in eine Kreisbewegung bringt. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_G &= m \cdot \mathbf{a} = \frac{mv_0^2}{l} \hat{\mathbf{e}}_y = \mathbf{F}_{ZP} \\ \Rightarrow \mathbf{F}_s &= m \cdot g \hat{\mathbf{e}}_y + \frac{mv_0^2}{l} \hat{\mathbf{e}}_y = m \left(g + \frac{v_0^2}{l} \right) \hat{\mathbf{e}}_y. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Setzen wir die Werte ein und benutzen $v_0^2/l = \pi^2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx g$, dann erhalten wir $F_s = 2mg$.

Nun versuchen wir den höchsten Punkt des Pendels zu finden. Dieser ist erreicht, wenn die gesamte kinetische Energie in potentielle Energie umgewandelt wurde:

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} = E_{\text{pot}} &\Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = m \cdot g \cdot \Delta h \\ \Rightarrow \Delta h &= \frac{v_0^2}{2g} \approx 0,5\text{ m}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Damit erhalten wir für den Winkel φ

$$\cos \varphi = \frac{l - \Delta h}{l} = \frac{2gl - v_0^2}{2gl} \stackrel{\pi^2 \approx g}{\approx} \frac{gl}{2gl} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ. \quad (1.18)$$

Die Zugkraft im Seil ergibt sich aus der Komponente F_Z der Gewichtskraft entlang der Seilachse. Die Zentripetalkraft brauchen wir nicht beachten, da das Pendel bei der maximalen Auslenkung ruht. Da wir zwischen F_G und F_Z den Winkel φ identifizieren können, erhalten wir

$$\mathbf{F}_s = -\mathbf{F}_Z \Rightarrow F_s = F_G \cos \varphi = \frac{1}{2}mg. \quad (1.19)$$

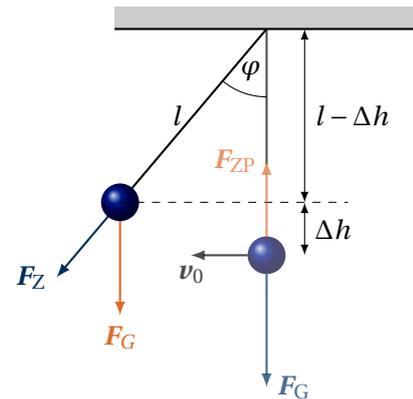


Abb. 5: Fadenpendel mit den wirkenden Kräften

1.3. Impuls - Der Stoß

Wir wollen im Folgenden Stoßprozesse zwischen zwei Massen betrachten, die kurzzeitig aufeinander Kräfte ausüben und in Folge dessen ihren Bewegungszustand ändern. Für alle Stöße gilt der Impulserhaltungssatz.

1.3.1. Der Elastische Stoß

Bei dem elastischen Stoß gilt der Erhaltungssatz der kinetischen Energie, d. h. es wird keine kinetische Energie in Wärme oder Deformationsenergie umgewandelt. Zur Beschreibung des elastischen Stoßes stellen wir die beiden Erhaltungssätze auf:

$$\text{Impulserhaltung:} \quad m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{u}_1 + m_2 \mathbf{u}_2 \quad (1.20)$$

$$\text{Energieerhaltung:} \quad \frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2 = \frac{m_1}{2} u_1^2 + \frac{m_2}{2} u_2^2. \quad (1.21)$$

Dabei bezeichnet \mathbf{v}_i die Geschwindigkeit vor dem Stoß und \mathbf{u}_i die Geschwindigkeit nach dem Stoß.

Der Stoßkreis

Für den Fall, dass einer der Stoßpartner ruht, können wir einen sogenannten Stoßkreis definieren, auf dessen Rand der Impulsvektor des gestoßenen Körpers liegt.

Aus der Impulserhaltung lesen wir grafisch ab:

$$p_1'^2 = (p_1 - p_x')^2 + p_y'^2 \quad (1.22)$$

$$p_2'^2 = p_x'^2 + p_y'^2. \quad (1.23)$$

Setzen wir dies in die Gleichung für die Energieerhaltung ein, folgt

$$\begin{aligned} \frac{p_1^2}{2m_1} &= \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} = \frac{(p_1 - p_x')^2 + p_y'^2}{2m_1} + \frac{p_x'^2 + p_y'^2}{2m_2} \\ &= \frac{p_1^2 - 2p_1 p_x' + p_x'^2 + p_y'^2}{2m_1} + \frac{p_x'^2 + p_y'^2}{2m_2} \\ \frac{p_x'^2}{2m_1} &= \frac{p_x'^2}{2m_1} - \frac{2p_1 p_x'}{2m_1} + \frac{1}{2}(p_x'^2 + p_y'^2) \underbrace{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}_{=\mu^{-1}} \\ \Rightarrow \frac{p_1 p_x'}{m_1} &= \frac{1}{2}(p_x'^2 + p_y'^2) \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right). \quad (1.24) \end{aligned}$$

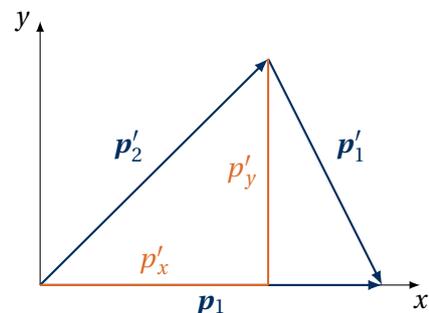


Abb. 6: Geometrie des Problems

Wir führen im Folgenden die *reduzierte Masse* μ ein, die definiert ist als

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \text{Spezialfall: } m_1 = m_2 \Rightarrow \mu = \frac{m_1}{2}. \quad (1.25)$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
 2\mu v_1 p'_x &= p_x'^2 + p_y'^2 \\
 \Rightarrow (\mu v_1)^2 &= p_x'^2 - 2\mu v_1 p'_x + (\mu v_1)^2 + p_y'^2 \\
 \Rightarrow (\mu v_1)^2 &= (p_x' - \mu v_1)^2 + p_y'^2.
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

Dies stellt nun eine Gleichung eines Kreises mit Radius μv_1 dar, dessen Mittelpunkt um μv_1 nach rechts verschoben ist.

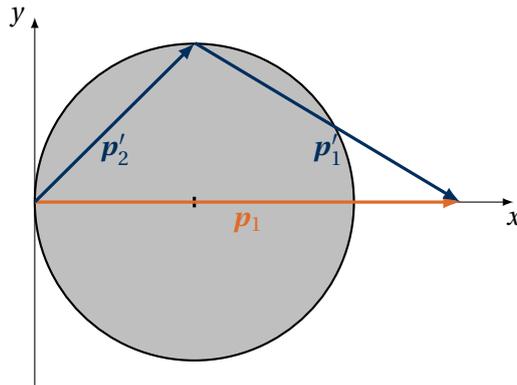


Abb. 7: Visualisierung des Stoßkreises. Alle möglichen Impulsvektoren des gestoßenen Partners liegen auf dem Rand des Stoßkreises. Für den Spezialfall $m_1 = m_2$ gilt $p_1 = 2\mu v_1$ (siehe (1.25)) und der Vektor p_1 endet auf dem Rand des Kreises. Dann erkennen wir mit dem Satz des Thales, dass p_1' und p_2' senkrecht aufeinander stehen müssen.

Übungsaufgabe: Schiefer elastischer Stoß

Ein Proton (Masse m_p) bewegt sich mit der Geschwindigkeit v und stößt völlig elastisch mit einem ruhenden Deuteron (Masse m_d) zusammen. Nach dem Stoß fliegt das Deuteron in eine Richtung, die einen Winkel $\varphi_d = 45^\circ$ gegen die Richtung von v hat.

- Bestimmen Sie den Ablenkwinkel φ_p des Protons.
- Bestimmen sie die Endgeschwindigkeiten u_p und u_d von Proton und Deuteron!

Lösung mit Impuls- und Energieerhaltung: Für die Beschreibung des elastischen Stoßes von Proton und Deuteron benutzen wir den Impuls- und Energieerhaltungssatz und fertigen eine Skizze des Problems an.

IES: Da das Deuteron ruht ($p_d = 0$) folgt nach Impulserhaltung

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}_p &= \mathbf{p}'_p + \mathbf{p}'_d \\
 m_p \mathbf{v}_p &= m_p \mathbf{u}_p + m_d \mathbf{u}_d.
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

Komponentenweise folgt damit (definiere $\xi := \frac{m_d}{m_p}$)

$$v_p = u_{p,x} + \xi u_{d,x} \tag{1.28}$$

$$0 = u_{p,y} + \xi u_{d,y}. \tag{1.29}$$

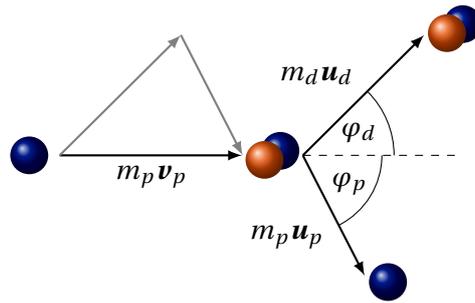


Abb. 8: Impulserhaltung und Energieerhaltung beim Stoß von Proton und Deuteron.

Der Ablenkwinkel des Deuterons ist gleich φ_d , daher gilt für die Geschwindigkeitskomponenten des Deuterons nach dem Stoß

$$\frac{u_{d,y}}{u_{d,x}} = \tan \varphi_d \quad \Rightarrow \quad u_{d,y} = \tan \varphi_d u_{d,x}. \quad (1.30)$$

EES: Betrachten wir nun noch die Energieerhaltung

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_p v_p^2 &= \frac{1}{2} m_p u_p^2 + \frac{1}{2} m_d u_d^2 \quad | \cdot 2; : m_p \\ v_p^2 &= u_p^2 + \xi u_d^2 = u_p^2 + \xi (u_{d,x}^2 + u_{d,y}^2) \stackrel{(1.30)}{=} u_p^2 + \xi u_{d,x}^2 (1 + \tan^2 \varphi_d). \end{aligned} \quad (1.31)$$

Um jetzt den Ablenkwinkel des Protons φ_p zu berechnen, müssen wir aus dem Gleichungssystem mit vier Variablen $u_{d,x}$ und $u_{d,y}$ eliminieren, um $\varphi_p = \frac{u_{p,y}}{u_{p,x}}$ zu finden. Dafür können wir (1.28) (quadriert) mit (1.31) gleichsetzen. Berechnen wir dies nun für den Spezialfall² der Aufgabenstellung $\tan \varphi_d = 1$

$$\begin{aligned} &\stackrel{(1.28)^2}{\Rightarrow} v_p^2 = u_{p,x}^2 + 2\xi u_{p,x} u_{d,x} + \xi^2 u_{d,x}^2 \\ (1.31) &\stackrel{(1.28)^2}{\Rightarrow} \underbrace{u_{p,x}^2 + u_{p,y}^2}_{=u_p^2} + \xi u_{d,x}^2 \underbrace{(1 + \tan^2 \varphi_d)}_2 = \cancel{u_{p,x}^2} + 2\xi u_{p,x} u_{d,x} + \xi^2 u_{d,x}^2 \\ &u_{p,y}^2 = 2\xi u_{p,x} u_{d,x} + \xi(\xi - 2) u_{d,x}^2 \\ &\stackrel{(1.30)}{=} 2\xi u_{p,x} u_{d,y} + \xi(\xi - 2) u_{d,y}^2 \\ \xi u_{d,y} &\stackrel{=-u_{p,y}}{\Rightarrow} u_{p,y} \stackrel{(1.29)}{=} -2u_{p,x} u_{p,y} + \frac{(\xi - 2)}{\xi} u_{p,y}^2 \\ u_{p,y} &\left[\underbrace{1 - \frac{(\xi - 2)}{\xi}}_{=2/\xi} \right] = -2u_{p,x} \quad \Rightarrow \quad \tan \varphi_p = \frac{u_{p,y}}{u_{p,x}} = \underline{\underline{-\xi^{\xi=2} - 2}}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

²Eine ausführliche Rechnung für einen beliebigen Winkel φ_d ist in Anhang A aufgeführt.

Wir können nun zum nächsten Aufgabenteil übergehen und aus dem ermittelten Winkel noch die Geschwindigkeiten von Proton und Deuteron berechnen. Dafür formen wir Gleichung (1.32) um

$$\begin{aligned}
 u_{p,y} &= -\xi u_{p,x} \stackrel{(1.28)}{=} \xi(v_p - \xi \underbrace{u_{d,x}}_{u_{d,y}}) \\
 \stackrel{(1.29)}{\implies} \cancel{\xi} u_{d,y} &= \cancel{\xi}(v_p - \xi u_{d,y}) \\
 \implies (1 + \xi)u_{d,y} &= v_p \quad \Rightarrow \quad u_{d,y} = \frac{1}{1 + \xi} v_p \\
 \implies u_d &= \sqrt{u_{d,x}^2 + u_{d,y}^2} = \sqrt{2u_{d,y}^2} = \frac{\sqrt{2}}{1 + \xi} v_p \stackrel{\xi=2}{=} \frac{\sqrt{2}}{3} v_p. \quad (1.33)
 \end{aligned}$$

Nach Energieerhaltungssatz (1.31) folgt nun für das Proton

$$u_p = \sqrt{v_p^2 - \xi u_d^2} = v_p \sqrt{1 - \frac{2\xi}{(1 + \xi)^2}} \stackrel{\xi=2}{=} \frac{\sqrt{5}}{3} v_p. \quad (1.34)$$

Lösung mithilfe des Stoßkreises: Wir wollen die Aufgabe nun noch einmal mithilfe der Methode des Stoßkreises betrachten.

Der Stoßkreis hat nach (1.26) den Radius $R = \mu v_1$, wobei

$$\mu = \frac{m_p \cdot m_d}{m_p + m_d} = \frac{\xi}{\xi + 1} m_p \quad \text{mit} \quad \xi = \frac{m_d}{m_p}. \quad (1.35)$$

Aus der Kreisgleichung des Stoßkreises folgt

$$\begin{aligned}
 0 &= (m_d u_{d,x} - \mu v_p)^2 + (m_d u_{d,y})^2 - (\mu v_p)^2 \\
 &= (m_d u_{d,x})^2 + (m_d u_{d,y})^2 - 2\mu v_p (m_d u_{d,x}) \quad | : m_d^2 \\
 &= u_{d,x}^2 + u_{d,y}^2 - 2 \frac{\mu}{m_d} v_p u_{d,x} \\
 \Rightarrow v_p u_{d,x} \frac{2}{\xi + 1} &= u_{d,x}^2 + u_{d,y}^2 = u_d^2. \quad (1.36)
 \end{aligned}$$

Die Impulskomponenten des Deuterons sind natürlich $u_{d,x} = \cos \varphi_d u_d$ und $u_{d,y} = \sin \varphi_d u_d$. Damit folgt daraus:

$$u_{d,x} \cos \varphi_d v_p \frac{2}{\xi + 1} = u_d^2. \quad (1.37)$$

Wenn $u_d \neq 0$ kann es auf beiden Seiten gekürzt werden und wir erhalten folgende Ausdrücke für die Impulskomponenten:

$$u_d = v_p \frac{2}{\xi + 1} \cos(\varphi_d), \quad u_{d,x} = v_p \frac{2}{\xi + 1} \cos^2(\varphi_d), \quad u_{d,y} = v_p \frac{1}{\xi + 1} \sin(2\varphi_d) \quad (1.38)$$

Bei der letzten Komponente haben wir das Additionstheorem $\sin(2\varphi_d) = 2 \sin \varphi_d \cos \varphi_d$ genutzt.

Wir können nun analog zu Gleichung (1.34) die Geschwindigkeit des Protons ausrechnen zu

$$u_p = \sqrt{v_p^2 - \xi u_d^2} = v_p \sqrt{1 - 4\xi \left(\frac{\cos \varphi_d}{\xi + 1} \right)^2}. \quad (1.39)$$

Wir sehen ebenso, dass das Ergebnis mit Gleichung (1.34) für $\cos(\varphi_d = 45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ übereinstimmt.

Über die Formeln der Impulserhaltung (Gleichungen (1.28) und (1.29)) können wir jetzt die noch die Komponenten $u_{p,x}$ und $u_{p,y}$ bestimmen

$$\begin{aligned} u_{p,x} &= v_p - \xi u_{d,x} = v_p \left(1 - \frac{2\xi}{\xi + 1} \cos^2(\varphi_d) \right) = v_p \frac{1}{\xi + 1} (\xi + 1 - 2\xi \cos^2(\varphi_d)) \\ u_{p,y} &= -\xi u_{d,y} = -v_p \frac{\xi}{\xi + 1} \sin(2\varphi_d). \end{aligned} \quad (1.40)$$

Damit erhalten wir den Stoßwinkel des Protons als

$$\tan \varphi_p = \frac{u_{p,y}}{u_{p,x}} = \frac{-\xi \sin(2\varphi_d)}{\xi + 1 - 2\xi \cos^2(\varphi_d)} = \frac{\xi \sin(2\varphi_d)}{\xi \cos(2\varphi_d) - 1}. \quad (1.41)$$

1.3.2. Der inelastische Stoß

Beim inelastischen Stoß gilt der Erhaltungssatz der kinetischen Energie *nicht* mehr, d. h. es wird kinetische Energie in Wärme oder Deformationsenergie umgewandelt. Zur Beschreibung des inelastischen Stoßes können wir nur die Impulserhaltung nutzen

$$\text{Impulserhaltung:} \quad m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{u}_1 + m_2 \mathbf{u}_2. \quad (1.42)$$

Übungsaufgabe: Ballistisches Pendel

Bis zu welcher Höhe schlägt ein ballistisches Pendel der Masse $M = 10 \text{ kg}$ aus, wenn es von einem Geschoss der Masse $m = 0,1 \text{ kg}$ und der Geschwindigkeit $v = 220 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ getroffen wird? Dabei bleibt das Geschoss in der Pendelmasse stecken.

Lösung: Nach dem Stoß bewegen sich die beiden Stoßpartner gemeinsam weiter. Außerdem ruht das ballistische Pendel zu Beginn ($v_2 = 0$). Der Impulserhaltungssatz vereinfacht sich also zu

$$mv = (m + M)u \quad \Rightarrow \quad u = \frac{m}{m + M}v = \frac{0,1 \text{ kg}}{10,1 \text{ kg}} \cdot 220 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2,18 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (1.43)$$

Somit erhalten wir die Geschwindigkeit des Pendels (inklusive Geschoss) nach dem Stoß. Jetzt wird die kinetische Energie durch die Auslenkung des Pendels in potentielle Energie umgewandelt wobei bei maximaler Höhenauslenkung h gilt:

$$E_{\text{kin}} = \frac{m + M}{2}u^2 = (m + M) \cdot g \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{u^2}{2g} = 24,2 \text{ cm}. \quad (1.44)$$

Übungsaufgabe: Eisenbahnwagen

Ein oben offener leerer Eisenbahnwagen der Masse $m_0 = 12 \text{ t}$ bewege sich reibungsfrei mit $v_0 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Während der Bewegung fällt aus einem ruhenden Greifbagger senkrecht von oben Sand mit der Masse $m_1 = 1 \text{ t}$ in den Wagen. Wie groß ist die Geschwindigkeit des beladenen Wagens? Um welchen Betrag ändert sich die kinetische Energie des Wagens?

Lösung: Bei diesem Beispiel handelt es sich ebenfalls wieder um einen inelastischen Stoß, da sich Wagen als auch Sand nach dem Ladevorgang gemeinsam fortbewegen. Wir können entsprechend nur die Impulserhaltung ansetzen. Mithilfe von Gleichung (1.43) folgt für die Geschwindigkeit des beladenen Wagens

$$u = \frac{m_0}{m_0 + m_1}v = \frac{12 \text{ t}}{13 \text{ t}} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1,85 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (1.45)$$

Die Änderung der kinetischen Energie des Wagens lässt sich aus der Differenz der kinetischen Energien vor und nach dem Ladevorgang bestimmen:

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{kin}} &= E_{\text{kin},1} - E_{\text{kin},2} = \frac{m_0}{2} v_0^2 - \frac{m_0 + m_1}{2} u^2 \\ &= \frac{m_0}{2} v_0^2 - \frac{m_0 + m_1}{2} \left(\frac{m_0}{m_0 + m_1} \right)^2 v_0^2 = \frac{1}{2} \left(m_0 - \frac{m_0^2}{m_0 + m_1} \right) v_0^2\end{aligned}\quad (1.46)$$

$$= \frac{1}{2} \left(12\text{t} - \frac{(12\text{t})^2}{13\text{t}} \right) \cdot \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 = 1,85 \text{ kJ}.\quad (1.47)$$

1.4. Reibung

Im Folgenden Kapitel wollen wir uns mit Reibungsphänomenen beschäftigen. Lassen wir einen Körper über eine Unterlage gleiten, so müssen wir eine Kraft aufbringen, um die Geschwindigkeit des Körpers konstant zu halten. Nach Newton I ist der Körper dann kräftefrei, also muss es eine Gegenkraft, die Reibungskraft, geben, die proportional zur Normalkraft F_N des Körpers ist:

$$F_R = \mu_G F_N.\quad (1.48)$$

Die Proportionalitätskonstante μ_G wird Gleitreibungskoeffizient genannt und hängt nur vom Material und der Oberflächenbeschaffenheit ab, jedoch nicht von der Geschwindigkeit des Körpers.

Liegt ein Körper auf einer festen Unterlage in Ruhe und soll durch eine Kraft F in Bewegung versetzt werden, so wird sich der Körper für kleine Beträge dieser Kraft gar nicht bewegen. Damit dies geschieht, über der Körper nach Newton III eine entsprechende Gegenkraft aus, die Haftreibungskraft genannt wird und es gilt

$$F_R = \mu_H F_N,\quad (1.49)$$

wobei μ_H der Haftreibungskoeffizient ist. Mit dieser Kraft können wir eine Bedingung aufstellen, ab wann ein Körper auf einer schiefen Ebene zu rutschen beginnt. Dies ist der Fall, wenn die Hangabtriebskraft F_H betragsmäßig gleich der Haftreibungskraft ist.

Es ist wichtig zu wissen, dass sich die beiden Koeffizienten von Haft- und Gleitreibung voneinander unterscheiden. Dabei ist der Haftreibungskoeffizient immer etwas größer als der Gleitreibungskoeffizient

$$\mu_H > \mu_G,\quad (1.50)$$

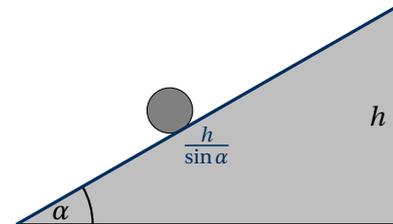
es wird also eine größere Kraft benötigt, um einen ruhenden Körper in Bewegung zu setzen, als ihn bei konstanter Geschwindigkeit zu halten.

Übungsaufgabe:

Auf einer um $\alpha = 30^\circ$ gegen die Horizontale geneigten Ebene bewegt sich eine Masse m aufwärts. Ihre Anfangsgeschwindigkeit sei v_0 und die Gleitreibungszahl $\mu_G = 0.2$. Welche Geschwindigkeit v hat sie, wenn sie zum Ausgangspunkt zurückkehrt?

Lösung: Bei der Bewegung entlang der geneigten Ebene wirkt auf die Masse die Normalkraft

$$\begin{aligned} F_N &= F_G \cdot \cos \alpha = mg \cdot \cos \alpha \\ F_R &= \mu_G mg \cdot \cos \alpha. \end{aligned} \quad (1.51)$$



Bewegt sich die Masse nun um die Höhe h entlang der Ebene nach oben, so wird dabei folgende Arbeit verrichtet:

$$W = \int (\mathbf{F}_g + \mathbf{F}_R) ds = mg \cdot h + \frac{h}{\sin \alpha} F_R = mg \cdot h(1 + \mu_G \cot \alpha). \quad (1.52)$$

Bei der durch die Gewichtskraft geleisteten Arbeit spielt nur die zurückgelegte Höhe eine Rolle, während bei der Reibungskraft die zurückgelegte Wegstrecke entlang der Ebene relevant ist. Zur Bestimmung der finalen Höhe, die die Masse erreicht, setzen wir die geleistete Arbeit gleich der kinetischen Energie

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= W \\ \frac{m}{2} v_0^2 &= mg \cdot h(1 + \mu_G \cot \alpha) \Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g} \frac{1}{1 + \mu_G \cot \alpha}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Die Geschwindigkeit der Masse bei der Rückkehr zum Ausgangspunkt ergibt sich, indem wir die durch Reibungsverluste in Wärme umgewandelte Energie von der kinetischen Energie zu Beginn abziehen und damit die neue Geschwindigkeit berechnen:

$$\begin{aligned} E'_{\text{kin}} &= E_{\text{kin}} - \frac{2h}{\sin \alpha} F_R \\ &= E_{\text{kin}} - \frac{v_0^2}{g} \frac{1}{1 + \mu_G \cot \alpha} \frac{\mu_G mg \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} \\ &= E_{\text{kin}} - m v_0^2 \frac{\mu_G \cot \alpha}{1 + \mu_G \cot \alpha} \\ &= \frac{m}{2} v_0^2 \left(1 - \frac{2\mu_G \cot \alpha}{1 + \mu_G \cot \alpha} \right). \end{aligned} \quad (1.54)$$

Das heißt, die Geschwindigkeit v ist folglich

$$v = v_0 \sqrt{1 - \frac{2\mu_G \cot \alpha}{1 + \mu_G \cot \alpha}} = v_0 \sqrt{1 - \frac{2 \cdot 0.2 \cdot \sqrt{3}}{1 + 0.2 \cdot \sqrt{3}}} \approx 0.70 v_0. \quad (1.55)$$

2. Der starre Körper

Wir wollen uns nun von der Vorstellung eines Massenpunktes lösen und ausgedehnte Körper mit einer Massenverteilung betrachten. Für bestimmte Bewegungen wie eine einfache Translation lässt sich der ausgedehnte Körper durch einen Massepunkt der gleichen Masse im Schwerpunkt des starren Körpers ersetzen. Allerdings benötigen wir zur Beschreibung von Drehbewegungen die geometrische Form des starren Körpers.

2.1. Drehmoment und Trägheitsmoment

Das Drehmoment \mathbf{M} ist eine vektorielle Größe, welche die Wirkung einer Kraft \mathbf{F} im Abstand \mathbf{r} vom Drehpunkt des starren Körpers beschreibt. Dabei gilt:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad \text{mit} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_D. \quad (2.1)$$

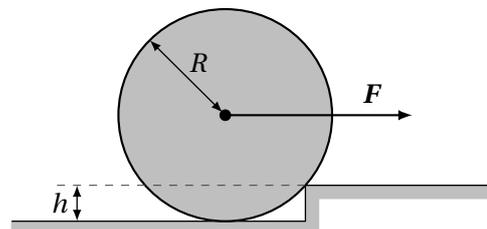
Hierbei ist \mathbf{r}_0 der Ortsvektor des Punktes und \mathbf{r}_D der Ortsvektor des Drehpunktes. Das Drehmoment steht senkrecht zur Kraft \mathbf{F} und zum Verbindungsvektor \mathbf{r} zwischen Drehpunkt und Angriffspunkt der Kraft. Die Richtung des Drehmomentes gibt die Achse der Drehung an. Der Drehsinn lässt sich mithilfe der Rechten-Hand-Regel bestimmen. Zeigt der Daumen in Richtung des Drehmomentes, so zeigen die restlichen (gekrümmten) Finger die Richtung der Drehung an.

Wirkt nun auf einen starren Körper ein bestimmtes Drehmoment \mathbf{M} , so beginnt sich dieser mit der Winkelgeschwindigkeit ω zu drehen. Die Bahngeschwindigkeit eines beliebigen Punktes des starren Körpers, ergibt sich über das Kreuzprodukt mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\mathbf{v}_B = \omega \times \mathbf{r}. \quad (2.2)$$

Übungsaufgabe: Drehbewegung eines Rades

Ein Rad der Masse m habe den Radius R . Es stehe senkrecht auf dem Fußboden. Wir möchten an seiner Achse eine horizontale Kraft F ausüben, damit es eine Stufe, an der es ruht, hinaufrollt (s. Abbildung). Die Stufe hat die Höhe h und $h < R$. Wie groß ist die erforderliche minimale Kraft F ?



Lösung: Die beiden am Rad angreifenden Kräfte sind die Gewichtskraft F_G und die externe Kraft F , die beide jeweils auf den Mittelpunkt des Rades wirken und dabei ein Drehmoment erzeugen. Dabei ist das wirkende Drehmoment für beide Kräfte entgegengerichtet. Die minimale Kraft zum Hinaufrollen des Rades liegt dann vor, wenn das Drehmoment genau das durch die Gewichtskraft generierte Drehmoment ausgleicht. Wir betrachten nur den Betrag des Drehmoments M für den gilt

$$M = |\mathbf{r}| \cdot |\mathbf{F}| \sin(\angle(\mathbf{r}, \mathbf{F})). \quad (2.3)$$

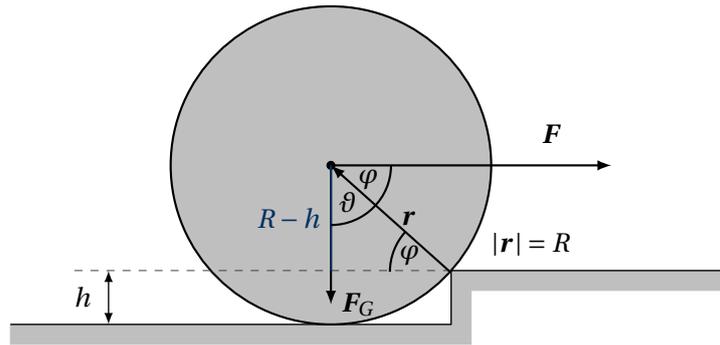


Abb. 9: Wirkende Kräfte am Rad und Winkel zwischen Kraft- und Radiusvektor. Eigentlich müsste der eingeschlossene Winkel zwischen \mathbf{r} und \mathbf{F} der Gegenwinkel $\pi - \varphi$ sein, allerdings ändert sich an der Rechnung nichts, da $\sin \varphi = \sin(\pi - \varphi)$ ist.

Der Vektor \mathbf{r} ergibt sich nach Gleichung (2.1) als Differenz des Mittelpunktes und Drehpunktes an der Stufe und ist in Abbildung 9 eingezeichnet.

Wir können nun für beide Kräfte die wirkenden Drehmomente formulieren und die Sinusfunktionen durch bekannte Größen ersetzen:

$$M = |\mathbf{r}| \cdot F \sin \varphi = R \cdot F \frac{R-h}{R} \quad (2.4)$$

$$M_G = |\mathbf{r}| \cdot F_G \sin \vartheta = R \cdot F_G \frac{\sqrt{R^2 - (R-h)^2}}{R}.$$

Setzen wir nun beide Ausdrücke gleich $M \stackrel{!}{=} M_G$, und lösen nach F auf, so erhalten wir

$$F = F_G \frac{\sqrt{R^2 - (R-h)^2}}{R-h} = m \cdot g \frac{\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}. \quad (2.5)$$

Das Massenträgheitsmoment

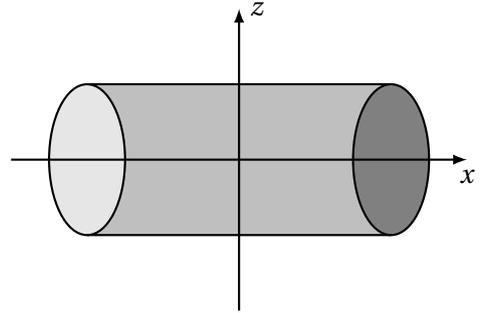
Wollen wir nun die Bewegung des starren Körpers um eine bestimmte Drehachse beschreiben, so müssen wir einen Ausdruck finden, um die Trägheit der einzelnen Massenelemente bei der Drehung zu charakterisieren. Das sogenannte *Massenträgheitsmoment* J_A (bezüglich der Drehachse A) gibt die Trägheit des starren Körpers gegenüber einer Änderung seiner Winkelgeschwindigkeit an. Je ein Massenelement von der Drehachse entfernt, so trägt es mit quadratischer Abhängigkeit stärker zum Gesamtträgheitsmoment bei. Wir definieren J_A folgendermaßen:

$$J_A = \int_V \rho(\mathbf{r}) r_{\perp}^2 dV. \quad (2.6)$$

Hierbei gibt die Größe $r_{\perp}(\mathbf{r})$ den vertikalen Abstand des Punktes \mathbf{r} von der Drehachse an.

In der Vorlesung wurde bereits das Trägheitsmoment eines Voll- und Hohlzylinders hergeleitet für den Fall, dass die Drehachse der Symmetrieachse entspricht. Verläuft die Drehachse zwar durch den Mittelpunkt, aber senkrecht zu Drehachse, verändert sich entsprechend das Trägheitsmoment, welches wir im Folgenden berechnen wollen.

Die Drehachse sei weiterhin die z -Achse, allerdings verläuft die Symmetrieachse des Zylinders in x -Richtung. Wir berechnen nun das Massenträgheitsmoment des Zylinders mit Länge L und Radius R für eine konstante Massendichte ρ



$$J_A = \rho \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-R}^R dy \int_{-z(y)}^{z(y)} dz r_{\perp}^2. \quad (2.7)$$

Der vertikale Abstand zur Drehachse ist einfach $r_{\perp}^2 = x^2 + y^2$. Die Funktion $z(y)$ ergibt sich über die Kreisgleichung des Zylinders für $x = 0$ mit $z^2 + y^2 = R^2$. Wir erhalten

$$z(y) = \sqrt{R^2 - y^2}. \quad (2.8)$$

Setzen wir diese Größen in das Integral ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} J_A &= \rho \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-R}^R dy \int_{-\sqrt{R^2 - y^2}}^{\sqrt{R^2 - y^2}} dz (x^2 + y^2) \\ &= 2\rho \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-R}^R dy \sqrt{R^2 - y^2} (x^2 + y^2) \\ &= 2\rho \left[\int_{-R}^R dy \sqrt{R^2 - y^2} \left(\frac{x^3}{3} + x y^2 \right) \right]_{-L/2}^{L/2} \quad \text{mit } \rho = \frac{m}{\pi R^2 L} \text{ folgt} \\ &= \frac{2m}{\pi R^2 L} \left[\frac{L^3}{3 \cdot 4} \int_{-R}^R dy \sqrt{R^2 - y^2} + L \int_{-R}^R dy \sqrt{R^2 - y^2} y^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

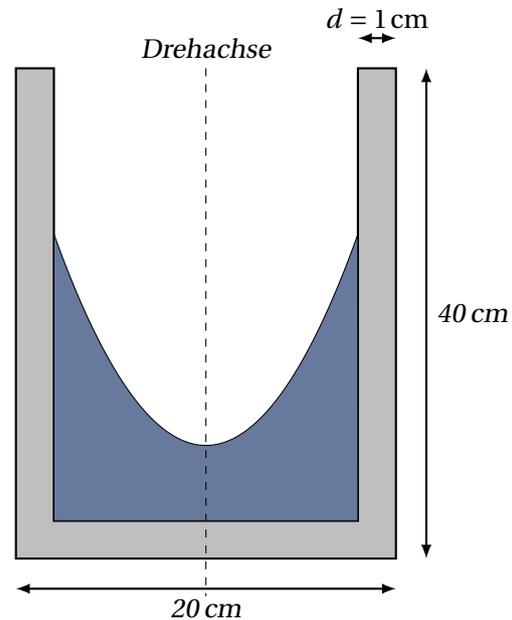
Im Folgenden klammern wir R^2 aus den Wurzeln aus (und substituieren $u = \frac{y}{R}$ mit $R du = dy$). Wir erhalten aus beiden Integralen einen Vorfaktor R^2 den wir mit dem $1/R^2$ vorn kürzen können. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} J_A &= \frac{2m}{\pi} \left[\underbrace{\frac{L^2}{12} \int_{-1}^1 du \sqrt{1 - u^2}}_{\pi/2} + R^2 \underbrace{\int_{-1}^1 du \sqrt{1 - u^2} u^2}_{\pi/8} \right] \\ &= \frac{1}{12} m [L^2 + 3R^2]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Übungsaufgabe: Trägheitsmoment

Ein oben offener zylindrischer Behälter aus Plexiglas ($\rho = 1,19 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$) sei um seine Mittelachse drehbar gelagert (siehe Skizze). Die Wandstärke des Behälters betrage $d = 1 \text{ cm}$.

- a) Berechne das Trägheitsmoment des Behälters.
- b) In den Behälter werden nun 2l Wasser gegeben. Leite einen Ausdruck für die Höhe der Wassersäule in Abhängigkeit vom Abstand zur Drehachse im rotierenden Behälter her. Berechne die maximale Winkelgeschwindigkeit, bei welcher der gesamte Boden noch benetzt ist.
- c) Berechne nun das Trägheitsmoment des Wassers Funktion der Winkelgeschwindigkeit und betrachte den Grenzfalle $\omega \rightarrow 0$.



Lösung a): Da das Trägheitsmoment additiv ist, können wir zunächst einen vollen Zylinder betrachten und davon einen kleineren Zylinder abziehen. Für einen Zylinder von Radius R und Höhe L ergibt sich das Trägheitsmoment zu

$$J_A = \int_V \rho r_{\perp}^2 dV = 2\pi L \rho \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi}{2} L \rho R^4. \quad (2.11)$$

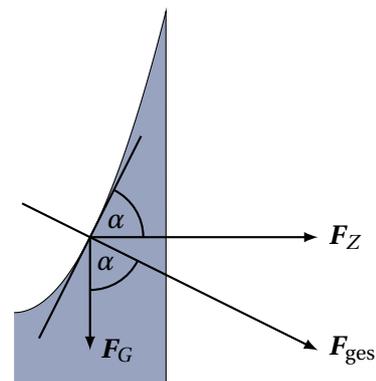
Wir rechnen das Trägheitsmoment des Vollzylinders (Höhe $L = 40 \text{ cm}$) mit Radius $R_A = 10 \text{ cm}$ aus und subtrahieren davon einen kleineren Vollzylinder mit Radius $R_I = 9 \text{ cm}$ und Höhe $L - d = 39 \text{ cm}$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} J_A &= \frac{\pi}{2} \rho L R_A^4 - \frac{\pi}{2} (L - d) R_I^4 = \frac{\pi}{2} \rho [L R_A^4 - (L - d) R_I^4] \\ &= \frac{\pi}{2} 1,19 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} (40 \text{ cm} \cdot (10 \text{ cm})^4 - 39 \text{ cm} \cdot (9 \text{ cm})^4) = 0,027 \text{ kgm}^2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Lösung b):

Auf das Wasser wirkt bei der Drehung die Gewichtskraft F_G und die Zentripetalkraft F_Z . Die resultierende Gesamtkraft zeigt nun entlang der Oberflächennormalen des Wassers. Um nun die Steigung der Wassersäule an einem beliebigen Punkt zu berechnen, benötigen wir den Tangens des Steigungswinkels α , welcher sich einfach ergibt als

$$\frac{dz}{dr} = \tan \alpha = \frac{|F_Z|}{|F_G|} = \frac{m \omega^2 r}{m \cdot g} = \frac{\omega^2 r}{g}. \quad (2.13)$$



Integrieren wir diese Funktion, so erhalten wir die Höhe der Wassersäule $z(r)$ als

$$z(r) = \int \frac{dz}{dr} dr = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + z_0. \quad (2.14)$$

Die noch zu bestimmende Konstante z_0 gibt die Höhe der Wassersäule im Mittelpunkt an. Benutzen wir die Voraussetzung, dass das Gesamtvolumen erhalten ist ($V = 2l$), so können wir damit einen Ausdruck für z_0 finden:

$$\begin{aligned} V &= \int dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R_I} r dr \left[\frac{\omega^2 r^2}{2g} + z_0 \right] = 2\pi \left[\frac{\omega^2}{8g} r^4 + \frac{z_0}{2} r^2 \right]_0^{R_I} \\ &= \pi R_I^2 \left(\frac{\omega^2}{4g} R_I^2 + z_0 \right) \Rightarrow z_0 = \frac{V}{\pi R_I^2} - \frac{\omega^2}{4g} R_I^2. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Damit erhalten wir als Gesamtlösung für die die Höhe der Wassersäule

$$z(r) = \frac{\omega^2}{2g} (r^2 - R_I^2/2) + \frac{V}{\pi R_I^2}. \quad (2.16)$$

Für den zu berechnenden Fall, dass im Zylinder der gesamte Boden gerade noch benetzt ist, setzen wir $z_0 = 0$ und berechnen daraus die Winkelgeschwindigkeit ω

$$\frac{\omega^2}{4g} \stackrel{!}{=} \frac{V}{\pi R_I^2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{4V \cdot g}{\pi R_I^4}} = 19,51 \text{ Hz}. \quad (2.17)$$

Lösung c): Für das Trägheitsmoment des Gesamtsystems berechnen wir das Trägheitsmoment der parabelförmigen Wassersäule, indem wir das Wasser als starren Körper betrachten

$$\begin{aligned} J_A &= \rho \int_V r_{\perp}^2 dV = \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R_I} r^3 dr \left[\frac{\omega^2 r^2}{2g} + z_0 \right] \\ &= 2\pi \rho \left[\frac{\omega^2 r^6}{12g} + \frac{z_0}{4} r^4 \right]_0^{R_I} = \frac{\pi}{2} \rho R_I^4 \left[\frac{\omega^2}{3g} R_I^2 + z_0 \right] \stackrel{(2.15)}{=} \frac{\pi}{2} \rho R_I^4 \left[\frac{\omega^2}{12g} R_I^2 + \frac{V}{\pi R_I^2} \right]. \end{aligned}$$

Für $\omega = 0$ bleibt nur der orangene Term übrig. Ausmultipliziert ergibt sich $J_A = \frac{m}{2} R_i^2$ (mit $m = \rho V$), was einfach dem Trägheitsmoment der ruhenden, zylindrischen Wassersäule entspricht.

2.2. Analogie zwischen Translations- und Rotationsbewegungen

Wir wollen im Folgenden zusammenfassen, wie wir analog zu den Translationsbewegungen, physikalische Größen zur Beschreibung von Drehbewegungen formulieren können.

Tabelle 1: Analogien zwischen Translations- und Rotationsbewegungen

Translation		Rotation	
Ortsvektor	\mathbf{r}	Drehwinkel	φ
Geschwindigkeit	$\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \mathbf{r}$	Winkelgeschwindigkeit	$\boldsymbol{\omega} = \frac{d}{dt} \boldsymbol{\varphi}$
Beschleunigung	$\mathbf{a} = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}$	Winkelbeschleunigung	$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d^2}{dt^2} \boldsymbol{\varphi}$
Masse	$m = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$	Trägheitsmoment	$J_A = \int_V \rho(\mathbf{r}) r_{\perp}^2 dV$
Kraft	\mathbf{F}	Drehmoment	$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
Impuls	$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$	Drehimpuls	$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = J_A \cdot \boldsymbol{\omega}$
Bewegungsgleichung	$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \mathbf{p}$	Bewegungsgleichung	$\mathbf{M} = \frac{d}{dt} \mathbf{L}$
Newton II	$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$	Newton II	$\mathbf{M} = J_A \cdot \boldsymbol{\alpha}$

3. Gravitation und Planetenbahnen

3.1. Das Gravitationsgesetz

Wir wollen uns im Folgenden das Gravitationsgesetz anschauen. Dabei gilt für die wirkende Kraft eines Massepunktes m_1 auf einen Massepunkt m_2

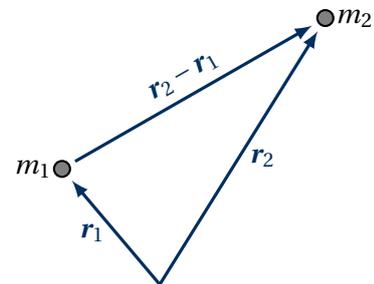
$$\mathbf{F}_G = -G^* m_1 \cdot m_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = -G^* \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r \quad \text{mit} \quad G^* = 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \quad \text{und} \quad r = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|. \quad (3.1)$$

Hat Körper m_1 eine endliche Ausdehnung, die wir mit der Massendichte $\rho(\mathbf{r}')$ beschreiben können, so gilt für die Kraft auf die Masse m_2

$$\mathbf{F}_G = -G^* \iiint_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{r} \frac{\rho(\mathbf{r}') m_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \hat{\mathbf{e}}_r. \quad (3.2)$$

Die wirkende Kraft auf den Massepunkt m_2 resultiert aus dem wirkenden Gravitationsfeld, welches wir erhalten, wenn wir die Kraft \mathbf{F}_G durch die Masse m_2 dividieren:

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}) = -G^* \iiint_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \hat{\mathbf{e}}_r. \quad (3.3)$$



Übungsaufgabe: Aufteilung zweier Massen

Zwei Neutronensterne in einem Doppelsternsystem haben zusammen die Masse M . Wie muss das Massenverhältnis der beiden Sterne aussehen, damit die resultierende Gravitationskraft (bei gegebenem Abstand r) zwischen beiden Sternen maximal ist?

Lösung: Wir nehmen an, der erste Neutronenstern habe die Masse m , dann hat der Zweite die Masse $M - m$. Berechnen wir nun die resultierende gravitative Anziehung zwischen den beiden Sternen, ergibt sich

$$F = G^* \frac{m(M - m)}{r^2}. \quad (3.4)$$

Das Maximum erhalten wir durch das Nullsetzen der 1. Ableitung nach m

$$\frac{dF}{dm} = \frac{G^*}{r^2} (M - 2m) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad M = 2m. \quad (3.5)$$

Wir sehen, dass die Massen der beiden Sterne gleich groß sein müssen, also ist das Massenverhältnis 1.

3.2. Konservative Kraftfelder

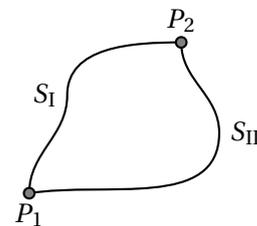
Wollen wir die Arbeit berechnen, die wir aufbringen müssen, um ein Teilchen bei einer wirkenden Kraft \mathbf{F} entlang eines Weges S von Punkt P_1 nach P_2 zu bewegen, so können wir diese über folgendes Integral berechnen:

$$W = \int_{S(P_1)}^{S(P_2)} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \quad (3.6)$$

Nun könnten wir das Teilchen auf vielen verschiedenen Wegen von Punkt P_1 nach P_2 befördern und würden dafür im Allgemeinen unterschiedliche Ergebnisse erhalten. Benutzen wir beispielsweise die Gleitreibungskraft \mathbf{F}_R , die stets der Bewegungsrichtung entgegengerichtet ist, so ist die geleistete Arbeit abhängig von der Länge des gewählten Weges zwischen P_1 und P_2 .

Ist jedoch die geleistete Arbeit entlang jedes beliebigen Weges S_I, S_{II} zwischen den Punkten P_1 und P_2 gleich, so ist das zu der entsprechenden Kraft zugehörige Kraftfeld konservativ

$$\int_{S_I} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{S_{II}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \quad (3.7)$$



Nun können wir die Wegrichtung von S_{II} umkehren, und von P_2 nach P_1 zurückkehren. Sind wir einmal im Kreis gegangen und wir erhalten aufgrund der Gleichheit der beiden Integrale

$$\int_{S_I} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{-S_{II}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{P_2}^{P_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \oint \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (3.8)$$

Für ein konservatives Kraftfeld ist die geleistete Arbeit Null, wenn Start- und Endpunkt übereinstimmen. Der Kreis im Integral deutet dabei an, dass wir die Integration entlang eines geschlossenen Weges durchgeführt haben.

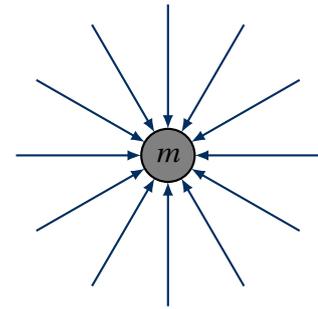
Einschub: Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes

Die *Divergenz* eines Vektorfeldes gibt an jedem Raumpunkt an, wie sehr die Feldvektoren auseinanderstreben. Anders formuliert trifft die Divergenz eine Aussage darüber, wo im Raum Feldlinien entstehen oder verschwinden. Die Divergenz ist definiert über

$$\operatorname{div} \mathbf{F} := \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} \quad \text{mit} \quad \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial x \\ \partial y \\ \partial z \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Ein Beispiel ist das Gravitationsfeld. Eine sphärische Massenverteilung m erzeugt ein radiales Gravitationsfeld \mathbf{G} , welches zum Massenzentrum zeigt. Im Punkt des Zentrums verschwinden Feldlinien und die Divergenz des Gravitationsfeldes ist negativ $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{G} < 0$. Wir sehen, dass Massen sogenannte *Senken* des Gravitationsfeldes sind. Tatsächlich lässt sich folgende Beziehung herleiten, die wir ohne Beweis angeben wollen

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{G} = -4\pi\rho G \quad \text{mit } \rho \text{ als Massendichte} \quad . \quad (3.10)$$

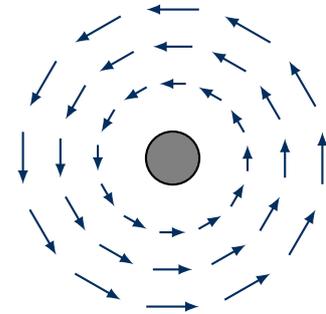


Die *Rotation* eines Vektorfeldes beschreibt, ob in einem Vektorfeld "Wirbel" vorhanden sind. Anders gesagt beschreibt die Rotation wie und ob sich ein im Vektorfeld befindlicher Körper dreht.

Die Rotation ist definiert über

$$\text{rot } \mathbf{F} := \vec{\nabla} \times \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Ein Beispiel ist das erzeugte Magnetfeld eines geraden Leiters, durch den ein Strom fließt. Das Magnetfeld zeigt geschlossene Feldlinien, die konzentrische Ringe um den Leiter bilden. Eine im Mittelpunkt platzierte Kompassnadel fängt an sich zu drehen.



An der nebenstehenden Abbildung sehen wir bereits, dass für ein Kraftfeld mit solcher Struktur das Kreisintegral für die Bewegung eines Teilchens nicht verschwinden wird, wenn wir es auf einer Kreisbahn bewegen. Es lässt sich tatsächlich zeigen:

$$\text{Konservative Kraftfelder sind stets wirbelfrei: } \vec{\nabla} \times \mathbf{F} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{F} \text{ ist konservativ} \quad . \quad (3.12)$$

Die dafür notwendige Mathematik liefert der *Satz von Stokes*,

$$\oint_{\partial A} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \iint_A [\vec{\nabla} \times \mathbf{F}(\mathbf{r})] \cdot d\mathbf{A}, \quad (3.13)$$

wobei A die von dem Weg ∂A (Rand von A) eingeschlossene Fläche bezeichnet. Beachte dabei, dass die eingeschlossene Fläche nicht eindeutig ist und beliebig gewählt werden kann! Der Satz von Stokes wird in der Vorlesung *Mathematische Methoden der Physik II* näher behandelt.

Existenz einer Potentialfunktion

Sei $\Phi(x, y, z)$ eine skalare Funktion. Wenn wir uns nun die Frage stellen, welchen Zuwachs die Funktion erfährt, wenn wir uns in eine bestimmte Richtung bewegen, so müssen wir die

partiellen Ableitungen der Funktion $\Phi(x, y, z)$ in alle Raumrichtungen betrachten. Das führt uns zur Definition des *Gradienten* des Vektorfeldes

$$\text{grad } \Phi := \vec{\nabla} \Phi \quad \text{mit} \quad \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial x \\ \partial y \\ \partial z \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Durch die Bildung des Gradienten entsteht ein Vektorfeld $\mathbf{F} = \vec{\nabla} \Phi$, dessen Richtung in jedem Punkt die Richtung des stärksten Anstiegs der skalaren Funktion angibt. Es stellt sich nun die Frage, was die Eigenschaften dieses Feldes sind. Prüfen wir es doch einmal auf Konservativität:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{F} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \Phi) = \begin{pmatrix} \partial x \\ \partial y \\ \partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial x(\Phi) \\ \partial y(\Phi) \\ \partial z(\Phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} \end{pmatrix} = 0. \quad (3.15)$$

Aufgrund der Vertauschbarkeit der zweiten partiellen Ableitungen jeder (zweifach differenzierbaren) skalaren Funktion $\Phi(x, y, z)$ ist das Vektorfeld \mathbf{F} stets konservativ. Umgekehrt lässt sich aus jedem konservativen Vektorfeld stets eine entsprechende Funktion finden, deren Gradient wieder das Vektorfeld ergibt.

In der Physik tritt bei der Definition des Potentials eine Besonderheit auf. Da eine physikalische Kraft ein Teilchen von einem Ort höheren Potentials zu einem Ort niedrigeren Potentials führt, allerdings der Gradient den Anstieg des Skalarfeldes beschreibt, wird in der Definition ein Minuszeichen als Konvention eingeführt:

Für eine konservative, physikalische Kraft \mathbf{F} lässt sich stets eine entsprechende Potentialfunktion Φ aufstellen, sodass

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\vec{\nabla} \Phi(x, y, z). \quad (3.16)$$

Wir können nun zum Gravitationsfeld eines Massepunktes m_1 (dies entspricht Gleichung (3.2) geteilt durch m_2) das zugehörige Gravitationspotential angeben. Für eine radialsymmetrische Funktion vereinfacht sich der Gradient in Kugelkoordinaten zu

$$\vec{\nabla} f(r) = \frac{df}{dr} \hat{\mathbf{e}}_r. \quad (3.17)$$

Damit erhalten wir für das Gravitationspotential

$$\begin{aligned} -\vec{\nabla} \Phi(\mathbf{r}) &= \mathbf{G}(\mathbf{r}) = -G^* \frac{m_1}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r \\ \Rightarrow \Phi(\mathbf{r}) &= -G^* \frac{m_1}{r}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

bzw. für Fall einer ausgedehnten Massenverteilung $\rho(\mathbf{r}')$

$$\Phi(\mathbf{r}) = -G^* \iiint_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (3.19)$$

3.3. Die Keplerschen Gesetze

Wir wollen uns nun im Folgenden anschauen, welche Folgerungen wir aus dem Gravitationsgesetz ziehen können, wenn wir uns das sogenannte Zwei-Körper-Problem anschauen. Dabei betrachten wir den Spezialfall eines schweren Zentralgestirns (Sonne) und eines leichteren Objektes (Planet). Physikalisch ist dieses Problem exakt analytisch lösbar und Johannes Kepler hat dabei schon zu Beginn des 17. Jahrhunderts drei Gesetzmäßigkeiten erkannt, die er folgendermaßen formulierte:

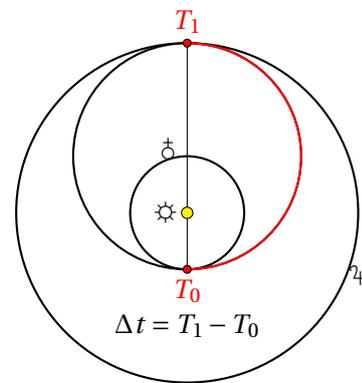
1. Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen mit der Sonne (Masse M) in einem Brennpunkt.
2. Der Radiusvektor als gedachte Verbindung zwischen Sonne und Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen: $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \text{konstant}$ für alle Planeten. (\vec{L} - Erhaltung)
3. $\frac{T_i^2}{a_i^3} = \frac{4\pi^2}{(M+m) \cdot G^*} \approx \frac{4\pi^2}{M \cdot G^*} = \text{konstant}$ für alle Planeten (a = große Halbachse)

Dabei sind diese Gesetze allgemeingültig und gelten insbesondere auch für andere Systeme von Objekten. Für viele Rechnungen erweist sich insbesondere das dritte Keplersche Gesetz als hilfreich.

Beispiel: Hohmann-Transfer zum Jupiter

Wir wollen uns im Folgenden anschauen, wie man beispielsweise die Dauer eines Hohmann-Transfers zwischen Erde und Jupiter berechnen kann. Dies ist ein energetisch günstiger Übergang zwischen zwei Planetenbahnen im Sonnensystem. Dabei nimmt die Transferbahn die Form einer Ellipse an. Nach dem dritten Keplerschen Gesetz können wir die Zeit für den Hohmann-Transfer berechnen über

$$\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{M_{\odot} \cdot G^*}} \quad \text{mit} \quad a = \frac{a_{\oplus} + a_{\text{J}}}{2}. \quad (3.20)$$



Dabei ergibt sich die große Halbachse der Transferellipse aus dem arithmetischen Mittel der Halbachsen beider Planeten. Wir können die Transferzeit einfach ausrechnen, indem wir den Term $M_{\odot} \cdot G^*$ in astronomischen Einheiten ausdrücken und einsetzen. Für das System Erde-Sonne ergibt sich

$$\frac{(1 \text{ yr})^2}{(1 \text{ au})^3} = \frac{4\pi^2}{M_{\odot} \cdot G^*} \Rightarrow M_{\odot} \cdot G^* = 4\pi^2 \text{ au}^3 / \text{yr}^2. \quad (3.21)$$

Setzen wir das nun in Gleichung (3.20) ein, so erhalten wir mit $a_{\text{J}} = 5,2 \text{ au}$ und $a_{\oplus} = 1 \text{ au}$

$$\Delta t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^3}{1 \text{ au}^3}} \text{ yr} = \frac{1}{2} \sqrt{(3.1)^3} \text{ yr} = 2,73 \text{ yr}. \quad (3.22)$$

Übungsaufgabe: Geostationärer Satellit

Ein Satellit der Masse $m = 1000 \text{ kg}$ soll in eine geostationäre Umlaufbahn über dem Äquator betrachtet werden. In welcher Höhe über dem Äquator befindet sich der Satellit in diesem Fall? Welche Energie wird benötigt, um den Satelliten von seinem Startplatz nahe des Äquators in eine stabile Umlaufbahn zu bringen?

Lösung: Wir benutzen hier ebenfalls das dritte Keplersche Gesetz und nehmen an, dass für den geostationären Orbit die Umlaufzeit des Satelliten einem siderischen Tag entspricht (23 h und 56 min). Dann können wir die Formel nach der Halbachse der Umlaufbahn umstellen und anschließend den Erdradius subtrahieren:

$$h = \sqrt[3]{\frac{T^2 m_E \cdot G^*}{4\pi^2}} - r_E = 35\,790 \text{ km.} \quad (3.23)$$

Hierbei wurden die Werte für die Masse der Erde $m_E = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ und des Erdradius $r_E = 6378 \text{ km}$ eingesetzt.

Um den Satelliten auf die geostationäre Bahn zu bringen müssen wir zunächst die Arbeit verrichten, den Satelliten auf 36 000 km über die Erdoberfläche zu bringen. Dies erhalten wir mithilfe des Wegintegral über die Gravitationskraft:

$$\begin{aligned} W &= \int_{r_E}^{r_S} F_G \, dr = m \cdot M_E G^* \int_{r_E}^{r_S} \frac{1}{r^2} \, dr = -m \cdot M_E G^* \left[\frac{1}{r} \right]_{r_E}^{r_S} \\ &= m \cdot M_E G^* \left[\frac{1}{r_E} - \frac{1}{r_S} \right] = 53,11 \text{ GJ.} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Weiterhin müssen wir die zusätzliche kinetische Energie aufgrund der erhöhten Bahngeschwindigkeit im geostationären Orbit beachten. Hierfür erhalten wir den Term

$$\Delta E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} (V_S^2 - V_E^2) = \frac{m\omega^2}{2} (r_S^2 - r_E^2) = \frac{2\pi^2 m}{T^2} (r_S^2 - r_E^2) = 4,62 \text{ GJ.} \quad (3.25)$$

4. Bezugssysteme und Trägheitskräfte

Wir wollen uns in diesem Kapitel damit beschäftigen, wie sich physikalische Phänomene in unterschiedlichen Bezugssystemen voneinander unterscheiden. Dafür führen wir zunächst den Begriff des Inertialsystems ein. Bei einem Inertialsystem handelt es sich um ein Koordinaten- oder Bezugssystem, in dem sich kräftefreie Körper geradlinig gleichförmig bewegen.

Zwischen Inertialsystemen lässt sich stets eine Galilei-Transformation durchführen. Dabei können wir folgende Transformationen in beliebiger Kombination ausführen:

$$\left\{ \begin{array}{ll} t \rightarrow t + \tau & \text{Translation der Zeit} \\ \vec{r} \rightarrow \vec{r} + \vec{r}_0 & \text{Translation des Raums} \\ \vec{r} \rightarrow \hat{R}\vec{r} & \text{Rotationen des Raums} \\ \vec{r} \rightarrow \vec{r} + \vec{v} \cdot t & \text{Bewegung mit konstanter Relativgeschwindigkeit} \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Dabei ist besonders die letzte Transformation von Bedeutung, da diese beschreibt, dass sich physikalische Prozesse beispielsweise innerhalb eines mit konstanter Geschwindigkeit fahrenden Zuges gegenüber dem ruhenden Bahngleis nicht ändern.

Trägheitskräfte

Befinden wir uns in einem Bezugssystem, welches kein Inertialsystem ist, so können sich kräftefreie Körper scheinbar nicht geradlinig gleichförmig bewegen. Im rotierenden Bezugssystem können wir daher eine Scheinkraft bzw. Trägheitskraft einführen, die diese Bewegung beschreibt.

Ein Beispiel im rotierenden Bezugssystem ist die Zentrifugalkraft, die senkrecht zur Bewegungsrichtung nach außen wirkt und durch die Trägheit des Körpers verursacht wird. Hierbei handelt es sich um eine Scheinkraft, die im ruhenden Bezugssystem nicht beobachtet werden kann.

Eine weitere wichtige Trägheitskraft ist die *Corioliskraft*, die auf alle Körper wirkt, die sich in einem mit ω rotierendem Bezugssystem mit einer Geschwindigkeit $\mathbf{v} \nparallel \omega$ bewegen. Für sie gilt:

$$\mathbf{F}_C = 2m(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}), \quad \mathbf{a}_C = 2(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}). \quad (4.2)$$

Die zugehörige Coriolisbeschleunigung \mathbf{a}_C bewirkt eine beschleunigte Bewegung des Körpers im bewegten Bezugssystem.

Übungsaufgabe:

Ein Scharfschütze in Jena visiert sein 1 km entferntes Ziel in südlicher Richtung an. Um welche Länge und in welche Himmelsrichtung muss er den Zielpunkt seitlich korrigieren, um die Corioliskraft auszugleichen. Dabei soll Reibung und Erdanziehung vernachlässigt werden. Das Geschoss wiege $m = 10 \text{ g}$ und fliege mit $v = 700 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Hinweis: Jena liegt auf dem 51. Breitengrad.

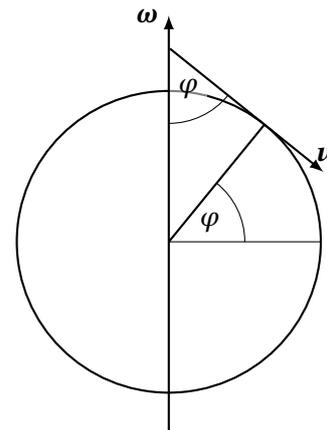
Lösung: Die Drehung der Erde verläuft von Westen nach Osten, daher zeigt die vektorielle Winkelgeschwindigkeit (wie im Bild gezeichnet) vom Südpol in Richtung Nordpol. Zur Berechnung der Coriolisbeschleunigung bilden wir das Kreuzprodukt aus dem Geschwindigkeitsvektor (tangential zur Oberfläche) und der Winkelgeschwindigkeit

$$a_c = 2|\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}| = 2v \cdot \omega \sin \varphi. \quad (4.3)$$

Wir bemerken, dass die Coriolisbeschleunigung zeitlich konstant, daher können wir die Ablenkung mit den bekannten Formeln der konstant beschleunigten Bewegung berechnen über

$$\begin{aligned} y &= \frac{a_c}{2} t^2 = v \cdot \omega \sin \varphi \left(\frac{s}{v} \right)^2 = \omega \sin \varphi \frac{s^2}{v} \quad \text{mit } t = \frac{s}{v}, \\ &= \frac{2\pi}{24\text{h}} \sin(51^\circ) \frac{1\text{ km}^2}{700 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 8,07 \text{ cm}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Das Kreuzprodukt von \mathbf{v} und $\boldsymbol{\omega}$ zeigt aus der Tafelenebene heraus, deshalb wird das Geschoss in Richtung Westen abgelenkt und der Schütze seinen Zielpunkt nach Osten hin korrigieren.



5. Schwingungen und Wellen

Wir beschäftigen uns in diesem Kapitel mit der Beschreibung von periodischen Vorgängen, die sowohl in einem isolierten System auftreten können (Pendel, Federschwinger) oder sich in Form von Wellen in einem Medium ausbreiten (Schall).

5.1. Mathematisches und physikalisches Pendel

Als einfachen Einstieg wählen wir die Beschreibung der periodischen Schwingung eines (mathematischen) Fadenpendels mit einer Punktmasse m . Nach Newton II können wir die Kraftgleichung des Pendels folgendermaßen formulieren

$$\mathbf{F}_{\text{Rück}} = m\mathbf{a} \quad \text{mit} \quad \mathbf{a} = \ddot{\boldsymbol{\varphi}} \times \mathbf{r}. \quad (5.1)$$

Da $\ddot{\boldsymbol{\varphi}} \parallel \hat{\mathbf{e}}_z \perp \mathbf{r}$, können wir die Beschleunigung schreiben als $\mathbf{a} = -\ddot{\varphi} \cdot l \hat{\mathbf{e}}_\varphi$ (da $\ddot{\varphi} < 0$). Die rückstellende Kraft ergibt sich aus der Gewichtskraft \mathbf{F}_G der angehängten Masse als $\mathbf{F}_{\text{Rück}} = -F_G \cdot \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} F_G \cdot \sin \varphi &= -m \cdot \ddot{\varphi} \cdot l \\ \Rightarrow m \cdot g \cdot \sin \varphi &\approx -m \cdot \ddot{\varphi} \cdot l \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} = \frac{g}{l} \varphi. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Dabei haben wir im zweiten Schritt die Kleinwinkelnäherung $\sin \varphi \approx \varphi$ benutzt, die für kleine Anfangsauslenkungen $\varphi < 30^\circ$ ausreichend genau ist. Die spezielle Lösung dieser Differentialgleichung mit den Anfangsbedingungen $\varphi(0) = \varphi_0$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$ lautet

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega \cdot t) \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (5.3)$$

Physikalisches Pendel

Beim physikalischen Pendel schwingt nun ein ausgedehnter Pendelkörper mit einem Trägheitsmoment J_A bezüglich der Drehachse. Wir können die Bewegungsgleichung über das wirkende Drehmoment

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_S \times \mathbf{F} \quad \text{und} \quad M = J_A \ddot{\varphi} \quad (5.4)$$

bestimmen. Dabei bezeichnet \mathbf{r}_S die Position des Schwerpunktes. Wir können damit das wirkende Drehmoment vektoriell berechnen zu

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_S \times \mathbf{F} = \begin{pmatrix} -l \sin \varphi \\ -l \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix} = mg \cdot l \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

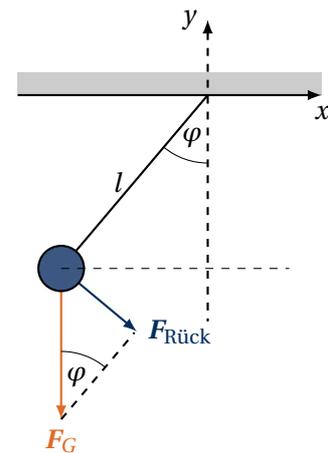


Abb. 10: (ideales) mathematische Pendel

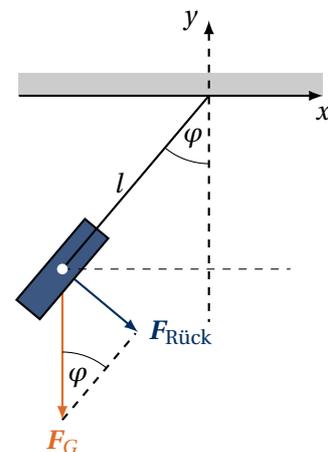


Abb. 11: physikalisches Pendel

Setzen wir dies nun gleich mit dem Drehmoment³ $M_z = -J_A \ddot{\varphi}$, dann erhalten wir unter der Kleinwinkelnäherung

$$\ddot{\varphi} = \frac{mg \cdot l}{J_A} \varphi \stackrel{J_A = ml^2}{=} \frac{g}{l} \varphi. \quad (5.6)$$

Im letzten Schritt erhalten wir für das Trägheitsmoment eines Massenpunktes $J_A = m \cdot l^2$ die Bewegungsgleichung des mathematischen Pendels.

5.2. Allgemeine, gedämpfte Schwingung

Im folgenden wollen wir uns freie Schwingungen (ohne externe Anregung) im Allgemeinen am Beispiel des Federschwingers betrachten. Die zugehörige Differentialgleichung zur Charakterisierung der Auslenkung $x(t)$ von der Ruhelage ergibt sich zu

$$\underbrace{m \cdot \ddot{x}(t)}_{\text{Trägheit}} + \underbrace{R \cdot \dot{x}(t)}_{\text{Reibung}} + \underbrace{k \cdot x(t)}_{\text{Rückstellkraft}} = 0. \quad (5.7)$$

Wir haben dabei einen Reibungsterm R eingeführt, welcher proportional zur Geschwindigkeit des Federschwingers wirkt.

Aus der Vorlesung "mathematische Methoden der Physik" wissen wir bereits wie wir diese Differentialgleichung lösen, allerdings wollen wir den Lösungsweg hier noch einmal skizzieren. Wir wählen als Lösungsansatz die Exponentialfunktion $x(t) = x_0 \exp(\lambda t)$ und setzen diesen in die Differentialgleichung ein. Damit erhalten wir folgende Gleichung:

$$m\lambda^2 + R\lambda + k = 0 \Rightarrow \text{pq-Formel} \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\underbrace{\frac{R}{2m}}_{\delta} \pm i \sqrt{\underbrace{\frac{k}{m} - \left(\frac{R}{2m}\right)^2}_{\omega^2}}. \quad (5.8)$$

Setzen wir die beiden Lösungen für λ in den Ansatz ein und benutzen wir die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = \delta x_0 \approx 0$, ergibt sich als Lösung

$$x(t) = \frac{x_0}{2} \left[e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t} \right] = \frac{x_0}{2} e^{-\delta t} \left[e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} \right] = x_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t). \quad (5.9)$$

Wir können uns nun vier Spezialfälle dieser Lösung für verschiedene Dämpfungskonstanten R anschauen:

1. Fall: freie ungedämpfte Schwingung:

$$R = 0 \text{ (keine Reibung)} \Rightarrow \delta = 0 \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$$

2. Fall: Gedämpfte Schwing. mit abklingender Amplitude: $\omega > 0$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} - \frac{R^2}{4m^2} > 0 \Leftrightarrow 0 < R < 2 \cdot \sqrt{k \cdot m} \quad x_{\max}(t) = x_0 \exp(-\delta t) \text{ und } \omega < \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$$

³Das Vorzeichen in der Formel für M_z ergibt sich dadurch, dass wir bereits wissen, dass M_z positiv ist, sich der Winkel φ jedoch verkleinert und deshalb $\ddot{\varphi} < 0$ gilt.

3. Fall: Aperiodischer Grenzfall: $\omega = \frac{k}{m} - \frac{R^2}{4m^2} = 0 \Leftrightarrow R = 2 \cdot \sqrt{k \cdot m}$

Hier fallen die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung zusammen und wir müssen den Lösungsansatz modifizieren zu $x(t) = (A + Bt)e^{\lambda t}$ mit $\lambda = -\delta$. Damit erhalten wir mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ die Konstanten $A = x_0$ und $B = x_0\delta$

$$x(t) = x_0(1 + \delta t)e^{-\delta t}. \quad (5.10)$$

4. Fall: Kriechfall: ω imaginär, keine Schwingung, $R > 2 \cdot \sqrt{km}$

Hier findet ebenfalls keine Schwingung mehr statt, die Dämpfung $\delta' = \delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ ist jedoch verschieden. Wir führen die Rechnung von Gleichung (5.9) nochmal durch und erhalten für $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = x_0\delta$

$$x(t) = \frac{x_0}{2} [e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t}] = \frac{x_0}{2} e^{-\delta t} [e^{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} + e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t}] = x_0 e^{-\delta t} \cosh(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \cdot t). \quad (5.11)$$

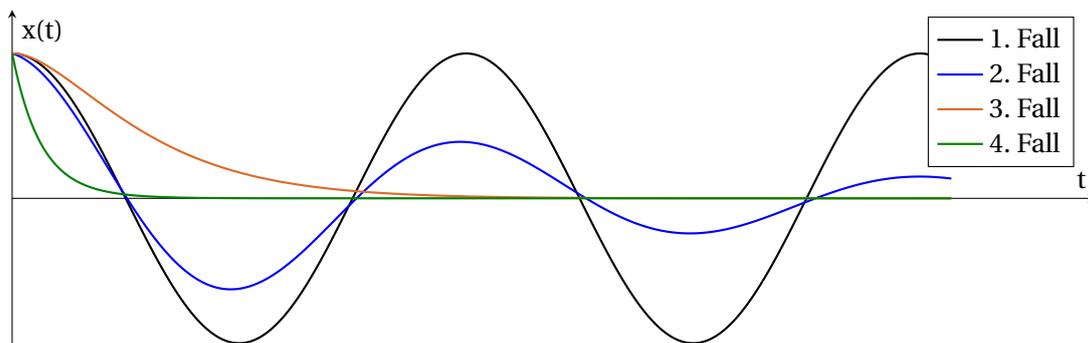


Abb. 12: Unterscheidung der vier verschiedenen Fälle der allgemeinen gedämpften Schwingung.

Übungsaufgabe

Für eine mechanische Uhr wird als Schwinger ein Unruh verwendet. Dabei wird die Schwingung getrieben durch ein rückstellendes Drehmoment, welches proportional zum Drehwinkel ist ($M = -k\varphi$). Als schwingende Masse dient eine zentral, drehbar gelagerte Zylinderscheibe (Radius $R = 5$ cm, Masse $m = 50$ g).

- Wie lautet die Differentialgleichung der Schwingung?
- Wie groß muss k sein, damit die Periodendauer der Schwingung $T = 0,5$ s beträgt?

Lösung a): Das Drehmoment lässt sich analog zu Newton II für die lineare Bewegung schreiben als

$$M = J_A \ddot{\varphi} = -k\varphi \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{k}{J_A} \varphi = 0. \quad (5.12)$$

Lösung b): Aus der Differentialgleichung können wir die Kreisfrequenz ω der Schwingung ablesen als $\omega = \sqrt{k/J_A}$. Damit können wir eine Formel für die Periodendauer aufstellen und diese nach k auflösen

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{2}mR^2}{k}}$$

$$\Rightarrow k = 2\pi^2 m \frac{R^2}{T^2} = 2\pi^2 \cdot 50 \text{ g} \frac{(5 \text{ cm})^2}{(0,5 \text{ s})^2} = 10000\pi^2 \frac{\text{cm}^2 \text{ g}}{\text{s}^2} \approx 0,01 \text{ Nm.} \quad (5.13)$$

5.3. Die Wellengleichung

Wir wollen uns im Folgenden mit der Wellengleichung beschäftigen, welche die Ausbreitung einer sich in 1D ausbreitenden Welle beschreibt. Für die Amplitude der Welle gilt

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (5.14)$$

Der Faktor c beschreibt die Phasen- bzw. Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle. *Merkhilfe:* Mit $1/c^2$ vor der doppelten Zeitableitung von $f(x, t)$ ergibt sich die gleiche Einheit, als wenn wir $f(x, t)$ zweimal nach dem Ort ableiten

$$\left[\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} \right] = \frac{[f(x, t)]}{\text{m}^2} \quad \text{und} \quad \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} \right] = \frac{\text{s}^2 [f(x, t)]}{\text{m}^2 \text{ s}^2}. \quad (5.15)$$

Eine Lösung der Wellengleichung stellen ebene Wellen dar:

$$f(x, t) = f_0 \cdot \cos(kx - \omega t) \quad \text{mit} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{f}. \quad (5.16)$$

Hierbei sind k und ω die räumlichen und zeitlichen Wellenzahlen. Setzen wir die Lösung in die Wellengleichung ein, ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} &= -k^2 f(x, t) \\ \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} &= -\omega^2 f(x, t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow -k^2 f(x, t) + \frac{\omega^2}{c^2} f(x, t) = 0. \quad (5.17)$$

Für die räumlichen und zeitlichen Wellenzahlen gilt also folgender Zusammenhang, welcher auch als *Dispersionsrelation* bezeichnet wird:

$$k = \frac{\omega}{c} \quad \Rightarrow \quad c = v_{\text{Phase}} = \frac{\omega}{k}. \quad (5.18)$$

Aus dieser Beziehung erhalten wir noch eine weitere nützliche Beziehung für Wellen:

$$c = \frac{\omega}{k} = 2\pi \cdot f \cdot \frac{\lambda}{2\pi} = \lambda \cdot f. \quad (5.19)$$

5.4. Schwebung

Wir wollen uns nun anschauen was bei der Überlagerung von Wellen für Effekte auftreten können. Unterscheiden sich die Frequenzen der beiden Wellen voneinander, so tritt der *Schwebungseffekt* auf. Mathematisch betrachtet wird eine Überlagerung von zwei Wellen durch eine Addition beschrieben. Halten wir nun den Ort fest ($x = x_0$) und betrachten zwei verschiedene Wellen $f_1(t) = f_0 \cos(\omega_1 t)$ und $f_2(t) = f_0 \cos(\omega_2 t)$, dann ergibt sich für die Überlagerung

$$f_{\text{ges}} = f_1(t) + f_2(t) = f_0(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)) \quad (5.20)$$

$$= \underbrace{2f_0 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)}_{\text{Amplitude}} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)}_{\text{Schwingung}}. \quad (5.21)$$

Eine Herleitung für die Gleichheit dieser beiden Ausdrücke ist in Anhang B dargestellt.

Das Ergebnis ist nun eine Überlagerung zweier Schwingungen, von denen eine mit der gemittelten Frequenz der beiden Ausgangsfrequenzen $\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ schwingt. Die Amplitude der Schwingung wird nun mit der halben Differenzfrequenz der Schwingungen ($\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$) moduliert. Liegen nun die Frequenzen der beiden Schwingungen nah beieinander $\omega_1 \approx \omega_2$, dann ist die Frequenz der Schwebung so langsam, dass diese Modulation als an- und ab-schwillende Lautstärke hörbar gemacht werden kann. Der Schwebungseffekt ist in Abbildung 13 dargestellt.

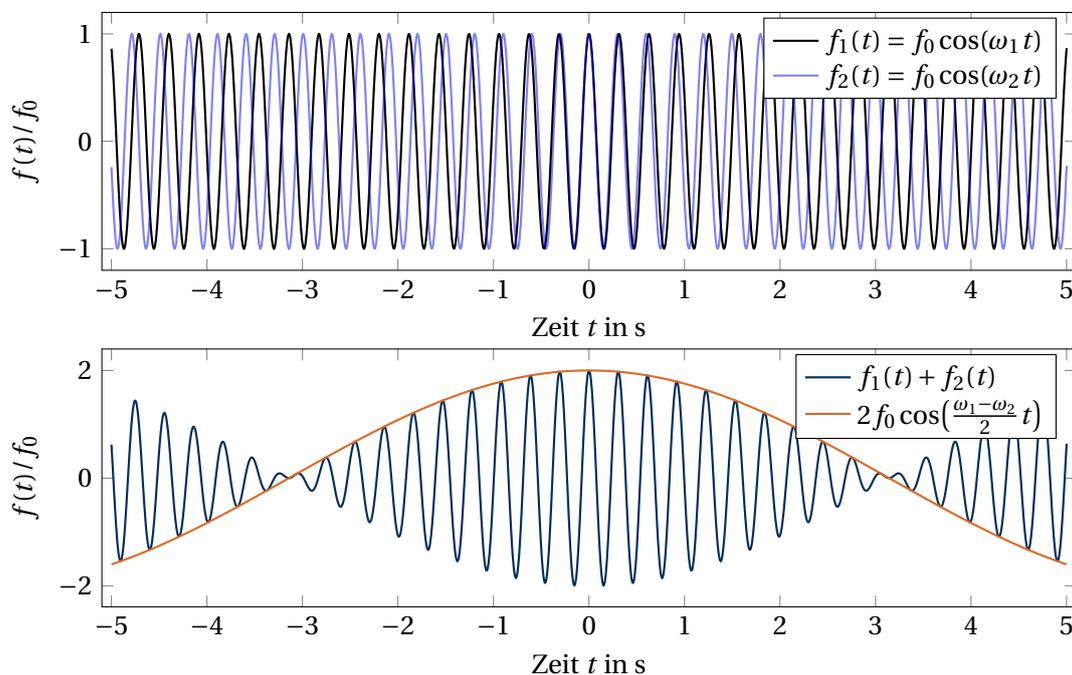


Abb. 13: Oben: Zeitlicher Verlauf der beiden Schwingungen mit leicht verschiedener Frequenz mit $|\omega_1 - \omega_2| = 1 \text{ Hz}$. Unten: Überlagerte Schwingung. Es zeigt sich, dass dort Schwingungsknoten auftreten, wo die ursprünglichen Funktionen genau um π phasenverschoben sind. Die Amplitudenfunktion der Schwebung ist in orange eingezeichnet.

Wir definieren nun die Frequenz der Schwebung als

$$f_{\text{Schwebung}} = \frac{1}{2\pi} |\omega_1 - \omega_2|, \quad (5.22)$$

wobei dies der doppelten Frequenz der einhüllenden Amplitudenfunktion entspricht. Der Unterschied ist dadurch begründet, dass sich der Schwebungseffekt bei jedem Nulldurchgang der Amplitudenfunktion wiederholt, in eine Periode der Amplitudenfunktion passen demnach zwei "Schwebungsbäuche".

Übungsaufgabe: Schwebung

Durch Überlagerung von zwei harmonischen Einzelschwingungen soll eine Schwingung mit einer Frequenz von $f = 500 \text{ Hz}$ mit einer Schwebung erzeugt werden. Welche Frequenzen müssen die beiden Einzelschwingungen haben, damit die Schwebungsperiodendauer $T_S = 5 \text{ s}$ beträgt.

Lösung: Für die gemittelte Schwingungsfrequenz beider Einzelschwingungen und die Schwebungsperiodendauer gilt

$$f = \frac{f_1 + f_2}{2} = 500 \text{ Hz}, \quad \text{und} \quad T_S = \frac{1}{f_S} = \frac{1}{|f_1 - f_2|} = 5 \text{ s}. \quad (5.23)$$

Dieses Gleichungssystem können wir nun nach f_1 und f_2 auflösen. Wir nehmen o.B.d.A an, dass $f_1 > f_2$ gilt. Dann folgt

$$\left. \begin{array}{l} f = \frac{f_1 + f_2}{2} \\ f_S = f_1 - f_2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2f + f_S = 2f_1. \quad (5.24)$$

Lösen wir das nach f_1 auf und bestimmen anschließend f_2 , so folgt

$$f_1 = f - \frac{1}{2} f_S = 500 \text{ Hz} - \frac{1}{2 \cdot 5 \text{ s}} = 499,9 \text{ Hz} \quad (5.25)$$

$$f_2 = f + \frac{1}{2} f_S = 500 \text{ Hz} + \frac{1}{2 \cdot 5 \text{ s}} = 500,1 \text{ Hz}. \quad (5.26)$$

5.5. Doppler-Effekt

Wird eine Welle von einem bewegten Objekt ausgesendet oder empfangen, dann tritt aufgrund der Relativbewegung von Quelle und Beobachter eine Wellenlängen- und damit auch Frequenzänderung auf. Dabei treten zwei unterschiedliche Spezialfälle auf:

Bewegte Quelle, ruhender Beobachter

Bewegt sich die Quelle mit $v_Q < c_S$ auf den Beobachter zu/weg, so verkürzt/verlängert sich die Wellenlänge λ um die Strecke, welche die Quelle innerhalb einer Periodendauer zurücklegt

$$\lambda' = \lambda \mp v_Q \cdot T = \frac{1}{f} (c_S \mp v_Q) \Rightarrow f' = \frac{c_S}{\lambda'} = f \frac{1}{1 \mp \frac{v_Q}{c_S}}. \quad (5.27)$$

Ruhende Quelle, bewegter Beobachter

Bewegt sich nun der Beobachter mit v_B auf die ruhende Quelle zu/weg, so bleibt die Wellenlänge gleich, allerdings treffen die Wellenmaxima nach einer kürzeren/längeren Zeit T' auf den Beobachter. Hierbei gilt

$$\lambda = (c_S \pm v_B) T' \Rightarrow f' = \frac{c_S \pm v_B}{\lambda} = f \left(1 \pm \frac{v_B}{c_S} \right). \quad (5.28)$$

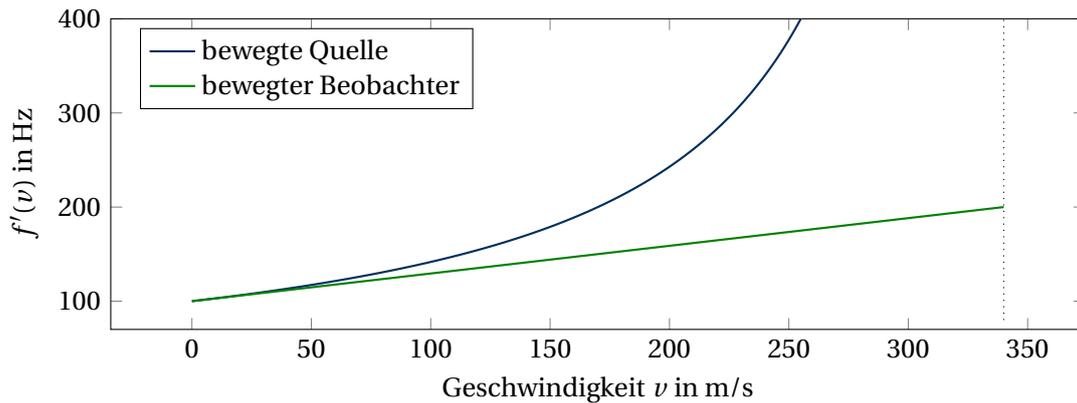


Abb. 14: Vergleich der Frequenzänderung für eine bewegte Quelle vs. einem bewegten Beobachter für eine Ausgangsfrequenz von 100 Hz. Die Schallgeschwindigkeit beträgt $c_S = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Übungsaufgabe: Polizeiwagen

Die Grundfrequenz des Martinshorns eines Polizeiwagens sei 360 Hz. Wie groß muss die Geschwindigkeit des Polizeiwagens sein, damit der Signalton von einem Passanten um eine Quarte erhöht wahrgenommen wird (Frequenzverhältnis $4/3$)? Wie schnell müsste sich der Passant dem Polizeiwagen nähern, um den gleichen Ton wahrzunehmen?

Lösung: Für den ersten Teil nutzen wir die Formel für den ruhenden Beobachter und lösen die Formel nach der Geschwindigkeit der Quelle auf:

$$\frac{f}{f'} = 1 - \frac{v_Q}{c_S} \Rightarrow v_Q = c_S \left(1 - \frac{f}{f'} \right) = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}} \left(1 - \frac{3}{4} \right) = 85 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (5.29)$$

Umgekehrt können wir die Formel für den bewegten Beobachter abermals nach der Geschwindigkeit auflösen. Damit erhalten wir

$$\frac{f'}{f} = 1 + \frac{v_B}{c_S} \Rightarrow v_B = c_S \left(\frac{f'}{f} - 1 \right) = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}} \left(\frac{4}{3} - 1 \right) = 113,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (5.30)$$

6. Hydrostatik

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit dem statischen Verhalten von Fluiden beschäftigen und speziell die Auftriebskraft behandeln. Dafür führen wir zunächst den Schweredruck ein.

6.1. Schweredruck

Befindet sich eine Flüssigkeit in einem Glas, so übt diese eine aufgrund ihres Gewichts eine Kraft auf den Boden des Gefäßes aus. Die Gewichtskraft eines Volumenelements dV lässt sich schreiben als

$$dF_G = \rho_{\text{fl}} dV \cdot \mathbf{g} = \rho dz dA \cdot \mathbf{g}, \quad (6.1)$$

wobei \mathbf{g} in negative $\hat{\mathbf{e}}_z$ -Richtung weist. Für den Druck dp , der auf dieses Flächenelement dA wirkt, gilt nun

$$dp = \frac{dF}{dA} = \frac{\rho dz dA \cdot g}{dA}. \quad (6.2)$$

Integrieren wir nun über z , so ergibt sich die Druckdifferenz für die Füllhöhe h zu

$$\Delta p = \int_0^h \rho g dz = \rho g \cdot h. \quad (6.3)$$

Wir sehen, dass der Druck linear in der Tiefe des Glases zunimmt.

6.2. Auftrieb

Zur Berechnung der Auftriebskraft eines eingetauchten Körpers schauen wir uns den Druckunterschied zwischen Ober- und Unterseite des Körpers an. Die Auftriebskraft F_A ergibt sich nun über den Druckunterschied multipliziert mit der Grundfläche A_{Gf} des Körpers

$$F_A = \Delta p \cdot A_{\text{Gf}} = \rho_{\text{fl}} g \underbrace{\Delta h \cdot A_{\text{Gf}}}_V = m_{\text{fl}} \cdot g. \quad (6.4)$$

Wir sehen, dass die Auftriebskraft aufgrund von $F_1 > F_2$ in positive $\hat{\mathbf{e}}_z$ -Richtung zeigt. Damit ergibt sich

$$F_A = -F_{G,\text{fl}}. \quad (6.5)$$

Wir erhalten damit das von Archimedis formulierte Prinzip des Auftriebs: Die Auftriebskraft entspricht der Gewichtskraft der vom eingetauchten Körper verdrängten Flüssigkeit.

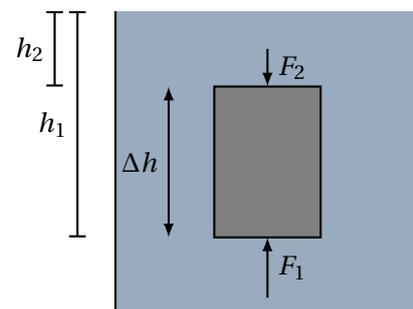


Abb. 15: Auftriebskraft

Wir haben bisher nur den Spezialfall eines quaderförmigen Körpers gezeigt, jedoch lässt sich dies auch auf beliebige Formen verallgemeinern. Differentiell ergibt sich die Auftriebskraft zu

$$d\mathbf{F} = - \underbrace{\vec{\nabla} p}_{\frac{dp}{dz} \hat{\mathbf{e}}_z} \cdot dV = \rho \cdot g dV \hat{\mathbf{e}}_z. \quad (6.6)$$

Integrieren wir nun über das Volumen des Körpers

$$\mathbf{F}_A = \int d\mathbf{F} = \int \rho g dV \hat{\mathbf{e}}_z = -\mathbf{g} \int \rho dV = -F_{G,\text{fl.}}, \quad (6.7)$$

so erhalten wir die gleiche Beziehung.

Übungsaufgabe: Eiswürfel im Glas

Ein Eiswürfel (Kantenlänge a) wird in ein zylindrische, mit Wasser gefülltes Glas (Radius r) gegeben. Der Wasserspiegel habe nun die Höhe h .

- Wie viel Prozent des Eiswürfels befinden sich unter Wasser, wenn wir davon ausgehen, dass die Dichte des Eises $\rho_{\text{Eis}} = 0.9\rho_{\text{W}}$ ist?
- Wie ändert sich der Füllstand h des Glases, wenn der Eiwürfel vollständig geschmolzen ist?

Lösung a): Im Gleichgewichtszustand wenn der Eiswürfel schwimmt, gleicht sich die Gewichtskraft F_G mit der Auftriebskraft F_A aus. Wir erhalten dann:

$$\begin{aligned} m \cdot g &= m_{\text{W}} \cdot g \quad \Rightarrow \quad \rho_{\text{Eis}} \cdot a^3 = \rho_{\text{W}} a^2 \cdot d, \\ &\Rightarrow \quad d = a \frac{\rho_{\text{Eis}}}{\rho_{\text{W}}} = 0.9a. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Dabei ist d die Länge der eingetauchten Kante im Wasser. Wir erhalten somit, dass sich 90 % des Eiswürfels unter der Wasseroberfläche befinden.

Lösung b): Um den Füllstand zu vergleichen, berechnen wir zunächst für den Anfangszustand das Volumen des Wassers, bevor der Eiswürfel geschmolzen ist:

$$V_{\text{Wasser}} = \pi r^2 \cdot h - a^2 \cdot d = \pi r^2 \cdot h - 0.9a^3. \quad (6.9)$$

Nun überlegen wir, welches Volumen an Wasser der geschmolzene Eiswürfel einnimmt. Da die Masse an Wasser beim Schmelzen unverändert bleibt, erhalten wir

$$m = \rho_{\text{Eis}} a^3 \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m}{\rho_{\text{W}}} = \frac{\rho_{\text{Eis}}}{\rho_{\text{W}}} a^3 = 0.9a^3. \quad (6.10)$$

Wir sehen im Vergleich der beiden Gleichungen, dass das vom Eiswürfel verdrängte Volumen an Wasser, genau dem Volumen des geschmolzenen Eiswürfels entspricht. Damit ist das Volumen am Ende

$$V_{\text{Ende}} = V_{\text{Wasser}} + V = \pi r^2 \cdot h, \quad (6.11)$$

und somit bleibt die Füllhöhe unverändert.

Appendix

A. Schiefer Stoß von Proton und Deuteron

Im folgenden Wollen wir die Übungsaufgabe des elastischen Stoßes von Proton und Deuteron für einen allgemeinen Ablenkwinkel des Deuterons φ_d und ein beliebiges Massenverhältnis $\xi = \frac{m_d}{m_p}$ berechnen. Um damit den Ablenkwinkel des Protons φ_p zu berechnen, müssen wir aus dem Gleichungssystem mit vier Variablen $u_{d,x}$ und $u_{d,y}$ eliminieren, um $\varphi_p = \frac{u_{p,y}}{u_{p,x}}$ zu finden. Dafür können wir (1.28) (quadriert) mit (1.31) gleichsetzen. Das ergibt.

$$\begin{aligned}
 & \stackrel{(1.28)^2}{\Rightarrow} v_p^2 = u_{p,x}^2 + 2\xi u_{p,x} u_{d,x} + \xi^2 u_{d,x}^2 \\
 \stackrel{(1.31)=(1.28)^2}{\Rightarrow} & \underbrace{u_{p,x}^2 + u_{p,y}^2}_{=u_p^2} + \xi u_{d,x}^2 (1 + \tan^2 \varphi_d) = \cancel{u_{p,x}^2} + 2\xi u_{p,x} u_{d,x} + \xi^2 u_{d,x}^2 \\
 & u_{p,y}^2 = 2\xi u_{p,x} u_{d,x} + \xi(\xi - 1 - \tan^2 \varphi_d) u_{d,x}^2 \\
 & \stackrel{(1.30)}{=} \frac{2\xi}{\tan \varphi_d} u_{p,x} u_{d,y} + \frac{\xi(\xi - 1 - \tan^2 \varphi_d)}{\tan^2 \varphi_d} u_{d,y}^2 \\
 \stackrel{\xi u_{d,y} = -u_{p,y}}{\Rightarrow} & u_{p,y}^2 \stackrel{(1.29)}{=} -\frac{2}{\tan \varphi_d} u_{p,x} u_{p,y} + \frac{(\xi - 1 - \tan^2 \varphi_d)}{\xi \tan^2 \varphi_d} u_{p,y}^2 \\
 u_{p,y} \left[1 - \frac{(\xi - 1 - \tan^2 \varphi_d)}{\xi \tan^2 \varphi_d} \right] &= -\frac{2}{\tan \varphi_d} u_{p,x} \\
 \Rightarrow \tan \varphi_p = \frac{u_{p,y}}{u_{p,x}} &= \frac{-2\xi \tan \varphi_d}{1 + \tan^2 \varphi_d + \xi(\tan^2 \varphi_d - 1)} = \frac{\xi \sin(2\varphi_d)}{\xi \cos(2\varphi_d) - 1}.
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Im letzten Schritt haben wir den Zähler und Nenner mit $\cos^2 \varphi_d$ multipliziert und die Identitäten $\sin(2\varphi_d) = 2 \sin \varphi_d \cos \varphi_d$, $\cos(2\varphi) = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$ und $1 + \tan^2 \varphi_d = (\cos \varphi)^{-2}$ genutzt.

B. Herleitung der Halbwinkelgleichung für Kosinusfunktionen

In diesem Abschnitt wollen wir folgende Identität beweisen:

$$\cos(x) + \cos(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right). \tag{B.2}$$

Dafür verwenden wir das Kosinus-Additionstheorems und formen zunächst die rechte Seite der Gleichung um.

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y) \tag{B.3}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{x \pm y}{2}\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{y}{2}\right) \mp \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{y}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \cos^2\left(\frac{y}{2}\right) - 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \sin^2\left(\frac{y}{2}\right). \tag{B.4}$$

Betrachten wir umgekehrt die Summe $\cos(x) + \cos(y)$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \cos(x) + \cos(y) &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{y}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{y}{2}\right) \\
 &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \underbrace{\left[\cancel{\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)} + \cos^2\left(\frac{y}{2}\right)\right]}_{=1} - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \underbrace{\left[\sin^2\left(\frac{y}{2}\right) + \cancel{\cos^2\left(\frac{y}{2}\right)}\right]}_{=1} \\
 &\quad + \cos^2\left(\frac{y}{2}\right) \underbrace{\left[\cancel{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]}_{=1} - \sin^2\left(\frac{y}{2}\right) \underbrace{\left[\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cancel{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right]}_{=1} \\
 &= 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{y}{2}\right) - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\sin^2\left(\frac{y}{2}\right), \tag{B.5}
 \end{aligned}$$

was in Übereinstimmung mit Gleichung (B.4) ist. Wie haben hier im zweiten Schritt vier mal eine "eins" mithilfe des trigonometrischen Pythagoras eingeschoben.